Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

FRANÇOIS GRAMAIN

Formes linéaires invariantes par translation et approximation rationnelle

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1974-1975), exp. nº G19, p. G1-G9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'etude de Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G19, 9 p.

12 mai 1975

FORMES LINÉAIRES INVARIANTES PAR TRANSLATION ET APPROXIMATION RATIONNELLE

par François GRAMAIN

(d'après Gary H. MEISTERS et Wolfgang M. SCHMIDT [4])

1. Introduction.

Dans toute la suite, les fonctions et les formes linéaires sont à valeurs complexes.

L'intégrale de Haar sur un groupe abélien localement compact G est définie, à une constante multiplicative près, comme l'unique forme linéaire continue, invariante par translation (et non nulle) sur l'espace des fonctions continues sur G à support compact.

Dans cet exposé, nous étudierons le problème de l'existence de formes linéaires invariantes par translation (f. l. i. t.) et discontinues sur certains espaces invariants par translation de fonctions définies sur un groupe abélien localement compact. Nous ne tenterons pas de donner un catalogue des résultats connus, que l'on peut d'ailleurs retrouver dans la bibliographie ci-dessous, mais nous montrerons sur quelques exemples le rôle important joué dans ce problème par l'approximation rationnelle.

Rappelons cependant que C. GUICHARD a montré en 1887 [1] que toute fonction entière $f(z)$ peut s'écrire sous la forme $f(z) = g(z + 1) - g(z)$, la fonction $g(z)$ étant entière ; ce qui prouve que, sur l'espace des fonctions entières, toute f. l. i. t. est nulle. La démonstration de ce résultat, donnée par APPELL en 1891 et HURWITZ en 1897, repose sur l'utilisation des polynômes de Bernoulli.

2. Le cas de $\mathcal{D}(\underline{T})$.

Soit $\underline{T} = \underline{R}/\underline{Z}$ le tore à une dimension, que nous identifierons souvent à l'intervalle $[0 , 1[$, et soit $\mathcal{D}(\underline{T})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\underline{T}$. On a le résultat suivant [2].

THÉORÈME 1. - *Toute forme linéaire L, invariante par translation sur $\mathcal{D}(\underline{T})$ est de la forme $L(f) = c \int_0^1 f(x)\, dx$ avec $c \in \underline{C}$, où dx est la mesure de Haar sur le tore.*

En particulier, toute f. l. i. t. sur $\mathcal{D}(\underline{T})$ est continue. Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que le noyau de l'intégrale de Haar est contenu dans le noyau de L. En effet, le noyau de l'intégrale est un hyperplan fermé, et alors L est identiquement nulle $(c = 0)$ ou proportionnelle à l'intégrale de Haar. Le théorème 1 est donc conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Si l'irrationnel α n'est pas un nombre de Liouville, toute fonction $f \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{T})$ telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ s'écrit sous la forme

$$f(x) = g(x) - g(x-\alpha) \quad \text{avec} \quad g \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{T}) . \tag{1}$$

Démonstration. - L'image de $\mathcal{D}(T)$ par la transformation de Fourier est l'espace des suites de nombres complexes à décroissance rapide,

$$\{u_n \in \underset{\sim}{C} , \quad n \in \underset{\sim}{Z} ; \quad \forall\, k \in \underset{\sim}{N} , \quad u_n n^k \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |n| \longrightarrow +\infty\} .$$

Or l'égalité (1) fournit $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)(1 - \exp(-2i\pi n\alpha))$. On a donc une décomposition du type (1) si la suite, définie par $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)(1 - \exp(-2i\pi n\alpha))^{-1}$ pour $|n| > 0$ et $\hat{g}(0)$ quelconque (puisque $\hat{f}(0) = \int_0^1 f(x)\,dx = 0$), est à décroissance rapide dès que $\hat{f}(n)$ est à décroissance rapide. Or, si $\|x\|$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche, on a $|1 - \exp(2i\pi x)| \geq 4\|x\|$, donc il suffit qu'il existe deux constantes positives $c(\alpha)$ et $k(\alpha)$ telles que $\|n\alpha\| \geq c/|n|^k$ pour tout entier n non nul pour que (1) ait lieu. Mais, cela caractérise les nombres α irrationnels qui ne sont pas de Liouville, et la proposition 1 est démontrée.

On voit que, puisque l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure nulle (bien qu'il ait la puissance du continu), pour presque tout α , toute fonction $f \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{T})$ d'intégrale nulle admet une décomposition du type (1).

3. Cas de $L^2(G)$.

Dans le cas de $L^2(\underset{\sim}{T})$, on n'a pas en général de décomposition du type (1) avec $g \in L^2(\underset{\sim}{T})$. Il faudrait en effet que la suite $\hat{f}(n)/\|n\alpha\|$ soit dans $\ell^2(\underset{\sim}{Z})$ dès que $\hat{f}(n)$ est dans $\ell^2(\underset{\sim}{Z})$.

Supposons que la suite a_n soit telle que si $u_n \in \ell^2(\underset{\sim}{Z})$, alors $a_n u_n \in \ell^2(\underset{\sim}{Z})$. L'application de ℓ^2 dans lui-même, définie par $u_n \longrightarrow a_n u_n$, est linéaire, et elle est continue d'après le théorème du graphe fermé. Par suite, cette application linéaire est bornée. Il suffit alors de prendre pour u_n la fonction caractéristique de $\{k\}$ pour voir que a_n est bornée. Or le théorème de Dirichlet montre que ce n'est jamais le cas pour la suite $a_n = 1/\|n\alpha\|$.

Mais le théorème 1 s'étend au cas de $L^2(G)$, où G est un groupe abélien compact et connexe. Si G est un groupe abélien localement compact, on note Γ son dual [5], et dx sa mesure de Haar. Si G est compact, Γ est discret, et l'image de $L^2(G)$ par la transformation de Fourier est $\ell^2(\Gamma)$. Sur $L^2(G)$, il existe une f. l. i. t. continue unique définie par $\Phi(f) = \hat{f}(1) = \int_G f(x)\,dx$. On a alors le résultat suivant [4].

THÉORÈME 2. - Soit G un groupe abélien compact connexe. Soit L une f. l. i. t. sur $L^2(G)$. Il existe $c \in \underset{\sim}{C}$ tel que, pour tout $f \in L^2(G)$, on a

$$L(f) = c \int_G f(x)\,dx \ .$$

Ce théorème résulte immédiatement, comme plus haut, des deux lemmes suivants.

LEMME 1. - *Soit* G *un groupe abélien compact, et* $f \in L^2(G)$ *tel que* $\hat{f}(1) = 0$, *et soit* $a_1, \dots, a_m \in G$. *Pour qu'il existe* $g_1, \dots, g_m \in L^2(G)$ *tels que*

(2) $$f(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x) - g_j(x - a_j) \quad \textit{pour presque tout} \quad x \in G ,$$

il faut et il suffit que

$$\sum_{\chi \in \operatorname{Supp} \hat{f}} \left(|\hat{f}(\chi)|^2 \Big/ \sum_{j=1}^{m} |1 - \chi(a_j)|^2\right) < +\infty ,$$

où $\operatorname{Supp} \hat{f}$ *désigne le support de la transformée de Fourier de* f .

LEMME 2. - *Soit* G *un groupe abélien compact connexe. Pour tout* $f \in L^2(G)$, *tel que* $\hat{f}(1) = 0$, *et pour tout entier* $m > 2$, *on a*

$$\int_{G^m} \sum_{\chi \in \operatorname{Supp} \hat{f}} \left(|\hat{f}(\chi)|^2 \Big/ \sum_{j=1}^{m} |1 - \chi(a_j)|^2\right) da_1 \dots da_m < +\infty .$$

En particulier, la série que l'on intègre converge pour presque tout m-*uple* $(a_1, \dots, a_m) \in G^m$.

Démonstration du lemme 1. - Il y a équivalence entre la relation (2) et

(2') $$\hat{f}(\chi) = \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_j(\chi)(1 - \overline{\chi(a_j)}) \quad \text{pour tout} \quad \chi \in \Gamma .$$

Prouvons que la condition est nécessaire : Si (2) est vérifiée, d'après (2') on a

$$\sum_{j=1}^{m} |1 - \chi(a_j)| \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad \chi \in \operatorname{Supp} \hat{f} .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\hat{f}(\chi)|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} |\hat{g}_j(\chi)|^2 \sum_{j=1}^{m} |1 - \chi(a_j)|^2$$

donc, pour tout $\chi \in \operatorname{Supp} \hat{f}$ on a

$$|\hat{f}(\chi)|^2 \Big/ \sum_{j=1}^{m} |1 - \chi(a_j)|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} |\hat{g}_j(\chi)|^2 .$$

Et comme chacun des g_j est dans $L^2(G)$, on a bien convergence de la série considérée.

Réciproquement, soit $(a_1, \dots, a_m) \in G^m$ tel que cette série converge. On construit une partition de $\operatorname{Supp} \hat{f}$ en m ensembles $I_1, \dots, I_m$ définis par

$$I_1 = \{\chi \in \operatorname{Supp} \hat{f} \ ; \ |1 - \chi(a_1)| = \max_{1 \leq k \leq m} |1 - \chi(a_k)|\}$$

$$I_j = \{\chi \in \operatorname{Supp} \hat{f} \ ; \ \chi \notin I_1 \cup \dots \cup I_{j-1}$$

et

$$|1 - \chi(a_j)| = \max_{1 \leq k \leq m} |1 - \chi(a_k)|\} \quad \text{pour} \quad j \geq 2 .$$

Posons alors

$$\hat{g}_j(\chi) = \begin{cases} \hat{f}(\chi)(1 - \overline{\chi(a_j)})^{-1} & \text{si } \chi \in I_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la relation (2') est vérifiée, et g_j est dans $L^2(G)$ pour tout j car, pour $\chi \in I_j$, on a

$$|\hat{g}_j(\chi)|^2 = |\hat{f}(\chi)|^2 \, |1 - \chi(a_j)|^{-2} = |\hat{f}(\chi)|^2 / \max_{1\leq k\leq m} |1 - \chi(a_k)|^2$$

donc

$$|\hat{g}_j(\chi)|^2 \leq m|\hat{f}(\chi)|^2 / \sum_{j=1}^{m} |1 - \chi(a_j)|^2 \quad \text{pour tout } \chi \in \operatorname{Supp} \hat{f} .$$

Cela achève la démonstration du lemme 1. Pour le lemme 2, nous utiliserons le résultat classique suivant.

LEMME 3. – Soit H et K deux groupes abéliens compacts, et $\varphi : H \to K$ un homomorphisme continu et surjectif. Si $\psi \in L^1(K)$, alors $\int_H \psi \circ \varphi dh = \int_K \psi dk$ où dh et dk désignent les mesures de Haar de H et K.

Prenons $H = G^m$, $K = \mathbb{T}^m$ et $\varphi(a_1, \dots, a_m) = (\chi(a_1), \dots, \chi(a_m))$ pour un caractère $\chi \in \Gamma$ non trivial. L'homomorphisme φ est clairement continu. Il est surjectif car $\chi(G)$, image continue de G, est compact et connexe et non trivial, car $\chi \neq 1$. Or un sous-groupe de $\mathbb{T}$ est fini ou dense, donc $\chi(G) = \mathbb{T}$ et $\varphi(G^m) = \mathbb{T}^m$. Choisissons $\psi(t_1, \dots, t_m) = (\sum_{j=1}^{m} |1 - t_j|^2)^{-1}$. Alors si $\psi \in L^1(\mathbb{T}^m)$ on voit que

$$\int_{G^m} (\sum_{j=1}^{m} |1 - \chi(a_j)|^2)^{-1} \, da_1 \dots da_m = \int_{\mathbb{T}^m} \psi$$

ne dépend pas de $\chi \in \Gamma \setminus \{1\}$. Et le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que l'intégrale considérée dans le lemme 2 est convergente de somme

$$(\int_{\mathbb{T}^m} \psi)(\sum_{\chi \in \operatorname{Supp} \hat{f}} |\hat{f}(\chi)|^2) = \|f\|_2^2 \int_{\mathbb{T}^m} \psi .$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\psi \in L^1(\mathbb{T}^m)$ si $m \geq 3$, c'est-à-dire que

$$I = \int_0^1 \overset{m}{\dots} \int_0^1 (\sum_{j=1}^{m} |1 - \exp(2i\pi x_j)|^2)^{-1} \, dx_1 \dots dx_m < +\infty \quad \text{pour } m \geq 3 .$$

Or on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_0^1 \dots \int_0^1 (\sum_{j=1}^{m} |\sin \pi x_j|^2)^{-1} \, dx_1 \dots dx_m \\ &= 2^{m-2} \int_0^{\frac{1}{2}} \dots \int_0^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{m} \sin^2 \pi x_j)^{-1} \, dx_1 \dots dx_m \\ &\leq 2^{m-4} \int_0^{\frac{1}{2}} \dots \int_0^{\frac{1}{2}} (\sum x_j^2)^{-1} \, dx_1 \dots dx_m \\ &\leq 2^{m-4} \int_{\rho < \sqrt{m}/2} \frac{1}{\rho^2} \, dx_1 \dots dx_m = J \end{aligned}$$

si ρ représente le rayon vecteur $\rho = (\sum_{j=1}^{m} x_j^2)^{-1/2}$. Or

$$J = 2^{m-3} (\pi^{m/2})/(\Gamma(m/2)) \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{m}} \rho^{m-3} \, d\rho$$

qui converge pour $m \geq 3$, ce qui démontre le théorème 2.

4. Liens avec l'approximation rationnelle.

Nous allons voir que, pour des raisons liées à des propriétés d'approximation rationnelle, les lemmes 1 et 2 sont, en certain sens, les meilleurs possibles. d'abord on voit que les translations a_j utilisées dépendent de la fonction f à décomposer, contrairement au cas de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{T})$. La proposition suivante montre qu'il en est nécessairement ainsi.

PROPOSITION 2. - Soit $a_1, \dots, a_m \in [0, 1[$. Il existe $f \in L^2(\underset{\sim}{T})$ tel que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$ et que l'équation

(2) $$f(x) = \sum_{j=1}^m g_j(x) - g_j(x - a_j) \quad \text{pour presque tout } x \in \underset{\sim}{T}$$

n'a aucune solution en g_j dans $L^2(\underset{\sim}{T})$.

Démonstration. - Si on a (2), on a

$$\hat{f}(n) = \sum_{j=1}^m \hat{g}_j(n)(1 - \exp(-2i\pi n a_j)) \quad \text{pour tout entier rationnel } n .$$

Si tous les a_j sont rationnels, il existe une suite infinie d'entiers positifs ν_k tels que $\hat{f}(\nu_k) = 0$.

Si au moins un des a_j est irrationnel, on peut appliquer le théorème de Dirichlet sur les approximations simultanées :

THÉORÈME (DIRICHLET). - Soit $a_1, \dots, a_m$ des réels dont au moins un est irrationnel, il existe une infinité de $(m + 1)$-uples d'entiers $(q, p_1, \dots, p_m)$ premiers entre eux dans leur ensemble, avec $q > 0$, tels que

$$|a_i - \frac{p_i}{q}| < q^{-1-1/m} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m .$$

On en déduit une suite infinie d'entiers positifs $q = \nu_k$ tels que

$$\| - \nu_k a_j \| < \nu_k^{-1/m}$$

donc tels que $|\exp(-2i\pi\nu_k a_j) - 1| \leq 2\pi\nu_k^{-1/m}$. On a alors

$$|\hat{f}(\nu_k)| \leq 2\pi\nu_k^{-1/m} \sum_{j=1}^m |\hat{g}_j(\nu_k)| .$$

Dans les deux cas, on a donc une suite infinie d'entiers positifs

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k < \nu_{k+1} < \dots$$

tels que

$$\sum_{k\geq 1} \nu_k^{2/m} |\hat{f}(\nu_k)|^2 < +\infty$$

puisque les g_j sont dans $L^2(\underset{\sim}{T})$.

Or il est clair qu'il existe des fonctions $f \in L^2(\underset{\sim}{T})$ qui ne vérifient pas cette condition. Posons, par exemple, $\hat{f}(n) = k^{-(1/2)-(1/m)}$ si $n = \nu_k$ et $\hat{f}(n) = 0$ si n n'est pas un ν_k . Alors

$$\sum_{n\in\underset{\sim}{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{k\geq 1} |\hat{f}(\nu_k)|^2 = \sum_{k\geq 1} 1/(k^{1+(2/m)}) < +\infty ,$$

donc $f \in L^2(\underset{\sim}{T})$, mais

$$\sum_{k\geq 1} \nu_k^{2/m} |\hat{f}(\nu_k)|^2 = \sum_{k\geq 1} \frac{\nu_k^{2/m}}{k^{1+2/m}} \geq \sum_{k\geq 1} \frac{k^{2/m}}{k^{1+2/m}} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} = +\infty .$$

C. Q. F. D.

Dans le cas de $\mathfrak{A}(\underset{\sim}{T})$, on n'avait utilisé qu'une seule fonction g , alors que pour $L^2(G)$ on en a utilisé $m \geq 3$. On peut montrer que cela aussi était nécessaire.

PROPOSITION 3. - Il existe $f \in L^2(\underset{\sim}{T})$ tel que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ et tel que

(2) $$f(x) = \sum_{j=1}^m g_j(x) - g_j(x - a_j) \quad \text{pour presque tout } x$$

ne peut avoir lieu avec $m \leq 2$.

Pour démontrer ce résultat nous utiliserons un lemme dû à W. SCHMIDT [6].

LEMME 4. - Soit $P_1 , \dots , P_n$ n points du carré unité $\{0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 1\}$. Notons $\overline{P_i P_j}$ la distance euclidienne de P_i à P_j . Alors on a

$$\sigma = \sum_{1\leq i<j\leq n} 1/\overline{P_i P_j}^{\,2} \geq \frac{1}{200} n^2 \log n .$$

Démonstration du lemme 4. - On a $\sigma \geq \sum_{k\geq 0} 2^{2k} \sum_{2^{-k-1}<\overline{P_iP_j}\leq 2^{-k}} 1$ donc

$$\sigma \geq \sum_{\overline{P_iP_j}\leq 1} 1 + \sum_{k\geq 1}(2^{2k} - 2^{2k-2}) \sum_{\overline{P_iP_j}\leq 2^{-k}} 1 \geq \frac{3}{4} \sum_{k\geq 0} 2^{2k} N(2^{-k})$$

si $N(\delta)$ désigne le nombre de couples (i , j) avec $i < j$ et $\overline{P_i P_j} < \delta$.

Or, si $8n^{-1/2} < \delta \leq 1$, on a $N(\delta) \geq (n^2 \delta^2)/64$. En effet, soit m la partie entière de $4/\delta$. Découpons le carré unité en m^2 petits carrés d'aire $1/m^2$. Soit $\nu(\rho)$ le nombre des points P_i appartenant au petit carré ρ . Dans le carré ρ , il y a $\frac{1}{2}\nu(\rho)[\nu(\rho) - 1]$ couples de points P_i , et la distance de deux de ces points est majorée par $\frac{2}{m} \leq \frac{4}{m+1} < \delta$, donc $N(\delta) \geq \frac{1}{2}\sum_\rho \nu(\rho)[\nu(\rho) - 1]$.

Mais on a $\sum_\rho(\nu(\rho) - 1) = n - m^2 \geq n - 16/\delta^2 > \frac{3}{4} n$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$(\tfrac{3}{4} n)^2 \leq [\sum_\rho(\nu(\rho) - 1)]^2 \leq (\sum_\rho 1)(\sum_\rho(\nu(\rho) - 1)^2) \leq m^2 \sum_\rho \nu(\rho)[\nu(\rho) - 1]$$

donc

$$N(\delta) \geq \frac{1}{m^2}\frac{1}{2}(\tfrac{3}{4} n)^2 > \frac{1}{4}\frac{n^2}{m^2} \geq \frac{n^2 \delta^2}{64} .$$

Si $\log n > 20$, pour $0 \leq k < \frac{1}{2}\log n$, on a $8n^{-1/2} < 2^{-k} \leq 1$, et la minoration de $N(\delta)$ fournit

$$\sigma \geq \frac{3}{4}\sum_{0\leq k<\frac{1}{2}\log n} 2^{2k}\frac{n^2\, 2^{-2k}}{64} = \frac{3}{4}\sum_{0\leq k<\frac{1}{2}\log n}\frac{n^2}{64} > \frac{1}{200} n^2 \log n .$$

Si $\log n \leq 20$, on a

$$\sigma \geq \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2} > \frac{n^2}{10} > \frac{1}{200} n^2 \log n ,$$

et lemme 4 est démontré.

On peut remarquer que, bien que les minorations aient été assez grossières, on a obtenu l'ordre de grandeur le meilleur possible. En effet, les n^2 points de coordonnées $(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n})$ avec $0 \leqslant k$, $\ell \leqslant n-1$ fournissent un σ majoré à une constante près par $n^4 \log n$.

On en déduit le lemme suivant.

LEMME 5. - <u>Soit</u> α <u>et</u> β <u>deux nombres réels</u>. <u>On a</u>

$$\sum_{q=1}^{n} (\|\alpha q\|^2 + \|\beta q\|^2)^{-1} > \frac{1}{200} n \log n .$$

Notons $\{x\}$ la partie fractionnaire de x. Soit P_q le point du carré unité de coordonnées $\{\alpha q\}$, $\{\beta q\}$. On a $|\{x\} - \{y\}| \geqslant \|x - y\|$, donc

$$\overline{P_i P_j}^2 = |\{\alpha i\} - \{\alpha j\}|^2 + |\{\beta i\} - \{\beta j\}|^2 \geqslant \|\alpha(i-j)\|^2 + \|\beta(i-j)\|^2 .$$

or si $1 \leqslant i < j \leqslant n$, pour q fixé, on a $j - i = q$ au plus n fois, donc

$$\sum_{q=1}^{n} (\|\alpha q\|^2 + \|\beta q\|^2)^{-1} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\|\alpha(i-j)\|^2 + \|\beta(i-j)\|^2)^{-1} \geqslant \frac{1}{n} \sum \frac{1}{\overline{P_i P_j}^2} > \frac{1}{200} n \log n .$$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3. Si on a

$$f(x) = g_1(x) - g_1(x - \alpha) + g_2(x) - g_2(x - \beta) \quad \text{avec} \quad g_1 \text{ et } g_2 \in L^2(\underset{\sim}{T}) ,$$

le lemme 1 montre qu'on a

$$\sum_{n \in \underset{\sim}{Z}} |\hat{f}(n)|^2 (\|n\alpha\|^2 + \|n\beta\|^2)^{-1} < +\infty ,$$

car $4\|x\| \leqslant |1 - \exp(2i\pi x)| \leqslant 2\pi\|x\|$, donc

$$|1 - \exp(2i\pi n\alpha)|^2 + |1 - \exp(2i\pi n\beta)|^2 \leqslant 4\pi^2 (\|n\alpha\|^2 + \|n\beta\|^2) .$$

Il s'agit pour prouver la proposition 3 de construire une fonction f ne vérifiant pas cette condition. Pour cela, nous avons envie d'une majoration de $\|n\alpha\|^2 + \|n\beta\|^2$, et le lemme 5 nous en fournit presque une si nous utilisons un artifice du type de la transformation d'Abel :

Posons $a(q) = (\|q\alpha\|^2 + \|q\beta\|^2)^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{n} |\hat{f}(q)|^2 a(q) &= (|\hat{f}(1)|^2 - |\hat{f}(2)|^2) a(1) + (|\hat{f}(2)|^2 - |\hat{f}(3)|^2)(a(1) + a(2)) + \dots \\ &\quad + (|\hat{f}(n-1)|^2 - |\hat{f}(n)|^2)(a(1) + \dots + a(n-1)) + |\hat{f}(n)|^2 (a(1) + \dots + a(n)) \\ &\geqslant \sum_{q=2}^{n} \left| |\hat{f}(q-1)|^2 - |\hat{f}(q)|^2 \right| \frac{q \log q}{200} .\end{aligned}$$

Soit

$$\hat{f}(q) = 1 / |q|^{1/2} \log|q| \quad \text{pour} \quad |q| \geqslant 2, \quad \hat{f}(\pm 1) = 1, \quad \hat{f}(0) = 0 ,$$

alors $f \in L^2(\underset{\sim}{T})$, mais

$$|\hat{f}(q-1)|^2 - |\hat{f}(q)|^2 > c_1 / q^2 (\log q)^2 \quad \text{pour} \quad q > 1 ,$$

donc

$$\sum_{q=1}^{n} |\hat{f}(q)|^2 a(q) \geqslant \sum_{q=2}^{n} (c_2 \, q \log q)/(q^2 (\log q)^2) > c_3 \log \log n ,$$

et $\sum_{n \in \underset{\sim}{Z}^*} |\hat{f}(n)|^2 (\|n\alpha\|^2 + \|n\beta\|^2)^{-1}$ est divergente, ce qui démontre la proposition 3.

Nous voyons que les difficultés proviennent de la convergence de la série de

Fourier de f . Si on suppose que la convergence est meilleure que celle de ℓ^2 , on a des résultats plus précis :

PROPOSITION 4. - Soit $\varepsilon > 0$, et soit $f \in L^2(\underset{\sim}{T})$ tel que $\hat{f}(0) = 0$ et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(q)|^2 \, |q|^\varepsilon < +\infty .$$

Soit $m > 2/\varepsilon$ un entier naturel. Alors, pour tout m-uple $(a_1 , \ldots , a_m)$ de nombres algébriques réels tels que $\{1 , a_1 , \ldots , a_m\}$ soient linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{Z}$, il existe $g_1 , \ldots , g_m \in L^2(\underset{\sim}{T})$ tels que

(2) $$f(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x) - g_j(x - a_j) \quad \text{pour presque tout } x \in \underset{\sim}{T} .$$

Le théorème de Wolfgang SCHMIDT ([7], page 41) sur les approximations simultanées de nombres algébriques montre que, sous ces hypothèses, et pour tout $\delta > 0$, $\max_{1 \leq j \leq m} \|qa_j\| < q^{-(\delta + 1/m)}$ n'a lieu que pour un nombre fini d'entiers q . Donc il existe une partition de $\underset{\sim}{Z}^*$ en m parties I_j telles que $\|a_j q\| > c|q|^{-\delta-(1/m)}$ si $q \in I_j$.

Posons

$$\hat{g}_j(q) = \begin{cases} \hat{f}(q)(1 - \exp(-2i\pi a_j q))^{-1} & \text{si } q \in I_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Alors, pour tout $q \in \underset{\sim}{Z}$, on a $\hat{f}(q) = \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_j(q)(1 - \exp(-2i\pi a_j q))$, et on peut choisir δ de sorte que g_j soit dans $L^2(\underset{\sim}{T})$ car

$$|\hat{g}_j(q)| \leq |\hat{f}(q)| \; |1-\exp(-2i\pi a_j q)|^{-1} \leq \frac{1}{4c} |\hat{f}(q)| \; |q|^{\delta+1/m} \leq \frac{1}{4c} |\hat{f}(q)| \; |q|^{\varepsilon/2}$$

si $\delta \leq \varepsilon/2 - 1/m$.

Remarquons, pour conclure, qu'on connaît des résultats principalement sur les espaces dont on sait caractériser l'image de Fourier, mais qu'on n'a que peu de résultats dans les autres cas. Par exemple, on ne sait pas s'il existe des f. l. i. t. discontinues sur l'espace des fonctions continues sur un groupe abélien compact.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUICHARD (C.). - Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1) - G(x) = H(x)$, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 4, 1887, p. 361-380.

[2] MEISTERS (G. H.). - Translation-invariant linear forms and a formula for the Dirac measure, J. Funct. Anal., t. 8, 1971, p. 173-188.

[3] MEISTERS (G. H.). - Some discontinuous translation-invariant linear forms, J. Funct. Anal., t. 12, 1973, p. 199-210.

[4] MEISTERS (G. H.) and SCHMIDT (W. M.). - Translation-invariant linear forms on $L^2(G)$ for compact abelian groups G , J. Funct. Anal., t. 11, 1972, p. 407-424.

[5] RUDIN (W.). - Fourier analysis on groups. - New York, J. Wiley and Sons, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

[6] SCHMIDT (W. M.). - On a problem of Heilbronn, J. London math. Soc., Series 2, t. 4, 1972, p. 545-550.

[7] SCHMIDT (W. M.). - Approximation to algebraic numbers. - Genève, l'Enseignement mathématique, 1972 (Monographie de l'Enseignement mathématique, 19).

[8] SEROLD (A. C.). - Continuous and discontinuous translation-invariant linear forms, Thesis Phil. D. University of Colorado, 1973.

[9] WOODWARD (G. S.). - Translation-invariant linear forms on $C_0(G)$, $C(G)$, $L^p(G)$ for noncompact groups, J. Funct. Anal., t. 16, 1974, p. 205-220.

(Texte reçu le 13 mai 1975)

François GRAMAIN
28 avenue du Panorama
92340 BOURG LA REINE