Daniel Bertrand

Un théorème de Schneider-Lang sur certains domaines non simplement connexes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1974-1975), exp. nº G18, p. G1-G13
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A14_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G18, 13 p.

5 mai 1975

UN THÉORÈME DE SCHNEIDER-LANG SUR CERTAINS DOMAINES NON SIMPLEMENT CONNEXES

par Daniel BERTRAND

1. Introduction.

Dans la plupart des démonstrations de transcendance, on construit, à partir des données du problème, une fonction analytique admettant de nombreux zéros. Des considérations arithmétiques permettent de minorer ses valeurs en certains points. Pour en obtenir des majorations, on fait alors appel à un "lemme de Schwarz" qui, en raison du nombre élevé de zéros connus de la fonction, améliore l'inégalité donnée par le principe du maximum. C'est ce type de démarche qu'on utilise pour démontrer le théorème de Schneider-Lang (voir [4], théorème 3.3.1), selon lequel deux fonctions méromorphes sur le corps des nombres complexes, d'ordres finis, algébriquement indépendantes et vérifiant certaines équations différentielles algébriques, ne peuvent prendre simultanément des valeurs dans un corps de nombres donné qu'en un nombre fini de points.

Nous nous proposons ici de montrer que ce critère de transcendance est encore valable lorsque les fonctions considérées sont seulement méromorphes sur le complémentaire dans $\mathbb{C}$ d'un ensemble fini de points (paragraphe 2). La démonstration, dont le principe est esquissé au paragraphe 3, est calquée sur la démonstration classique : la nouvelle hypothèse n'introduit de difficultés qu'au moment des majorations analytiques, pour lesquelles on doit suivre une méthode analogue à celle du théorème des trois cercles de Hadamard (paragraphe 4). Le "lemme de Hadamard-Schwarz" ainsi construit est discuté au paragraphe 5. Enfin, le paragraphe 6 est consacré à une application du nouveau critère de transcendance aux séries d'Eisenstein de poids 4 et 6.

Nous avons donné les démonstrations dans le cas complexe. On peut les reprendre sans difficulté dans le domaine p-adique. Le corollaire énoncé au paragraphe 6 est alors particulièrement intéressant (voir à ce sujet [2], théorème 2).

2. Un nouveau critère de transcendance.

L'étude analytique des fonctions méromorphes sur le complémentaire dans $\mathbb{C}$ d'un nombre fini de points nécessite l'introduction des définitions et notations suivantes.

Soient a un nombre complexe, f une fonction analytique dans un voisinage de a privé du point a, et μ un réel strictement positif. Nous dirons que f est d'ordre fini, inférieur à μ, au point a, s'il existe deux réels positifs r et A tels que :

$$(0 < |z - a| \leqslant r) \Longrightarrow (|f(z)| \leqslant \exp(A|z - a|^{-\mu})) .$$

Une fonction f analytique dans le complémentaire d'un compact de $\underset{\sim}{C}$ sera dite d'ordre fini inférieur ou égal à μ à l'infini si la fonction $f(z^{-1})$, analytique dans un voisinage de 0 privé de 0, est d'ordre fini inférieur ou égal à μ en 0.

Soit $(\underset{\sim}{a}) = \{a_0 , a_1 , \dots , a_g\}$ un $(g + 1)$-uple de points de la sphère de Riemann $\underset{\sim}{P}_1(\underset{\sim}{C})$. Nous notons $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$ l'ensemble des fonctions analytiques sur le complémentaire dans $\underset{\sim}{P}_1(\underset{\sim}{C})$ de l'ensemble des points $a_0 , a_1 , \dots , a_g$, et d'ordre fini en ces points. Soit $(\underset{\sim}{\mu}) = \{\mu^{(0)} , \mu^{(1)} , \dots , \mu^{(g)}\}$ un $(g + 1)$-uple de nombres réels strictement positifs. Si f désigne un élément de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$ d'ordre inférieur ou égal à μ_i au point a_i pour $i = 0 , 1 , \dots , g$, nous dirons que l'ordre de f est inférieur ou égal à $(\underset{\sim}{\mu})$.

Le corps des fractions de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$ est noté $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{a})$. Un élément de $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{a})$ est dit d'ordre inférieur ou égal à $(\underset{\sim}{\mu}) = \{\mu^{(0)} , \mu^{(1)} , \dots , \mu^{(g)}\}$ s'il peut s'écrire comme quotient de deux éléments de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$ d'ordres inférieurs ou égaux à $(\underset{\sim}{\mu})$.

Le critère de transcendance que nous avons en vue peut alors s'énoncer de la façon suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> K <u>un corps de nombres plongé dans</u> $\underset{\sim}{C}$;

$$(\underset{\sim}{a}) = \{a_0 , a_1 , \dots , a_g\}$$

<u>un</u> $(g + 1)$-<u>uple de points de sphère de Riemann</u> ; f_1 <u>et</u> f_2 <u>deux éléments de</u> $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{a})$ <u>algébriquement indépendants sur</u> K. <u>On suppose qu'il existe</u> $\ell-2$ <u>éléments de</u> $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{a})$: $f_3 , \dots , f_\ell$, <u>tels que la dérivation</u> d/dz <u>opère sur l'algèbre</u> $K[f_1 , \dots , f_\ell]$.

<u>Soient</u> $\mu^{(0)} , \mu^{(1)} , \dots , \mu^{(g)}$, <u>et</u> λ $g + 2$ <u>nombres réels strictement positifs, tels que</u> f_1 <u>soit d'ordre inférieur ou égal à</u> $(\underset{\sim}{\mu}) = \{\mu^{(0)} , \mu^{(1)} , \dots , \mu^{(g)}\}$, <u>et</u> f_2 <u>d'ordre inférieur ou égal à</u> $(\lambda\underset{\sim}{\mu}) = \{\lambda\mu^{(0)} , \lambda\mu^{(1)} , \dots , \lambda\mu^{(g)}\}$.

<u>Alors, si pour tout entier positif</u> d, ν_d <u>désigne le cardinal de l'ensemble</u> $\mathfrak{Z}_d$ <u>des nombres complexes</u> ζ <u>tels que le corps</u> $K(f_1(\zeta) , \dots , f_\ell(\zeta))$ <u>soit une extension algébrique de degré</u> d <u>de</u> K, <u>on a</u> :

$$(1) \qquad \sum_{d\in\underset{\sim}{N}} \frac{\nu_d}{d} \leqslant (\mu^{(0)} + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(g)})(1 + \lambda) [K : \underset{\sim}{Q}] .$$

<u>Remarque</u> 1. - En ce qui concerne l'hypothèse de dérivation, on peut remplacer l'opérateur d/dz par d'autres dérivations sur l'algèbre $K[f_1 , \dots , f_\ell]$ (voir, par exemple, [4], exercice 3.3.e). L'opérateur $z(d/dz)$ convient (voir [2]), et nous l'utiliserons au paragraphe 6. Signalons d'autre part que l'hypothèse de dérivation est un cas particulier d'une hypothèse plus générale concernant les propriétés arithmétiques du développement de Taylor des fonctions f_1 et f_2 aux points de l'ensemble $\mathfrak{Z} = \bigcup_{d\in\underset{\sim}{N}} \mathfrak{Z}_d$. Les critères 1 et I de [1] (première partie) s'étendent alors au contexte actuel.

Remarque 2. - La proposition est encore valable lorsqu'on remplace le corps des nombres complexes par un corps valué non archimédien complet algébriquement clos de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle non nulle, par exemple par le complété $\underset{\sim}{C}_p$ de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques.

Avant de passer à la démonstration de la proposition 1, nous indiquons ce qu'elle exprime dans certains cas particuliers. Nous notons $\nu = \nu_1$ le nombre des points de $\underset{\sim}{C}$ où les fonctions $f_1 , \dots , f_\ell$ prennent simultanément des valeurs dans le corps de nombres K.

Cas 1 : Si $g = 0$, et a_0 est le point à l'infini de $\underset{\sim}{P}_1(\underset{\sim}{C})$, $\mu^{(0)} = \rho_1$ majore l'ordre de croissance ordinaire de la fonction méromorphe f_1. Soit ρ_2 un majorant de celui de f_2. On peut alors choisir $\lambda = \rho_2/\rho_1$, et la conclusion de la proposition s'écrit

$$\sum_{d\in\underset{\sim}{N}} \frac{\nu_d}{d} \leq (\rho_1 + \rho_2)\,[K : \underset{\sim}{Q}] .$$

On retrouve ainsi le théorème 1 de [1] (première partie), d'où l'on tire l'énoncé plus classique (voir [4], théorème 3.3.1) :

(1 bis) $$\nu \leq (\rho_1 + \rho_2)\,[K : \underset{\sim}{Q}] .$$

Cas 2 : Si $g = 1$, et $\{a_0 , a_1\}$ est le couple $\{\infty , 0\}$, c'est-à-dire si les fonctions considérées sont méromorphes sur $\underset{\sim}{C}^* = \underset{\sim}{C} - \{0\}$, on a, lorsque f_1 et f_2 sont d'ordres inférieurs ou égaux à $(\underset{\sim}{\mu}) = \{\mu^{(0)} , \mu^{(1)}\}$:

$$\sum_{d\in\underset{\sim}{N}} \frac{\nu_d}{d} \leq 2(\mu^{(0)} + \mu^{(1)})\,[K : \underset{\sim}{Q}] .$$

Dans le cas où $\mu^{(0)} = \mu^{(1)} = \rho$, on obtient alors en particulier (voir [2], théorème 1) :

(1 ter) $$\nu \leq 4\rho[K : \underset{\sim}{Q}] .$$

3. Principe de la démonstration du critère.

Posons $\mathfrak{J} = \bigcup_{d\in\underset{\sim}{N}} \mathfrak{J}_d$, et soient $\zeta_1 , \dots , \zeta_m$ m éléments de $\mathfrak{J}$. Pour $n = 1 , \dots , m$, nous notons δ_n le degré de l'extension $K(f_1(\zeta_n) , \dots , f_\ell(\zeta_n))$ sur $\underset{\sim}{Q}$. Nous allons montrer l'inégalité

(2) $$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\delta_n} \leq (\mu^{(0)} + \dots + \mu^{(g)})(1 + \lambda) ,$$

qui entraîne que la famille $\{[K(f_1(\zeta) , \dots , f_\ell(\zeta)) : \underset{\sim}{Q}]^{-1}\}_{\zeta\in\mathfrak{J}}$ est sommable, de somme inférieure ou égale à $(\mu^{(0)} + \dots + \mu^{(g)})(1 + \lambda)$. C'est l'inégalité (1) du critère.

Soit S un entier arbitrairement grand. Les notations o et O se rapportent à la variable S tendant vers $+\infty$.

Premier pas : Soient α_1 et α_2 deux réels positifs de somme inférieure ou égale à 1. Le lemme de Siegel permet de construire un polynôme non nul

$$P_S(X_1\ ,\ X_2) = \sum_{\lambda_1=0,\dots,L_1;\lambda_2=0,\dots,L_2} p_{\lambda_1,\lambda_2}\, X_1^{\lambda_1}\, X_2^{\lambda_2}\ ,$$

dont les coefficients p_{λ_1,λ_2} sont des entiers de valeurs absolues majorées par $\exp(O(S))$, dont les degrés sont majorés, pour $i = 1\ ,\ 2$, par $L_i = S^{1-\alpha_i}(\log S)^{1/2}$, et tel que la fonction $F = P_S(f_1\ ,\ f_2)$ vérifie :

$$\frac{d^k}{dz^k} F(\zeta_n) = F^{(k)}(\zeta_n) = 0\ , \qquad \forall\ k = 0\ ,\ 1\ ,\dots,\ S-1\ ;\quad n = 1\ ,\dots,\ m\ .$$

(Pour une démonstration de cette construction classique, voir [4], page 3.12, ou [1], première partie, lemme 1).

Deuxième pas : Les fonctions f_1 et f_2 étant algébriquement indépendantes sur $\underset{\sim}{Q}$, la fonction F ne peut être identiquement nulle. On peut donc définir, pour tout $p = 1\ ,\ \dots\ ,\ m$, le plus petit ordre de dérivation, soit $\sigma_p \geq S$, tel que

$$F^{(\sigma_p)}(\zeta_p) \neq 0\ .$$

Soit alors n un entier, désormais fixé, compris entre 1 et m . D'après les hypothèses analytiques du critère, il existe un élément θ_1 (resp. θ_2) de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$, d'ordre inférieur ou égal à $(\underset{\sim}{\mu})$ (resp. $(\lambda\underset{\sim}{\mu})$) , non nul en ζ_n , et tel que la fonction $\theta_1 f_1$ (resp. $\theta_2 f_2$) soit un élément de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$ d'ordre inférieur ou égal à $(\underset{\sim}{\mu})$ (resp. $(\lambda\underset{\sim}{\mu})$) . La fonction

$$f = \theta_1^{L_1}\, \theta_2^{L_2}\, F$$

est alors un élément de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$.

Le nombre de zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité) de la fonction f est supérieur ou égal à $\sigma_1 + \dots + \sigma_m$. L'ordre du zéro ζ_p de f est en effet σ_p ; on pose :

$$\gamma_n = f^{(\sigma_n)}(\zeta_n)/\sigma_n! = \theta_1^{L_1}(\zeta_n)\ \theta_2^{L_2}(\zeta_n)(F^{(\sigma_n)}(\zeta_n)/\sigma_n!)\ .$$

Troisième pas : Minoration de $|\gamma_n|$. Ce pas est de nature arithmétique. L'hypothèse de dérivation entraîne que $F^{(\sigma_n)}(\zeta_n)$ est un nombre algébrique. Comme il est non nul par construction, on sait minorer sa valeur absolue. De façon précise, on a (voir [4], page 3.15) :

$$-\log((\sigma_n!)^{-1}.F^{(\sigma_n)}(\zeta_n)) \leq (\delta_n + o(1))\sigma_n \log \sigma_n\ ,$$

d'où :

(3) $$-\log|\gamma_n| \leq (\delta_n + o(1))\sigma_n \log \sigma_n\ .$$

Quatrième pas : Majoration de $|\gamma_n|$. Ce dernier pas est de nature analytique, et nous en détaillons la démonstration au paragraphe suivant. Il fournit une majoration de $|\gamma_n|$ en fonction du nombre de zéros de la fonction f (inégalité 6), qui conduit à la relation :

(4) $$\sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq (\mu^{(0)} + \dots + \mu^{(g)})(1+\lambda)(\delta_n + o(1))\sigma_n\ ,$$

valable pour tout $n = 1\ ,\ \dots\ ,\ m$.

On en tire :

$$\sum_{n=1}^{m} [(\mu^{(0)} + \ldots + \mu^{(g)})(1+\lambda)(\delta_n + o(1))]^{-1} \leqslant 1 ,$$

d'où l'inégalité (2) recherchée, lorsqu'on laisse croître S indéfiniment.

4. Le quatrième pas.

Hypothèses et notations : L'ordre d'une fonction en un point régulier ou en un pôle étant inférieur à tout réel strictement positif, on peut se contenter de démontrer la proposition 1 dans le cas où le point a_0 est le point à l'infini de $\underset{\sim}{P}_1(\underset{\sim}{C})$. En raison du rôle particulier qu'il joue alors dans la démonstration, nous posons :

$$\rho_1 = \mu^{(0)} , \quad \rho_2 = \lambda\mu^{(0)} .$$

De façon générale, nous notons, pour $j = 0 , 1 , \ldots , g$:

$$\mu_1^{(j)} = \mu^{(j)} , \quad \mu_2^{(j)} = \lambda\mu^{(j)} ; \quad m^{(j)} = \mu_1^{(j)} + \mu_2^{(j)} .$$

$$M = \sum_{j=0}^{g} m^{(j)} , \quad M_0 = M - m^{(0)} = \sum_{j=1}^{g} m^{(j)} .$$

Nous appelons lemniscates généralisées les lignes de niveau de la fonction $\varkappa : \underset{\sim}{C} \longrightarrow \underset{\sim}{R}$, définie par

$$\varkappa(z) = \prod_{j=1}^{g} |z - a_j|^{m^{(j)}/M_0} .$$

Pour tout élément h de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$, tout réel positif R , et tout nombre complexe a , nous notons :

$C_{a,R}$ (et C_R si $a = 0$) le cercle de centre a et de rayon R .

K_R la lemniscate généralisée $\{z \in \underset{\sim}{C} ; \ \varkappa(z) = R\}$.

$|h|_{a,R}$ (et $|h|_R$ si $a = 0$) le maximum de $|h(z)|$ quand z parcourt $C_{a,R}$.

$\|h\|_R$ le maximum de $|h(z)|$ quand z parcourt K_R .

Enfin, nous reprenons les notations du paragraphe 3 concernant les entiers S , σ_n , et l'élément f de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$ défini au deuxième pas. Nous connaissons, en tenant compte des multiplicités, $h = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m$ zéros de f .

Considérons alors la fonction $\varphi(z) = f(z)/\prod_{p=1}^{m}(z - \zeta_p)^{\sigma_p}$. C'est encore un élément de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{a})$. Soient β et β_0 deux réels strictement positifs, et posons :

$$R = \sigma_n^{\beta} , \ R_0 = \sigma_n^{\beta_0} , \ \mathcal{K}_{R^{-1},R_0} = \{z \in \underset{\sim}{C} ; \ R^{-1} \leqslant \varkappa(z) \leqslant R_0\} .$$

Pour tout réel ξ , la fonction

$$u_\xi(z) = \xi \sum_{j=1}^{g} \frac{m^{(j)}}{M_0} \log|z - a_j| + \log|\varphi(z)|$$

est sous-harmonique dans $\mathcal{K}_{R^{-1},R_0}$, et y vérifie :

$$u_\xi(\zeta) \leqslant \sup_{z\in K_{R^{-1}}\cup K_{R_0}} u_\xi(z)$$
$$\leqslant \sup(\xi \log R^{-1} + \log\|\varphi\|_{R^{-1}} , \xi \log R_0 + \log\|\varphi\|_{R_0}) .$$

En particulier, on obtient, en choisissant $\xi = \log(\|\varphi\|_{R^{-1}}/\|\varphi\|_{R_0})/\log(R_0/R^{-1})$:

$$\forall \zeta \in \mathcal{K}_{R^{-1},R_0} , \quad \log(\|\varphi\|_{R^{-1}}/\|\varphi\|_{R_0})\log \varkappa(\zeta)+\log(R_0/R^{-1})\log|\varphi(\zeta)|$$
$$\leqslant \log R_0 \log\|\varphi\|_{R^{-1}} - \log R^{-1} \log\|\varphi\|_{R_0} ,$$

soit

$$(5) \quad \log(R_0/R^{-1})\log|\varphi(\zeta)| \leqslant \log(R_0/\varkappa(\zeta))\log\|\varphi\|_{R^{-1}}+\log(\varkappa(\zeta)/R^{-1})\log\|\varphi\|_{R_0} .$$

L'inégalité (5) exprime que la fonction $\log|\varphi(\zeta)|$ est une fonction convexe de $\log|\varkappa(\zeta)|$. Elle est bien entendu à rapprocher du théorème des trois cercles de Hadamard (voir l'inégalité (5 bis) du paragraphe 5).

Les réels R et R_0 étant fonctions croissantes de σ_n, donc de S, on peut supposer que les points $\zeta_1 , \dots , \zeta_m$ appartiennent tous à $\mathcal{K}_{R^{-1},R_0}$. Nous allons évaluer les différents termes de l'inégalité (5) lorsque ζ est le point ζ_n. Nous rappelons que les notations o et O se rapportent à la variable S (donc à R et R_0) tendant vers $+\infty$.

De $f^{(\sigma_n)}(\zeta_n) = \sigma_n! \prod_{p=1,p\neq n}^{m} (\zeta_n - \zeta_p)^{\sigma_p} \varphi(\zeta_n)$, on tire

$$\log|\gamma_n| \leqslant \log|\varphi(\zeta_n)| + O(1).h .$$
$$\log \varkappa(\zeta_n)| = O(1) .$$

De $\|f\|_{R^{-1}} \geqslant \|\varphi\|_{R^{-1}} \times \inf_{z\in K_{R^{-1}}} \prod_{p=1}^{m} |z - \zeta_p|^{\sigma_p}$, on tire :

$$\log\|\varphi\|_{R^{-1}} \leqslant \log\|f\|_{R^{-1}} + O(1).h .$$

De même, $\|f\|_{R_0} \geqslant \|\varphi\|_{R_0} \times \inf_{z\in K_{R_0}} \prod_{p=1}^{m} |z - \zeta_p|^{\sigma_p}$ entraîne

$$\log\|\varphi\|_{R_0} \leqslant \log\|f\|_{R_0} - (1 - o(1))(\log R_0)h .$$

On déduit alors de (5) :

$$(\log R_0+\log R)\log|\gamma_n| \leqslant (1+o(1))(\log R_0 \log\|f\|_{R^{-1}}+\log R \log\|f\|_{R_0})-h\times A ,$$

où A est minoré par

$$\log R_0 \log R \leqslant A + o(1).\log R_0 \log R ,$$

soit, après division par $\log R_0 \log R$:

$$(6) \quad h \leqslant (1 + o(1))\left[\frac{\log\|f\|_{R^{-1}}}{\log R} + \frac{\log\|f\|_{R_0}}{\log R_0} - \left(\frac{1}{\log R} + \frac{1}{\log R_0}\right)\log \frac{|f^{(\sigma_n)}(\zeta_n)|}{\sigma_n!}\right] .$$

La connaissance de la croissance de la fonction $|f|$ au voisinage des points a_i ~~et~~ à l'infini nous permet d'exploiter cette inégalité.

Pour R et R_0 suffisamment grands, il résulte de la définition des lemniscates généralisées K_R et K_{R_0} qu'il existe deux réels $\tilde{R}$ et $\tilde{R}_0$ vérifiant $\tilde{R} \leq \mathcal{O}(R)$, $\tilde{R}_0 \leq \mathcal{O}(R_0)$, et tels que le compact K_{R^{-1},R_0} soit contenu dans le domaine borné par le cercle $C_{\tilde{R}_0}$ et les g cercles $C_{a_j,\tilde{R}^{-M_0/m^{(j)}}}$, $j = 1 , \dots , g$.

En conséquence, on a, pour $i = 1 , 2$, et d'après la définition de l'ordre des fonctions f_1 et f_2 :

$$\|\theta_i\ f_i\|_{R_0} \leq \exp(\mathcal{O}(R_0^{\rho_1})) ,$$

$$\|\theta_i\ f_i\|_{R^{-1}} \leq \sup_{j=1,\dots,g} \{\exp(\mathcal{O}(R^{(M_0/m^{(j)}).\mu_1^{(j)}})\} .$$

D'où, en vertu de l'expression de F donnée au premier pas de la démonstration :

$$\log\|f\|_{R_0} \leq \mathcal{O}(L_1\ R_0^{\rho_1} + L_2\ R_0^{\rho_2}) ,$$

$$\log\|f\|_{R^{-1}} \leq \mathcal{O}[\sup_{j=1,\dots,g} \{L_1\ R^{\mu_1^{(j)}M_0/m^{(j)}} + L_2\ R^{\mu_2^{(j)}M_0/m^{(j)}}\}] ,$$

soit

$$\log\|f\|_{R_0} \leq \mathcal{O}[(\sigma^{1-\alpha_1+\beta_0\rho_1} + \sigma^{1-\alpha_2+\beta_0\rho_2}) \times (\log \sigma_n)^{1/2}]$$

$$\log\|f\|_{R^{-1}} \leq \mathcal{O}[(\log \sigma_n)^{\frac{1}{2}}\times\sup_{j=1,\dots,g}\{\sigma^{1-\alpha_1+\beta M_0\mu_1^{(j)}/m^{(j)}} + \sigma^{1-\alpha_2+\beta M_0\mu_2^{(j)}/m^{(j)}}\}] .$$

Nous cherchons à rendre négligeables les expressions ci-dessus dans l'inégalité (6), ce qui sera le cas si elles sont du type $\mathcal{O}(\sigma_n(\log \sigma_n)^{\frac{1}{2}})$. Les conditions α_1 , $\alpha_2 \geq 0$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$ imposent, pour choix optimal,

$$\beta = 1/M_0 , \quad \beta_0 = 1/(\rho_1 + \rho_2)$$

$$\alpha_1 = \rho_1/(\rho_1 + \rho_2) , \quad \alpha_2 = \rho_2/(\rho_1 + \rho_2) .$$

En effet, les relations $\mu_2^{(j)} = \lambda\mu_1^{(j)}$ pour $j = 0 , 1 , \dots , g$ entraînent alors :

$$\mu_1^{(j)}/m^{(j)} = 1/(1 + \lambda) = \rho_1/(\rho_1 + \rho_2) = \alpha_1 ,$$

$$\mu_2^{(j)}/m^{(j)} = \lambda/(1 + \lambda) = \rho_2/(\rho_1 + \rho_2) = \alpha_2 ,$$

et l'on obtient

$$\log\|f\|_{R_0} \leq \mathcal{O}(\sigma_n(\log \sigma_n)^{1/2}) ,$$

$$\log\|f\|_{R^{-1}} \leq \mathcal{O}(\sigma_n(\log \sigma_n)^{1/2}) .$$

On tire alors de l'inégalité (6) :

$$h \leq (1 + o(1))[\mathcal{O}(\frac{\sigma_n}{(\log \sigma_n)^{1/2}}) - (\frac{M_0}{\log \sigma_n} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\log \sigma_n})\log|\gamma_n|]$$

d'où, en vertu de la minoration arithmétique (4), donnée au troisième pas de la démonstration,

$$h \leq (1 + o(1))(M_0 + \rho_1 + \rho_2)(\delta_n + o(1))\sigma_n ,$$

soit :

(4) $$\sigma_1 + \dots + \sigma_m \leqslant (\mu^{(0)} + \dots + \mu^{(g)})(1+\lambda)(\delta_n + o(1))\sigma_n .$$

Pour $n = 1, \dots, m$, les inégalités ainsi obtenues permettent de conclure la démonstration de la proposition 1.

5. Le lemme de Hadamard-Schwarz.

Dans la démonstration précédente (quatrième pas), il convient de distinguer trois principes : d'une part, comme dans la démonstration classique, nous avons introduit la fonction φ afin de tenir compte du nombre de zéros que possède la fonction f dans un compact fixé ; par ailleurs, la considération des courbes de niveau K_R a permis de cerner la géométrie du problème (leurs composantes connexes fournissent en effet une représentation de l'homotopie de la sphère de Riemann privée des points $\infty, a_1, \dots, a_g$) ; enfin, nous avons pondéré les facteurs qui interviennent dans le produit $\varkappa$ en fonction du type de singularité que présentent les fonctions f_1 et f_2 en ces points.

Nous donnons ici une application simple des deux premiers de ces principes, lorsque les fonctions considérées sont analytiques dans une couronne. On peut sans difficulté étendre l'énoncé qui suit à l'étude de fonctions analytiques sur un domaine borné par deux lemniscates.

Nous conservons les notations du paragraphe 4. De plus, nous notons, pour tout réel R supérieur ou égal à 1, $\mathcal{C}_{R^{-1},R}$ la couronne $\{z \in \underset{\sim}{C} ;\ R^{-1} \leqslant |z| \leqslant R\}$.

PROPOSITION 2. - Soient $R > r > 1$ deux réels, f une fonction analytique sur la couronne $\mathcal{C}_{R^{-1},R}$, admettant h zéros (comptés avec leurs ordres de multiplicité) dans la couronne $\mathcal{C}_{r^{-1},r}$. Posons $\alpha = \log r/\log R$. Si l'on suppose $r > 2$, $\alpha < \frac{1}{3}$, $|f|_R > 1$ et $|f|_{R^{-1}} > 1$, alors :

(6 bis) $$|f|_r^2 \leqslant (|f|_R\ |f|_{R^{-1}})^{1+\alpha}\ \left(\frac{r}{R}\right)^{(1-10\alpha)h} .$$

Démonstration. - Soient ζ un élément de $\mathcal{C}_{r^{-1},r}$ de module ρ, $\{\zeta_i\}_{i=1,\dots,h}$ les zéros de f dans $\mathcal{C}_{r^{-1},r}$ (répétés en tenant compte des multiplicités), et φ la fonction analytique dans $\mathcal{C}_{R^{-1},R}$ définie par :

$$\varphi(z) = f(z)/\textstyle\prod_{i=1}^{h}(z - \zeta_i) .$$

On a

$$|f(\zeta)| \leqslant |\varphi(\zeta)| \times (2r)^h$$

$$|\varphi|_R \leqslant |f|_R \times (R - r)^{-h}$$

$$|\varphi|_{R^{-1}} \leqslant |f|_{R^{-1}} \times (r^{-1} - R^{-1})^{-h} .$$

Le théorème des trois cercles de Hadamard permet d'écrire :

(5 bis) $$\log(R/R^{-1})\ \log|\varphi(\zeta)| \leqslant \log(\rho/R^{-1})\ \log|\varphi|_R + \log(R/\rho)\ \log|\varphi|_{R^{-1}} .$$

De $r^{-1} \leqslant \rho \leqslant r$, on tire, en vertu des inégalités précédentes, et de l'hypothèse $|f|_R > 1$, $|f|_{R^{-1}} > 1$:

$$2 \log R \log|\varphi(\zeta)| \leqslant \log(rR)(\log|f|_R + \log|f|_{R^{-1}}) - h(\log \frac{R}{r} \log(R-r) + \log(Rr)\log\frac{R-r}{Rr}) ,$$

soit

$$2 \log|f(\zeta)| \leqslant \frac{\log(rR)}{\log R} (\log(|f|_R . |f|_{R^{-1}}) - (\log \frac{R}{r}) \times h.B$$

où

$$B = \frac{\log(R - r)}{\log R} - 2 \frac{\log(2r)}{\log(R/r)} - \frac{\log(Rr)}{\log(R/r)} . \log \frac{Rr}{R - r} \times \frac{1}{\log R} .$$

Or,

$$\log(R - r) \geqslant (\log R) - 1 \quad \text{dès que} \quad \frac{r}{R} < 1 - e^{-1} .$$

$$\frac{\log(2r)}{\log(R/r)} \leqslant \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \quad \text{dès que} \quad r > 2 .$$

$$\log \frac{Rr}{R - r} \leqslant \log r + 1 \quad \text{dès que} \quad \frac{r}{R} < 1 - e^{-1} .$$

Pour $r > 2$, et $\alpha = \log r/\log R < \frac{1}{3}$, on a donc :

$$B \geqslant 1 - \frac{1}{\log R} (1 + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}) - \alpha \frac{5 + \alpha}{1 - \alpha} .$$

$$\geqslant 1 - 5\alpha \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \geqslant 1 - 10\alpha .$$

Ainsi, pour tout élément ζ de la couronne $\mathcal{C}_{r^{-1},r}$:

$$|f(\zeta)|^2 \leqslant (|f|_R \ |f|_{R^{-1}})^{1+\alpha} (\frac{r}{R})^{(1-10\alpha)h} ,$$

ce qui entraîne l'inégalité (6 bis) de la proposition 2. On peut remarquer que lorsqu'on fait tendre α vers 0 dans l'inégalité précédente, on retrouve l'inégalité (6) du paragraphe 4, dans le cas où $g = 1$, $R = R_0$ et $\sigma_n = 0$.

<u>Conclusion</u>. - Les différentes extensions du lemme de Schwarz que nous venons d'indiquer permettent d'énoncer les principes généraux suivants :

(i) les critères de transcendance obtenus sur les valeurs de fonctions méromorphes dans un disque s'étendent aux fonctions méromorphes sur une couronne (et, plus généralement, sur un domaine borné par deux lemniscates).

(ii) les critères de transcendance obtenus sur les valeurs de fonctions méromorphes sur $\underset{\sim}{C}$ s'étendent aux fonctions méromorphes sur le complémentaire dans $\underset{\sim}{C}$ d'un ensemble fini de points (en particulier, sur $\underset{\sim}{C}^* = \underset{\sim}{C} - \{0\}$).

<u>Question</u>. - On sait que le théorème de Schneider-Lang s'étend à l'étude des fonctions méromorphes de d variables complexes (théorème de Bombieri). D'après le théorème de Hartogs, les fonctions méromorphes dans le complémentaire dans $\underset{\sim}{C}^d$ d'un ensemble fini de points sont encore justifiables du théorème de Bombieri, puisqu'elles sont prolongeables en des fonctions méromorphes sur $\underset{\sim}{C}^d$. La généralisation naturelle du problème précédent est en fait la suivante : Existe-t-il un lemme de Schwarz pour une fonction analytique sur le complémentaire d'un diviseur algébrique de $\underset{\sim}{C}^d$ (par exemple : $z_1 = 0$, ou $z_1 z_2 \dots z_d = 0$) ?

6. Application aux séries d'Eisenstein.

Soient Λ un réseau du plan complexe, $\{\omega_1, \omega_2\}$ une base de Λ telle que $\tau = \omega_1/\omega_2$ ait une partie imaginaire positive. Pour tout entier k strictement supérieur à 1, on pose

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum\nolimits'_{m,n} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^k}$$

La série $G_k(\tau) = \omega_2^{-2k} G_k(\omega_1, \omega_2)$ définit une forme modulaire pour $SL_2(\underset{\sim}{Z})$, de poids $2k$, dont le développement de Taylor à l'infini en la variable $q = \exp 2i\pi\tau$ s'écrit

$$G_k(\tau) = 2\zeta(2k)\ E_{2k}(q) ,$$

avec

$$E_{2k}(q) = 1 + (-1)^k\ (4k/B_k) \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n)\ q^n .$$

(Dans cette expression, B_k désigne le k-ième nombre de Bernouilli, et $\sigma_{2k-1}(n)$ la somme des puissances $(2k-1)$-ièmes de l'entier n.)

Nous appelons série d'Eisenstein normalisée de poids $2k$ la série E_{2k}.

Il est bien connu qu'à des facteurs rationnels près, les nombres $G_2(\omega_1, \omega_2)$ et $G_3(\omega_1, \omega_2)$ apparaissent comme coefficients de l'équation différentielle satisfaite par la fonction elliptique de Weierstrass $\wp_\Lambda$ de périodes ω_1, ω_2. Un corollaire, dû à SCHNEIDER, du théorème de Schneider-Lang énonce que toute période non nulle d'une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants algébriques est $\overline{\underset{\sim}{Q}}$-linéairement indépendante de π. En conséquence, pour tout ω_1, l'un au moins des nombres $G_2(\omega_1, 2i\pi)$, $G_3(\omega_1, 2i\pi)$ est transcendant. Mais

$$G_k(\omega_1, 2i\pi) = (2i\pi)^{-2k} \times 2\zeta(2k)\ E_{2k}(q) = (-1)^k\ (B_k/(2k)!)\ E_{2k}(q) ,$$

et, en particulier :

$$(7) \qquad E_4(q) = 4! \times 30G_2(\omega_1, 2i\pi) \ ; \quad E_6(q) = -6! \times 42G_3(\omega_1, 2i\pi) .$$

Donc, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 3. - Les séries d'Eisenstein normalisées de poids 4 et 6 ne peuvent prendre simultanément des valeurs algébriques.

Nous allons montrer comment le nouveau critère de transcendance obtenu au paragraphe 2 permet de retrouver ce résultat, lorsque c'est le point de vue de Jacobi, et non celui de Weierstrass, qui est utilisé. L'intérêt principal du point de vue de Jacobi réside dans le fait les fonctions elliptiques P_q de Jacobi-Tate ont encore un sens dans le domaine p-adique, alors que les fonctions $\wp_\Lambda$ de Weierstrass n'y sont définies qu'au voisinage de l'origine. Nous n'allons faire la démonstration que dans le cas complexe, mais le principe en est universel, et les résultats que fournit sa traduction p-adique (voir [2]) ne pourraient être obtenus à partir de l'étude de fonctions de Weierstrass. Néanmoins, afin d'expliciter la démarche que nous avons suivie, nous avons indiqué à chaque pas comment les deux points de vue sont liés (formules 8 et 11 ci-dessous).

Définition des fonctions P_q : soient q un nombre complexe non nul de module strictement inférieur à 1, et τ un élément du demi-plan de Poincaré tel que $q = \exp 2i\pi\tau$. Le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, admettant les points du réseau $\Lambda = 2i\pi\tau.\mathbb{Z} + 2i\pi.\mathbb{Z}$ comme périodes, est engendré par la fonction elliptique $\wp_\Lambda$ et par sa dérivée $\wp'_\Lambda = (d/dz)\wp_\Lambda$. On démontre de même que le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ admettant q comme période (multiplicative) est engendré par la fonction elliptique de Jacobi-Tate :

$$P_q(Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n Z}{(1-q^n Z)^2} + \frac{1}{12} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}$$

et par sa dérivée pour l'opérateur de dérivation $D = Z(d/dZ)$:

$$DP_q(Z) = Z(d/dZ)\, P_q(Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (q^n Z + q^{2n} Z^2)/((1-q^n Z)^3)\ .$$

L'application exponentielle permet de définir un isomorphisme du groupe des points complexes de la courbe elliptique $\mathbb{C}/(2i\pi\tau\mathbb{Z} + 2i\pi\mathbb{Z})$ sur le quotient $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ par le sous-groupe engendré par les puissances entières de q. De façon précise, on a, pour $Z = \exp 2i\pi z$ (voir [3], I, 4, §9, formule 14) :

(8)
$$P_q(Z) = \wp_\Lambda(2i\pi z)$$
$$[Z(d/dZ)]P_q(Z) = DP_q(Z) = [\tfrac{1}{2i\pi}\,(d/dz)](\wp_\Lambda(2i\pi z)) = \wp'_\Lambda(2i\pi z)\ .$$

L'équation différentielle :

$$\wp'^2_\Lambda = 4\wp^3_\Lambda - 60G_2(2i\pi\tau\ ,\ 2i\pi)\ \wp_\Lambda - 140G_3(2i\pi\tau\ ,\ 2i\pi)$$

peut alors s'écrire, grâce à (7) :

(9)
$$(DP_q)^2 = 4P_q^3 - (1/12)E_4(q)P_q + (1/216)E_6(q)\ .$$

Détermination de l'ordre de P_q : considérons la fonction Θ_q, analytique sur $\mathbb{C}^*$, définie par :

(10)
$$\Theta_q(Z) = (1 - Z^{-1}) \prod_{n=1}^{+\infty} [(1-q^n Z^{-1})(1-q^n Z)/(1-q^n)^2]\ .$$

Elle correspond à la fonction σ_Λ de Weierstrass associée au réseau

$$\Lambda = 2i\pi\tau\mathbb{Z} + 2i\pi\mathbb{Z}$$

par la formule :

(11)
$$\sigma_\Lambda(2i\pi z) = \exp(i\pi\eta_2\, z^2 + i\pi z)\ \Theta_q(Z)\ ,\ \text{pour}\ \ Z = \exp 2i\pi z\ .$$

Dans cette formule, η_2 désigne la deuxième pseudo-période de la fonction ζ_Λ de Weierstrass (voir [3], I, 4, §9, formule 9). On a

$$\eta_2 = -(2i\pi/12).(1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n)\ q^n)\ .$$

Soit a un nombre complexe n'appartenant pas à Λ, et posons $\alpha = \exp 2i\pi a$. De l'égalité classique

$$\wp_\Lambda(z) - \wp_\Lambda(a) = \frac{1}{\sigma_\Lambda(a)\,\sigma_\Lambda(-a)} \frac{\sigma_\Lambda(z-a)\,\sigma_\Lambda(z+a)}{[\sigma_\Lambda(z)]^2} ,$$

on tire, grâce à (8) et (11), pour $Z = \exp 2i\pi z$:

$$(12) \qquad P_q(Z) - P_q(\alpha) = \frac{\Theta_q(Z/\alpha)\,\Theta_q(\alpha Z)}{[\Theta_q(Z)]^2} \times \frac{1}{\Theta_q(\alpha)\,\Theta_q(-\alpha)} .$$

Soient R un réel supérieur à 1, Z un nombre complexe de module R, et z un nombre complexe vérifiant

$$Z = \exp 2i\pi z \quad \text{et} \quad |z|^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{(\log R)^2}{4\pi^2} .$$

La fonction analytique (sur $\underset{\sim}{C}$) σ_Λ étant d'ordre 2, on déduit de (11) :

$$|\Theta_q|_R \leq \exp O(|z|^2)$$
$$\leq \exp O((\log R)^2) .$$

On démontrerait de même : $|\Theta_q|_{R^{-1}} \leq \exp O((\log R)^2)$. Signalons d'ailleurs qu'on peut déduire ces majorations directement de l'expression (10). Ainsi, pour tout réel positif ε, la fonction Θ_q, analytique sur $\underset{\sim}{C}^*$, est d'ordre inférieur à $(\varepsilon, \varepsilon)$ en $(\infty, 0)$. D'après (12), il en est de même de la fonction P_q.

Démonstration de la proposition 3. – Soit K le corps engendré sur $\underset{\sim}{Q}$ par les nombres $E_4(q)$, $E_6(q)$. Le point -1 est un point d'ordre 2 de $\underset{\sim}{C}^*/q^{\underset{\sim}{Z}}$ (il correspond au point $i\pi$ sur la courbe elliptique $\underset{\sim}{C}/\Lambda$), et l'on a :

$$[K(P_q(-1), DP_q(-1)) : K] \leq 3 .$$

Supposons alors que K soit un corps de nombres de degré δ sur $\underset{\sim}{Q}$, et choisissons $\varepsilon = 1/(16\delta)$. Les fonctions $f_1(Z) = Z$ et $f_2(Z) = P_q(Z)$ vérifient les hypothèses de la proposition 1 (lorsque c'est l'opérateur de dérivation $D=Z(d/dZ)$ qui est considéré (voir la remarque 1 suivant la proposition 1 et l'égalité (9)) avec $g = 1$, $a_0 = \infty$, $a_1 = 0$, $f_3(Z) = DP_q(Z)$, $(\mu)=(\varepsilon,\varepsilon)$, et $\lambda = 1$. En conséquence, on a

$$\nu_1 + \frac{\nu_2}{2} + \frac{\nu_3}{3} \leq \frac{4}{16\delta}.\delta \leq \frac{1}{4} ,$$

ce qui contredit le fait que l'ensemble $\bigcup_{d=1}^{3} \mathfrak{I}_d$ est non vide. Le corps K ne peut donc être un corps de nombres et la proposition 3 est démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRAND (D.). – Equations différentielles algébriques et nombres transcendants dans les domaines complexe et p-adique, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris-VI, 1975.

[2] BERTRAND (D.). – Séries d'Eisenstein et transcendance (en préparation).

[3] FRICKE (R.). - Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, volume 1. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1916.

[4] WALDSCHMIDT (M.). - Nombres transcendants. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).

(Texte reçu le 12 juin 1975)

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75230 PARIS CEDEX 05