Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Alain Escassut

Synthèse harmonique ultramétrique. Théorie spectrale en analyse ultramétrique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1974-1975), exp. nº 23, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 23, 5 p.

12 mai 1975

SYNTHÈSE HARMONIQUE ULTRAMÉTRIQUE
THÉORIE SPECTRALE EN ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

par Alain ESCASSUT

1. Spectre et semi-normes spectrales.

Soit K un corps ultramétrique complet algébriquement clos. On notera k le corps résiduel de K $(k = A/\mathfrak{M})$, et $|K| = \{|x| \; ; \; x \in K\}$. On dira que K est fortement valué si l'un au moins des ensembles k et $|K|$ est non dénombrable.

Soit $(A, \|.\|)$ une K-algèbre de Banach commutative unitaire.

La théorie spectrale classique concerne le spectre maximal $\mathrm{Max}(A)$ d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach [1], qui est en bijection avec l'ensemble $X(A)$ des caractères de A, et avec l'ensemble des semi-normes multiplicatives continues, car toute semi-norme multiplicative continue de A est de la forme $|\chi|$ où $\chi \in X(A)$.

En algèbre de Banach ultramétrique il n'en est pas de même : d'une part tout idéal maximal n'est pas de codimension 1, et d'autre part les semi-normes multiplicatives continues n'ont pas toutes pour noyau un idéal maximal.

L'absence de topologie "sympathique" sur $\mathrm{Max}(A)$ conduit à introduire l'ensemble $\mathrm{Mult}(A, \|.\|)$ des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|.\|$, et on notera $\mathrm{Mult}_m(A, \|.\|)$ les $\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)$ tels que $\ker \varphi \in \mathrm{Max}(A)$.

2. Calcul fonctionnel holomorphe en analyse ultramétrique.

Soit $(A, \|.\|)$ une K-algèbre de Banach ultramétrique, soit $x \in A$, et soit $D = s(x)$. Soit $h \in K(D)$ (algèbre des fractions rationnelles sans pôle dans D), et soit $h(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, où $(P, Q) = 1$. Alors $Q(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in D$, et par suite $Q(x)$ est un élément inversible de A (en effet, si $Q(x)$ n'est pas inversible, il existe un homomorphisme χ de A sur une extension E de K tel que

$$\chi(Q(x)) = 0 \; ;$$

or $\chi(Q(x)) = Q(\chi(x))$, donc $\chi(x)$ est algébrique sur K, donc $\chi(x) \in K$, donc $\chi(x) \in D$, ce qui est absurde puisque $Q(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in D$).

Il existe donc un homomorphisme unifère canonique unique Θ_x tel que $\Theta_x(X) = x$, défini par $\Theta_x(h) = P(x)\, Q(x)^{-1}$, où $h(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$.

Pour résoudre certains problèmes de synthèse harmonique, on doit chercher une norme $\|.\|_{\mathcal{P}}$ définie sur $K(D)$ qui rende Θ_x continue, et permette son prolongement à l'algèbre de Banach $H(D, \mathcal{P})$ complétée de $K(D)$ pour cette norme, de sorte que l'on retrouve dans A des propriétés bien connues de $H(D, \mathcal{P})$.

Par exemple, si l'on note dans A , $\|x\|_s = \sup|\lambda|$, et si l'on note dans $K(D)$, $\|h\|_D = \sup_{\lambda\in D} |h(\lambda)|$, $\lambda \in s(x)$, il est clair que $\|h\|_D = \|h(x)\|_s$ de sorte que si la semi-norme $\|.\|_s$ de A est une norme équivalente à la norme $\|.\|$ d'algèbre de Banach de A , θ_x est trivialement continu quand on munit $K(D)$ de la norme $\|.\|_D$ et, dans ce cas, θ_x se prolonge à l'algèbre de Krasner $H(D)$.

Dans le cas général, nous utiliserons un procédé dont un aspect simplifié peut être résumé de la façon suivante :

Soit $\alpha \in D$, et soit V le disque circonférencié $d(\alpha , \|x\|)$. Si a et b appartiennent à $V - D$ et si $|a - b| < 1/\|(x - a)^{-1}\|$, on remarque, grâce à la propriété ultramétrique de la norme de A , que $\|(x - b)^{-1}\| = \|(x - a)^{-1}\|$.

On peut donc définir une partition $\mathcal{P}$ de $V - D$ dont les classes $T(a)$ sont les disques non circonférenciés $\delta(a , 1/\|(x - a)^{-1}\|)$: on a bien $T(b) = T(a)$, $\forall\ b \in T(a)$.

Considérons maintenant la décomposition de $h \in K(D)$ sous la forme $h=h_0 + \sum h_i$, où h_0 est une série de Taylor convergeant dans V , et où h_i est une série de la forme $\sum_{n\geq 1} \lambda_{i,n}/(X - a_i)^n$ qui converge pour $|X - a_i| \geq 1/\|(x - a_i)^{-1}\|$.

Alors, grâce au théorème de Mittag-Leffler [8] en analyse ultramétrique, on définit sur $K(D)$ une norme $\|.\|_{\mathcal{P}}$ associée à la partition $\mathcal{P}$ par

$$\|h\|_{\mathcal{P}} = \sup(\|h\|_V , \|h_i\|) ,$$

où $\|h_i\| = \sup_n|\lambda_{i,n}| \, \|(x - a_i)^{-1}\|^n$ et l'algèbre $H(D , \mathcal{P})$ complétée de $K(D)$ pour cette norme possède les propriétés cherchées.

Remarque. - Pour obtenir des résultats plus fins, on peut construire une algèbre de "germes" $\mathcal{O}_{A,x}(D)$ obtenue comme limite projective des algèbres $H(D , \varphi)$, où φ est une partition de $V - D$ dont toutes les classes sont celles de $\mathcal{P}$ sauf un nombre fini, qui sont plus grandes. L'algèbre de germes ainsi construite dépend de l'élément x considéré.

Les procédés de calcul fonctionnel holomorphe permettent d'obtenir les deux résultats qui suivent.

Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique, et soit ψ_A l'application de $\mathrm{Mult}_m(A , \|.\|)$ dans $\mathrm{Max}(A)$ définie par $\varphi \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \varphi$. Il résulte de la proposition 1 que ψ est surjective.

Définition. - Nous dirons que A est *ψ-injective* si ψ_A est une bijection.

THÉORÈME. - *Si K est fortement valué, toute K-algèbre de Banach A est ψ-injective.*

Si K n'est pas fortement valué, on sait qu'il existe des algèbres $H(D)$ qui ne sont pas ψ-injectives [4].

Notation : Pour tout idéal $\mathfrak{J}$ d'une K-algèbre A , on notera $h(\mathfrak{J})$ l'ensemble des idéaux maximaux de A contenant $\mathfrak{J}$.

PROPOSITION. - Supposons K fortement valué, et soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique.

Soit F un fermé de $\mathrm{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$, et soit $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$ tel que
$$h(\mathrm{Ker}(\varphi)) = F .$$
Alors φ appartient à l'adhérence de F dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$.

COROLLAIRE. - Si un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est le noyau d'un élément
$$\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$$
et si $h(\mathfrak{p})$ se réduit à un seul élément $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{M}$.

3. Synthèse harmonique.

Considérons une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach. On dit que A est régulière si l'application
$$\chi \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\chi$$
$$\text{de } X(A) \text{ dans } \mathrm{Max}(A)$$
est un homéomorphisme quand on munit $X(A)$ de la topologie de la convergence simple, et $\mathrm{Max}(A)$ de la topologie de Jacobson.

Cette définition n'aurait plus de sens en analyse ultramétrique puisque certains idéaux peuvent être de codimension infinie.

Mais on peut remarquer que, dans une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach, l'application
$$\chi \longrightarrow |\chi|$$
$$\text{de } X(A) \text{ dans } \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$$
est homéomorphe pour la topologie de la convergence simple dans ces deux ensembles de sorte que A est régulière si, et seulement si, l'application
$$\psi_A : \varphi \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi$$
$$\text{de } \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|) \text{ dans } \mathrm{Max}\,A$$
est un homéomorphisme.

C'est cette dernière définition que nous allons prolonger en algèbre de Banach non archimédienne.

Définition. - Nous disons qu'une K-algèbre de Banach A est régulière si l'application ψ_A est fermée.

Notations. - Soit A une K-algèbre commutative unitaire, et soit $x \in A$. On notera $\sigma(x)$ l'adhérence dans $\mathrm{Max}(A)$ (pour la topologie de Jacobson) de l'ensemble des $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(A)$ tels que $x \notin \mathfrak{M}$.

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A. On notera $h(\mathfrak{J})$ l'ensemble des $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(A)$ tels que $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{M}$.

Soit $E \subset \mathrm{Max}(A)$. On notera $I(E) = \cap\, \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \in E$, et on notera $f(E)$ l'idéal des $x \in A$ tels que $\sigma(x) \cap E = \emptyset$.

La proposition 1 est une conséquence immédiate des propriétés classiques en algèbre commutative, et on en déduit la proposition 2 en considérant l'adhérence de $\mathrm{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ dans $\mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$.

PROPOSITION 1. - Soit A une K-algèbre commutative unitaire dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle, et soit $x \in A$ tel que $\sigma(x) \cap h(\mathfrak{J}) = \emptyset$. Alors $x \in \mathfrak{J}$.

COROLLAIRE. - Soit A une K-algèbre commutative unitaire dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle, et soient x et $y \in A$ tels que $\sigma(x)$ soit contenu dans l'ensemble des $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}\, A$ tels que $y \notin \mathfrak{M}$. Alors x est multiple de y dans A .

Notations. - Soit $E \subset \mathrm{Max}(A)$. On notera $f(E)$ l'idéal des $x \in A$ tels que $\sigma(x) \cap E = \emptyset$.

PROPOSITION 2. - Soit A une K-algèbre de Banach commutative unitaire régulière, ψ-injective, et dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle, et soit E un fermé de $\mathrm{Max}\, A$. Alors l'ensemble des idéaux $\mathfrak{J}$ de A tels que $h(\mathfrak{J}) = E$ admet $I(E)$ pour plus grand élément, et $f(E)$ pour plus petit élément.

On sait que dans une algèbre de Banach complexe régulière, sans radical, qui vérifie la condition de Ditkin, on peut établir la relation $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$ pour les idéaux fermés $\mathfrak{J}$ tels que toute partie fermée de la frontière de $h(\mathfrak{J})$ possède des points isolés.

Nous obtenons ici cette relation sous des hypothèses beaucoup plus générales. Seule la condition de Ditkin, que nous allons rappeler, joue un rôle essentiel.

Définition. - Nous dirons qu'une K-algèbre de Banach commutative unitaire régulière vérifie la condition de Ditkin si, $\forall\, \mathfrak{M}_0 \in \mathrm{Max}(A)$ et $\forall\, x \in A$, il existe une suite u_n de A et une suite de voisinages V_n de $\mathfrak{M}_0$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} xu_n = x \quad \text{et} \quad u_n \in \mathfrak{M}\,, \quad \forall\, \mathfrak{M} \in V_n\,.$$

Nous pouvons maintenant conclure.

THÉORÈME. - Soit A une K-algèbre de Banach commutative unitaire dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle et qui vérifie la condition de Ditkin. Alors, pour tout idéal fermé $\mathfrak{J}$, on a $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$.

Le théorème est immédiat, à partir de la proposition 2, si $h(\mathfrak{J})$ est fini. Dans le cas où $h(\mathfrak{J})$ est dénombrable, la déduction à partir du cas fini est aisée. Si $h(\mathfrak{J})$ est quelconque, on doit considérer une limite dans A suivant le filtre du complémentaire des parties finies de $\mathrm{Max}(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Eléments de mathématiques. Théorie spectrale. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. ind., 1332 ; Bourbaki, 32).

[2] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbre de Krasner-Tate, Astérisque n° 10, 1973, p. 1-107.

[3] ESCASSUT (A.). - Propriétés spectrales en analyse non archimédienne, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 1387-1389.

[4] ESCASSUT (A.). - Spectre maximal d'une algèbre de Krasner (à paraître).

[5] GARANDEL (G.). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, Indagationes Mathematicae, 1975 (à paraître).

[6] GUENNEBAUD (B.). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.

[7] GUENNEBAUD (B.). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse Sc. math. Poitiers, 1973.

[8] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-220.

(Texte reçu le 26 mai 1975)

Alain ESCASSUT
M-11 G' Résidence Compostelle
33600 PESSAC