SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

PHILIPPE ROBBA

Équations différentielles *p*-adiques. Croissance des solutions, factorisation, indice

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1974-1975), exp. nº 12, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 12, 14 p.

27 janvier 1975

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES. CROISSANCE DES SOLUTIONS, FACTORISATION, INDICE

par Philippe ROBBA

(d'après un travail en commun avec B. DWORK [11]).

Un résultat récent sur les équations différentielles p-adiques dû à B. DWORK et l'auteur [11] a permis d'améliorer des résultats obtenus précédemment par B. DWORK ([9], [10]) et l'auteur ([12], [13], [14]). Nous nous proposons de faire le point sur l'état des connaissances sur ce sujet. On trouvera une exposition plus détaillée dans [15], [16], [17] et [18].

1. Introduction.

Nous nous intéresserons essentiellement à trois types de propriétés : croissance des solutions de l'équation différentielle, réductibilité de l'opérateur différentiel associée à la croissance des solutions, et indice de l'opérateur différentiel dans divers espaces de fonctions. Nous indiquerons sur des exemples tirés de la géométrie algébrique pourquoi nous nous sommes intéressés à ces problèmes.

Les propriétés de l'opérateur différentiel L ne seront pas les mêmes dans toutes les classes résiduelles : il y aura les bonnes classes (où tout se passera bien) et les mauvaises. Nous allons construire de toutes pièces une classe résiduelle où tout se passera bien ; pour cette raison, elle s'appellera le disque générique. Le disque générique nous servira d'étalon, et toute une série de théorèmes établiront des comparaisons entre les propriétés de L dans les différentes classes et dans le disque générique. Notre ambition est de prouver que les mauvaises classes sont en nombre fini. Nous avons réussi à le montrer pour certaines propriétés de L , mais pas pour toutes.

Notons que, lorsque L est défini sur une union infinie de classes résiduelles, si l'on a démontré que les mauvaises classes (relativement à une propriété de L) étaient en nombre fini, on peut oublier le disque générique : L se comportera dans le disque générique comme L se comporte dans presque toutes (*) les classes résiduelles.

Cependant si L n'est défini que dans une seule classe résiduelle, l'introduction du disque générique devient essentielle : le caractère bon ou mauvais de notre classe ne pourra pas s'obtenir par comparaison avec les autres classes résiduelles, mais seulement par comparaison avec le disque générique. Autrement dit, les qualités d'un individu ne peuvent être définies de façon relative que dans une popula-

(*) Dorénavant "presque tous" signifiera "tous sauf un nombre fini".

tion infinie, sinon il faut disposer d'architypes platoniciens.

Un problème important est de déterminer les "mauvaises" classes. Nous n'aborderons pas ce problème, car il n'existe que des réponses fragmentaires.

Signalons pour terminer que les problèmes mentionnés n'ont en général pas de contrepartie en théorie complexe, et que, même si la question posée a un sens en complexes (propriété d'indice par exemple), les propriétés obtenues sont entièrement différentes. C'est dire que les méthodes utilisées sont purement p-adiques. Le résultat essentiel d'où découle toutes les autres propriétés est le théorème 4.2.

2. Définitions. Notations.

2.1. Soit K un corps de caractéristique zéro, complet pour une valuation ultramétrique. Soit Ω un corps algébriquement clos, complet pour une valuation, extension de la valuation sur K. Nous supposerons que Ω possède un élément t de module 1, dont l'image dans le corps résiduel de Ω est transcendant au-dessus du corps résiduel de K. Le point t sera appelé le point générique.

2.2. Comme d'habitude, on pose, pour $a \in \Omega$, r réel positif,

$$D(a, r^-) = \{x \in \Omega ; \ |x - a| < r\} ,$$

$$D(a, r^+) = \{x \in \Omega ; \ |x - a| \leqslant r\} .$$

Le disque $D(t, 1^-)$ sera appelé le disque générique.

On notera $\mathfrak{A}_a^r$ l'espace des fonctions analytiques dans le disque $D(a, r^-)$, et pour simplifier on écrira $\mathfrak{A}_a$ si $r = 1$.

Pour $f \in \Omega[[X - a]]$, $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (X - a)^\nu$, analytique dans $D(a, r^-)$, on pose, pour $\rho < r$,

$$|f|_a(\rho) = \sup_\nu |b_\nu| \rho^\nu .$$

On dira que f a une croissance logarithmique d'ordre α dans ce disque si

$$|f|_a(\rho) = O(1/[\log(r/\rho)]^\alpha) , \quad \rho < r .$$

L'espace vectoriel des fonctions analytiques de croissance logarithmique d'ordre α dans le disque $D(a, r^-)$ sera noté $W_a^{r,\alpha}$, et pour simplifier W_a^α si $r = 1$.

On notera que cet espace ne dépend que de $D(a, r^-)$ et non de a.

Ainsi $W_a^{r,0}$ représente les fonctions analytiques et bornées dans le disque $D(a, r^-)$. La fonction $\log x$ a une croissance logarithmique d'ordre 1 dans $D(1, 1^-)$.

2.3. Soit $A \subset \Omega$. Nous dirons que f est un élément analytique sur A à coefficients dans K si f est la limite uniforme sur A de fractions rationnelles à coefficients dans K sans pôles dans A. On notera $H(A)$ l'espace vectoriel des éléments analytiques sur A à coefficients dans K.

On posera $E = H(D(t , 1^-))$. Par suite de l'hypothèse faite sur le point générique t , les éléments de $K(x)$ ne s'annulent pas dans $D(t , 1^-)$ et donc, à la limite, les éléments de E (autres que la fonction nulle) ne s'annulent pas dans $D(t , 1^-)$. E est donc un corps. C'est pour cette raison que "tout se passe bien" dans le disque générique.

Si A est une union de classes résiduelles, on voit que tout élément de $H(A)$ se prolonge analytiquement dans le disque générique. L'espace $H(A)$ s'identifie donc avec un sous-espace vectoriel de E .

2.4. Nous noterons $\mathcal{O}_A = H(A)[D]$ (resp. $\mathcal{O} = E[D]$) , avec $D = d/dx$, l'anneau euclidien des polynômes différentiels à coefficients dans $H(A)$ (resp. dans E) .

Si $L \in \mathcal{O}_A$, on dira, par abus de langage, qu'une solution de l'équation $Lu = 0$ est une solution de L . Soit $a \in A$, l'espace des solutions de L au voisinage de a sera noté $\mathrm{Ker}_a\, L$.

Si $a \in A$ est un zéro du coefficient du terme de plus haut degré de L , on dira que a est une <u>singularité</u> de L , mais si alors $\dim \mathrm{Ker}_a\, L = \text{ordre } L$,on dira que a est une <u>singularité artificielle</u> de L . On dira que le disque $D(a,r^-) \subset A$ est singulier pour L s'il contient au moins une singularité non artificielle de L .

<u>Dans toute la suite de l'exposé,</u> A <u>désignera un sous-ensemble fixe de</u> Ω <u>qui est une union de classes résiduelles, et</u> L <u>désignera un élément fixe de</u> $\mathcal{O}_A$.

3. Croissance des solutions.

3.1. Montrons sur un exemple la signification de la croissance des solutions d'un opérateur différentiel. Dans [5], DWORK étudie d'un point de vue p-adique la famille de Legendre de courbes elliptiques :

$$Y^2 = Z(Z-1)(Z-x) \qquad (x \text{ est le paramètre}). \tag{3.1}$$

Les périodes de la différentielle de première espèce $\omega = dZ/2Y$ satisfont l'équation différentielle hypergéométrique.

$$x(1-x)u'' + (1-2x)u' - (1/4)u = 0 . \tag{3.2}$$

DWORK montre que la croissance des solutions de cette équation dans une classe résiduelle (en caractéristique 0) donne des renseignements sur les grandeurs des racines de la fonction zêta sur la courbe réduite (dans le corps résiduel). Plus précisément, les espaces de solutions de cette équation peuvent être utilisés comme modèle d'une cohomologie p-adique.

Nous allons expliquer la relation entre la croissance des solutions et les racines de la fonction zêta. Il existe une matrice de Frobenius $A(x)$ qui agit sur les solutions de (3.2). Cette matrice a les propriétés suivantes :

(i) C'est une 2×2 matrice dont les coefficients sont holomorphes sauf près de

0 , 1 , ∞ et sont bornés par 1 en dehors des classes résiduelles de 0 , 1 , ∞ .

(ii) Si u est solution de (3.2) dans un voisinage de a^p , alors

$$(3.3) \qquad (u(a^p)\ ,\ u'(a^p))A = (v(a)\ ,\ v'(a))$$

où v est une solution de (3.2) dans un voisinage de a .

(iii) Si $a^{p^\nu} = a$, alors en itérant ν fois cette application, on obtient un endomorphisme de l'espace des solutions au voisinage de a et le polynôme caractéristique de cet endomorphisme est le numérateur de la fonction zêta sur la courbe réduite $Y^2 = Z(Z - 1)(Z - \overline{a})$ (en tant que courbe sur $\underset{\sim}{F}_p(\overline{a})$).

Supposons pour simplifier que $\nu = 1$. Soit $(u\ ,\ u')$ un vecteur propre de cet endomorphisme associé à la valeur propre λ , et soit $\alpha = \mathrm{ord}_p\,\lambda$. On déduit de (3.3) et de (i) que, pour r proche de 1 ,

$$|u|_a(r) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\ |u|_a(r^p)\ .$$

De cette relation et du fait que $|\lambda| = p^{-\alpha}$, on déduit facilement que

$$|u|_a(r) = O(1/|\log r|^{\alpha})$$

ce qui exprime que u a une croissance d'ordre α dans $D(a\ ,\ 1^-)$.

3.2. DWORK conjecture que, d'une façon générale, une opération de Frobenius peut être attachée à une équation différentielle. (Voir [8] pour une formulation complète de cette conjecture.) Une conséquence de cette conjecture est que l'on peut obtenir une estimation de la croissance des solutions d'une équation différentielle. La conjecture n'a pas été démontrée dans le cas général, mais la conséquence oui.

3.3. THÉORÈME ([9], [11]). - Soit $D(a\ ,\ 1^-) \subset A$, et soit n l'ordre de L . Si L a n solutions, analytiques dans $D(a\ ,\ 1^-)$, linéairement indépendantes, ces solutions ont une croissance logarithmique d'ordre $n - 1$.

3.4. Pour démontrer ce théorème, on utilise un résultat intéressant par lui-même.

PROPOSITION. - Soit $\Delta = D(a\ ,\ 1^-) \subset A$, et supposons que Δ ne soit pas singulier pour L . Si toutes les solutions de L au voisinage de t convergent dans le disque générique et y ont une croissance logarithmique d'ordre α , alors toutes les solutions de L au voisinage de a convergent dans Δ et y ont une croissance logarithmique d'ordre α .

3.5. Exemple : Reprenons l'équation (3.2) considérée au §3.1. Cette équation admet, mod p , la solution

$$g(\overline{x}) = \sum_{j=0}^{(p-1)/2}((\tfrac{1}{2})_j/j!)^2\ \overline{x}^j\ ,\ \text{avec}\ \ (\theta)_j = \begin{cases} 1 & \text{pour}\ \ j = 0\ . \\ \prod_{n=0}^{j-1}(\theta + n) & \text{pour}\ \ j > 0\ . \end{cases}$$

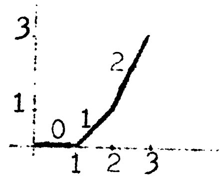
On dit que le disque $D(a\ ,\ 1^-)$, $|a| \leqslant 1$, est supersingulier si $g(\overline{a}) = 0$. Dans les disques non supersinguliers (3.2) possède une solution bornée et une solution de croissance logarithmique d'ordre 1 . Dans les disques supersinguliers toutes les solutions (non nulles) ont une croissance logarithmique d'ordre $1/2$.

3.6. Nous allons définir un polygone de Newton associé à la filtration des solutions de L définie par la croissance au bord de ces solutions.

Supposons que nous soyons dans les conditions d'application du théorème 3.3. Pour $\alpha > 0$, considérons l'application

$$\alpha \longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}_a\, L \cap W_a^{\alpha}) \ .$$

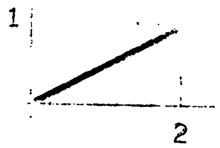
Soient $\alpha_0 , \ldots , \alpha_k$ les points de discontinuité de cette fonction, et $s_0,\ldots,s_k$ les sauts en ces points. Considérons le polygone dont les côtés successifs ont une pente α_i et une projection sur Ox égale à s_i . On démontre que, dans le disque générique, le polygone de L se trouve en-dessous du polygone correspondant au cas $\alpha_i = i$, $s_i = 1$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ (fig. 1)



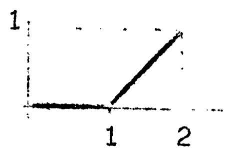
(fig. 1)

Conjecture [9] : Le polygone de L , relatif au disque $D(a\ ,\ 1^-)$, se trouve au-dessus du polygone de L relatif au disque générique.

Par exemple, pour l'opérateur considéré en 3.5, on a



dans les disques supersinguliers



dans les disques non supersinguliers

Des résultats de ce genre, dans les cas provenant de la cohomologie, sont dénommés "conjecture de Katz". Ils apparaissent comme des estimations sur la distribution des zéros et des pôles de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini [2].

3.7. Le résultat suivant exprime que la conjecture est vraie pour le premier côté du polygone, à savoir le côté de pente 0 .

THÉORÈME [10]. - Soit $D(a\ ,\ 1^-) \subset A$. On a

$$\dim(\mathrm{Ker}_a\, L \cap W_a^0) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^0) \tag{3.3}$$

(on ne suppose pas que l'on soit dans les conditions d'application du théorème 3.3).

3.8. Le théorème précédent compare la dimension du noyau borné de L dans les différentes classes résiduelles. Le théorème suivant nous renseigne sur l'existence de ce noyau borné.

THÉORÈME [9]. - Si L possède une solution méromorphe dans une classe résiduelle de A, le noyau borné de L dans le disque générique n'est pas trivial (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^0 \neq \{0\}$).

3.9. Le fait pour u d'être un élément analytique sur une classe résiduelle ou le rayon de convergence de u, sont des propriétés sur la régularité de u analogues à sa croissance au bord. Les deux théorèmes suivants (du type du théorème 3.7) ont donc leur place dans cette section.

THÉORÈME. - Soit $D(a\,,\,1^-)$ une classe résiduelle de A. On a

$$\dim(\mathrm{Ker}_a\, L \cap H(D(a\,,\,1^-))) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap H(D(t\,,\,1^-)) \,. \tag{3.4}$$

Si les coefficients de L sont des polynômes, alors (3.4) est une égalité pour presque toutes les classes résiduelles de A.

La première partie du théorème est triviale, mais la seconde l'est moins, et la propriété n'est pas connue dans le cas général. En fait, on démontre un peu plus [12] : si $L \in K[x][D]$, et si u est un élément analytique dans une classe résiduelle, alors u se prolonge dans presque toutes les classes où Lu se prolonge.

3.10. THÉORÈME [11]. - Soit $D(a\,,\,1^-)$ une classe résiduelle de A. On a

$$\dim(\mathrm{Ker}_a\, L \cap \mathfrak{a}_a) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{a}_t) \,, \tag{3.5}$$

l'égalité étant réalisée dans presque toutes les classes résiduelles. Si

$$\mathrm{Ker}_t\, L \subset \mathfrak{a}_t$$

(ce qui signifie que $\dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{a}_t) =$ ordre de L), alors l'égalité est réalisée dans toutes les classes résiduelles non singulières pour L.

Ce théorème est un exemple typique du genre de théorème où l'on peut supprimer toute référence au disque générique. Ainsi la fin du théorème peut s'énoncer : Si, dans la classe résiduelle $D(a\,,\,1^-)$, L a n (= ordre de L) solutions analytiques linéairement indépendantes, il en est de même dans toute autre classe résiduelle non singulière pour L.

Les classes où (3.5) n'est pas une égalité sont des mauvaises classes dans le sens indiqué dans l'introduction. Cette condition jouera d'ailleurs un rôle dans les propriétés d'indice de L (théorème 5.4). Par ailleurs, les classes singulières pour L ne doivent pas être pénalisées par le fait qu'il existe des solutions de L méromorphes dans cette classe. Si l'on désigne par $\mathrm{mer}\ \mathrm{Ker}_a\, L$ l'ensemble des solutions de L méromorphes dans le disque $D(a\,,\,1^-)$, alors le théorème 3.10 reste vrai si l'on remplace (3.5) par

(3.5 bis) $\dim(\text{mer Ker}_a L) \leqslant \dim(\text{Ker}_t L \cap \mathfrak{A}_t)$.

On verra au §4.5 un exemple d'opérateur pour lequel (3.5) n'est pas une égalité dans une classe non-singulière pour L .

4. Réductibilité de L associée aux propriétés de croissance de son noyau.

4.1. Pour l'équation différentielle hypergéométrique considérée en 3.1 et 3.5, la filtration des solutions suivant leur croissance a un caractère global. Précisons ce que nous voulons dire. On a vu que dans une classe non supersingulière $D(a , 1^-)$, L a une seule solution bornée (à un facteur près). Soient u_a et u_b les solutions bornées de L dans les classes non supersingulières $D(a , 1^-)$ et $D(b , 1^-)$. Comme u_a et u_b ne sont pas des éléments analytiques dans ces classes, ça n'a pas de sens de dire que u_a et u_b se prolongent mutuellement (cette affirmation doit être tempérée par les résultats de CHRISTOL sur le prolongement des éléments algébriques [19]). Mais on montre [5] que u_a'/u_a et u_b'/u_b se prolongent analytiquement. Autrement dit, il existe $R = D - \eta \in \mathfrak{D}_B$, où B est la réunion des disques nonsupersinguliers, tel que, si $D(a , 1^-) \subset B$

$$\text{Ker}_a R = \text{Ker}_a L \cap W_a^0 .$$

On souhaite généraliser ce résultat à toutes les équations différentielles. Cette généralisation n'a pas encore été obtenue, mais une étape importante a déjà été franchie dans cette direction : on a montré que ce résultat était vrai dans le disque générique (et pas seulement pour les solutions bornées, mais aussi pour les solutions avec une croissance donnée) (théorème 4.2). Par contre, si au lieu de considérer le noyau borné de L dans une classe $(\text{Ker}_a L \cap W_a^0)$, on considère le noyau de L dans cette classe $(\text{Ker}_a L \cap \mathfrak{A}_a)$, alors on démontre le résultat espéré, et on obtient même un peu plus (théorème 4.4).

4.2. Soit $L \in \mathfrak{D}$. Munissons les éléments de $\mathfrak{D}$ de la norme d'opérateur linéaire de $W_t^{r,\alpha}$ dans lui-même $(0 < r \leqslant 1 , \alpha \geqslant 0)$. La fermeture $\overline{\mathfrak{D}L}$ de l'idéal à gauche $\mathfrak{D}L$ pour cette topologie est un idéal de $\mathfrak{D}$. Comme $\mathfrak{D}$ est euclidien, $\overline{\mathfrak{D}L}$ possède un unique générateur unitaire R .

THÉORÈME [13]. - <u>Soit</u> $L \in \mathfrak{D}$. <u>Soit</u> R <u>le générateur unitaire de</u> $\overline{\mathfrak{D}L}$ <u>(défini précédemment). On a</u>

$$\text{Ker}_t R = \text{Ker}_t L \cap W_t^{r,\alpha} .$$

(Le noyau de R au voisinage de t est formé des solutions de L ayant une croissance logarithmique d'ordre α dans le disque $D(t , r^-)$.)

4.3. Le caractère global que nous espérons associer à cette factorisation de L se traduit par la conjecture suivante.

CONJECTURE. - <u>Soit</u> $L \in \mathfrak{D}_A$. <u>Alors les coefficients de</u> R , <u>défini au théorème</u>

4.2, se prolongent analytiquement dans presque toutes les classes résiduelles de A . (ou encore : il existe un sous-ensemble B de A , contenant presque toutes les classes résiduelles de A , tel que $R \in \mathcal{O}_B$).

4.4. On déduit immédiatement du théorème 4.2. que, si $0 < r \leq 1$ et $L \in \mathcal{O}$, il existe $R \in \mathcal{O}$, R unitaire, tel que $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t^r = \mathrm{Ker}_t\, R$. Pour cet opérateur R , la conjecture 4.3 est démontrée, et l'on obtient même un peu plus.

THÉORÈME [11]. - Soit $L \in \mathcal{O}_A$, et soit $r \in]0 , 1]$. Soit R unitaire, appartenant à $\mathcal{O}$, tel que $\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t^r$. Alors il existe un sous-ensemble B de A , où B est l'ensemble A privé d'un nombre fini de disques de rayons strictement inférieurs à 1 , tel que R appartienne à $\mathcal{O}_B$.

4.5. Ce théorème exprime que, non seulement les coefficients de R se prolongent dans presque toutes les classes résiduelles de A , mais dans les autres classes ces coefficients se prolongent dans une couronne de la forme

$$\Delta = D(a , 1^-) - D(a , \rho^-) , \quad 0 < \rho < 1 .$$

On ne peut pas en espérer autant dans le cas du noyau borné (conjecture 4.3). Considérons en effet l'exemple de l'équation différentielle hypergéométrique (3.2). On a vu que dans un disque supersingulier $D(a , 1^-)$ aucune solution de L n'est bornée, donc dans une couronne de la forme Δ toute solution de L a une infinité de zéros et donc L ne peut pas être réductible dans $\mathcal{O}_\Delta$.

4.6. Il n'est pas possible d'améliorer le théorème 4.4. Même si L a ses coefficients polynomiaux, il peut arriver que l'opérateur R , défini au théorème 4.4, n'ait pas ses coefficients fractions rationnelles. C'est ce que montre l'exemple suivant, indiqué par MONSKY. Soit

$$L = pxD^2 + (1 - x)D - c , \qquad c \in \mathbb{Z}_p , \quad c \notin -\mathbb{N} .$$

Une des solutions de $Lu = 0$ dans $D(0 , 1^-)$ est la fonction $\Phi(c , \frac{1}{p} , \frac{x}{p})$ où $\Phi(c , d , x) = \sum_{k=0}^{\infty} ((c)_k\, x^k)/((d)_k\, k!)$ est la fonction confluente hypergéométrique. Cette solution appartient à $\mathcal{A}_0$, mais le wronskien au point générique t a un rayon de convergence strictement inférieur à 1 . Il résulte donc du théorème 3.10 que $\dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t) = 1$. Cependant L est irréductible dans $\mathbb{C}_p(x)[D]$.

Une solution formelle de L est donnée par

$$u = (1 - x)^{-c}\, V$$

avec $V = \sum_{m=0}^{\infty} 1/(x - 1)^m\, B_m\, (c)_m$, la fonction génératrice, $v(s) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m\, s^m$, des B_m étant $u(s) = (1 + ps)^{-1-c} \exp[- s + \frac{1}{p} \log(1 + ps)]$. On vérifie que V converge pour $|x - 1| > r$, où r est strictement inférieur à 1 .

En choisissant une détermination convenable de $(1 - x)^{-c}$ dans le disque générique, on obtient ainsi la solution u de L analytique dans $D(t , 1^-)$. On voit alors que $\eta = \frac{u'}{u} = \frac{V'}{V} + \frac{c}{1 - x} \in H(B)$, où B est de la forme indiquée dans le théorème 4.4.

4.7. Dans le cas $r = 1$, on peut relier le théorème 4.4 avec le théorème 3.10.

THÉORÈME. - Soit B l'union des classes résiduelles de A pour lesquelles (3.5) (resp. (3.5 bis)) est une égalité. Alors il existe $R \in \mathcal{O}_B$ tel que, si $D(a, 1^-) \subset B$, on a

$$\mathrm{Ker}_a R = \mathrm{Ker}_a L \cap \mathfrak{A}_a$$

(resp. $\mathrm{Ker}_a R = \mathrm{mer}\,\mathrm{Ker}_a L$, en supposant a non singulier pour R).

4.8. Par esprit de système, mentionnons le corollaire immédiat du théorème 3.9.

THÉORÈME. - Supposons que les coefficients de L sont des polynômes. Soit B l'union des classes résiduelles pour lesquelles (3.4) est une égalité. Il existe $R \in \mathcal{O}_B$ tel que, si $D(a, 1^-) \subset B$, on a

$$\mathrm{Ker}_a R = \mathrm{Ker}_a L \cap H(D(a , 1^-)) .$$

5. Indice.

5.1. Dans [3], DWORK définit un complexe de Koszul, et il doit démontrer que certains espaces quotients du type $H^0 = W/\sum_{i=1}^n L_i W$, où W est un espace de fonctions bornées sur un polydisque et les L_i sont des opérateurs aux dérivées partielles, est un espace de dimension finie. Les opérateurs L_i sont définis à partir d'un certain polynôme homogène f , et DWORK ne pouvait démontrer la finitude que sous des hypothèses très restrictives sur f .

Plus tard, [4], il esseya de généraliser à une classe plus générale de polynômes f . Pour cela il considéra une famille f_λ , dépendant d'un paramètre λ , telle que $f_0 = f$, et étudia la variation du complexe de Koszul avec λ . Il démontra que la fermeture (dans W) de $\sum L_i W$ est de codimension finie, pour p assez grand (p = caractère du corps résiduel $\overline{K}$) . On doit donc supposer que f a ses coefficients dans un corps de nombres algébriques, et on obtient alors la propriété de finitude pour presque toutes les valuations p-adique de ce corps (Comme on le voit, la situation n'est pas entièrement satisfaisante).

5.2. Soit L un endomorphisme de l'espace vectoriel W . On dit que L a un indice si $\dim \mathrm{Ker}\, L < +\infty$.

L'indice de L est alors $\chi(L) = \dim \mathrm{Ker}\, L - \dim \mathrm{coker}\, L$.

Lorsque W est un espace de fonctions analytiques, et L est un opérateur, on a toujours $\dim \mathrm{Ker}\, L \leq \mathrm{ordre}\, L$. Dire que L a un indice signifie alors simplement que son image est de codimension finie.

5.3. Dans l'exemple mentionné en 5.1 on considère des fonctions de plusieurs variables et des opérateurs aux dérivées partielles, alors qu'à partir de maintenant nous n'allons considérer que des opérateurs différentiels.

Signalons que, en connection avec la variation du complexe de Koszul mentionnée en 5.1, DWORK a été amené à étudier les indices d'opérateurs différentiels.

Par ailleurs dans son étude par l'analyse p-adique des polynômes de Hecke, ADOLPHSON a été amené à calculer explicitement l'indice de certains opérateurs différentiels [1], la signification de ces indices ayant été mise en évidence par DWORK [7].

5.4. THEOREME [11], [13]. - Soit $D(a, 1^-) \subset A$. Si, pour ce choix de a, (3.5) est une égalité, L, en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{Q}_a$, a un indice. Pour presque toutes les classes résiduelles $D(a, 1^-)$ de A, L est surjectif dans $\mathcal{Q}_a$.

On voit ici une nouvelle propriété de L pour laquelle les bonnes classes sont les classes où (3.5) est une égalité. Observons que si $\dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{Q}_t) = 0$, (3.5) est une égalité pour toutes les classes résiduelles.

S'il est assez naturel que L n'ait pas d'indice dans $\mathcal{Q}_a$ lorsque $D(a, 1^-)$ est une classe singulière pour L, il est par contre tout à fait surprenant que cela puisse se produire dans une classe non singulière pour L (exemple 5.6).

5.5. Exemple [13]. Considérons l'opérateur $L = xD + c$. Si $c \notin \mathbb{Z}_p$, un calcul direct montre que $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{Q}_t = \{0\}$. Il résulte donc de la remarque faite précédemment que L a un indice dans $\mathcal{Q}_a$ dans toutes les classes résiduelles $D(a, 1^-)$.

Si $c \in \mathbb{N}$ on voit sans peine que $\mathrm{Ker}_t\, L \subset \mathcal{Q}_t$; on en déduit (par passage à la limite, voir [13]) que le résultat est encore vrai si $c \in \mathbb{Z}_p$. D'après les théorèmes 3.10 et 5.4 on en déduit que L a un indice dans $\mathcal{Q}_a$ pour toutes les classes non singulières, c'est-à-dire pour $D(a, 1^-) \neq D(0, 1^-)$. Dans le disque $D(0, 1^-)$ le résultat dépend de la nature arithmétique de a : L a un indice dans $\mathcal{Q}_0$ si, et seulement si, $\lambda = \liminf_{m\to+\infty} |a+m|^{1/m} = 1$.

Si $\lambda < 1$, c'est que a a beaucoup de zéros dans son développement p-adique : c'est un nombre de Liouville p-adique.

5.6. Considérons l'exemple 4.6. Il résulte de l'étude faite en 4.6, du théorème 4.7 et du théorème 5.4, que L a un indice dans $\mathcal{Q}_a$ pour toutes les classes résiduelles $D(a, 1^-) \neq D(1, 1^-)$. Le disque $D(1, 1^-)$, où η (défini en 4.6) ne se prolonge pas, pose un problème particulier. Mais la forme particulière de η permet de traiter ce cas. Posons

$$\lambda_+ = \liminf_{m\to+\infty} |c+m|^{1/m} ,$$

$$\lambda_- = \liminf_{m\to+\infty} |c-m|^{1/m} .$$

On montre [11] que si $\lambda_+ = \lambda_{-1} = 1$, alors L a un indice dans $\mathcal{Q}_1$. Mais si

$\lambda_+ < 1$ et $\lambda_- = 1$, alors L n'a pas d'indice dans $\mathfrak{A}_1$. On observera que L n'a pas de singularités dans la classe $D(1 , 1^-)$.

5.7. Ainsi qu'il apparaît par l'exemple 5.1, il ne faut pas seulement s'intéresser à l'existence d'un indice pour L dans des espaces de fonctions analytiques dans un disque, mais aussi dans des espaces de fonctions analytiques bornées. Ici apparaît tout de suite une restriction sur L .

PROPOSITION [13]. - <u>Supposons que le corps résiduel</u> $\overline{K}$ <u>ait une caractéristique</u> $p \neq 0$. <u>Si</u> L <u>n'est pas injectif dans</u> $W_a^{\rho,0}$ (<u>c'est-à-dire</u> L <u>a une solution analytique bornée dans</u> $D(a , \rho^-)$), <u>alors</u> L <u>n'a pas d'indice dans</u> $W_a^{\rho,0}$.

Comme nous nous intéressons principalement au cas $p \neq 0$, il nous faut donc faire des hypothèses d'injectivité sur L . On supposera que L est "génériquement injectif", c'est-à-dire que L est injectif dans W_t^0 . En vertu du théorème 3.8, ceci équivaut à supposer que L est injectif dans $\mathfrak{A}_t$.

5.8. THÉORÈME ([13], [14]). - <u>Supposons que</u> $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t = \{0\}$. <u>Il existe</u> $r < 1$ <u>tel que, pour tout</u> $a \in A$, $|a| \leq 1$, <u>tout</u> $\alpha \geq 0$ <u>et tout</u> $\rho \in (r , 1)$, L <u>est injectif et a un indice dans</u> $W_a^{\rho,\alpha}$ (resp. $\mathfrak{A}_a^\rho$) . <u>Si</u> $B \subset A \cap D(0 , 1^+)$ <u>et</u> $d(B , \complement B) \geq r$, L <u>est injectif</u> <u>et a un indice dans</u> $H(B)$.

On peut généraliser au cas où $|a| > 1$ (ou encore $B \cap \complement D(0 , 1^+) \neq \emptyset$), mais il faut introduire une métrique appropriée dans la classe résiduelle de ∞ . On peut aussi montrer qu'il existe une famille finie de disques $\Delta_1 , \ldots , \Delta_k$, contenus dans A , de diamètres $< r$, et des entiers $\chi_1 , \ldots , \chi_k$ associés tels que l'indice de L dans $W_a^{\rho,\alpha}$ ou $\mathfrak{A}_a^\rho$ (resp. $H(B)$) soit la somme des χ_j correspondant aux indices j pour lesquels $\Delta_j \subset D(a , \rho^-)$ (resp. $\Delta_j \subset B$) . (On notera que l'on a : soit $\Delta_j \subset D(a , \rho^-)$ (resp. B) , soit $\Delta_j \subset \complement D(a , \rho^-)$ (resp. $\complement B$)).

5.9. Mentionnons que la connaissance de l'indice de L dans divers espaces permet de démontrer des propriétés de régularité sur la solution u de l'équation $Lu = v$ (propriétés du type : croissance, prolongement analytique). Ces propriétés de régularité sont obtenues grâce au théorème suivant.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> V <u>un espace vectoriel métrique complet, et soit</u> U <u>un sous-espace vectoriel dense dans</u> V . <u>Soit</u> L <u>un endomorphisme continu de</u> V <u>qui envoie</u> U <u>dans lui-même. Supposons que</u> L <u>ait des indices dans</u> U <u>et dans</u> V , <u>et que ces indices soient égaux. Alors si</u> $u \in V$ <u>et</u> $Lu \in U$, <u>on a</u> $u \in U$.

5.10. <u>Exemple</u> : Nous allons donner un exemple pour lequel il est possible de déterminer la valeur du nombre r apparaissant dans le théorème 5.8 ainsi que l'indice de L .

Soit $L = D - 1$. Le rayon de convergence de la fonction $\exp(x - t)$ étant $p^{-1/(p-1)}$, on a $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t = \{0\}$. On est donc dans les conditions d'application du théorème 5.8. On montre [14] que l'on peut choisir pour r n'importe quel nombre de l'intervalle $]p^{-1/(p-1)}, 1[$. De plus l'indice de L (sous les hypothèses du théorème 5.8) est toujours 0 (c'est-à-dire que L est surjectif).

Les propriétés de régularité mentionnée en 5.9 sont du type suivant : Si u converge dans le disque $D(a, r^-)$ avec $r > p^{-1/(p-1)}$ et si $u' - u$ converge dans $D(a, \rho^-)$ avec $\rho > r$, alors u aussi converge dans $D(a, \rho^-)$.

5.11. Plus généralement, soit $L = D - c(x)$ avec $c(x) \in K[x]$, $\deg c = n$. On vérifie sans peine que, pour $|c|_{Gauss} > p^{-1/(p-1)}$, on a $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t = \{0\}$. On montre alors [14] que le théorème 5.8 s'applique avec r quelconque satisfaisant $(1/|c|^{1/(n+1)})p^{-1/(n+1)(p-1)} < r < 1$. Mais on ne peut plus affirmer que l'indice de L est nul (on sait obtenir des estimations de l'indice de L dépendant de r).

6. Autres problèmes.

Outre les conjectures mentionnées, il serait intéressant de résoudre les problèmes suivants.

6.1. Prolongeabilité des solutions d'un système différentiel. - Les coefficients de l'opérateur différentiel R, qui apparaît dans la conjecture 4.3, vérifient un système différentiel non linéaire. La conjecture 4.3 est donc une conséquence de la conjecture suivante (ou plutôt d'une généralisation appropriée aux systèmes).

CONJECTURE. - *Soit* $P(u_0, \ldots, u_n)$ *un polynôme à* $n+1$ *variables et à coefficients dans* $H(A)$. *Soit* $y \in E$ *une solution de l'équation* $P(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. *Alors* y *se prolonge analytiquement dans presque toutes les classes résiduelles de* A.

Cette conjecture a été démontrée dans certains cas particuliers (c'est précisément ainsi que l'on a démontré le théorème 4.4).

Elle est également démontrée lorsque P est de degré total 1 et a ses coefficients dans $K[x]$ (c'est le résultat mentionné après le théorème 3.9). Une étape importante dans la démonstration de cette conjecture serait de résoudre le cas où P est de degré total 1 avec ses coefficients éléments analytiques.

6.2. Systèmes différentiels. Equations aux dérivées partielles.

6.2.1. Considérons une famille paramétrée de courbes non singulières de genre g en caractéristique p telle que

(i) la matrice de Hasse-Witt est génériquement de rang g,

(ii) chaque différentielle de seconde espèce est, modulo les différentielles exactes, égale à une somme $\omega + \nu$ où ω est une différentielle de première espèce et ν est la dérivée par rapport au paramètre d'une différentielle de première espèce. (Cette condition él mine la possibilité d'une famille "constante"). Remontons cette famille en caractéristique zéro sans changer le genre et considérons le système d'équations différentielles satisfait par les périodes de rg différentielles indépendantes de seconde espèce sur la courbe générique de la famille remontée. Il résulte des travaux de DWORK [6] que sur presque toutes les classes résiduelles, la dimension de l'espace des solutions bornées est précisément g et que ce sous-espace est l'espace des solutions d'un système de g équations différentielles du premier ordre définies sur le corps des fonctions méromorphes sur le domaine de Hasse, c'est-à-dire sur toutes les classes résiduelles sauf celles où la matrice de Hasse-Witt a un rang plus petit que g.

L'exemple considéré en 3.1 n'est qu'un cas particulier de cette situation générale. Ceci démontre l'importance de généraliser les résultats des paragraphes 3 et 4 au cas des systèmes. Comme la théorie des facteurs invariants permet de ramener l'étude d'un système à celui d'une équation différentielle, il ne devrait pas y avoir de difficultés dans cette direction. Cependant on ne voit pas ce que deviendrait l'idéal $\overline{\mathfrak{O}L}$ (qui jouait un rôle important dans le cas des opérateurs) dans l'optique des systèmes.

6.2.2. L'exemple mentionné en 5.1 nous dispense d'insister sur l'importance de généraliser les propriétés du paragraphe 5 au cas des équations aux dérivées partielles.

Remarquons cependant que l'anneau $E[D_1, \ldots, D_n]$ avec E = complété de $K(x_1, \ldots, x_n)$ et $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, n'est pas euclidien. Il est donc vraissemblable que l'introduction d'idéaux d'opérateurs, qui n'intervenait que comme une étape dans la démonstration du théorème 4.2, se révèlera essentielle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADOLPHSON (A. C.). - A p-adic theory of Hecke polynomials, Thesis, Princeton University, 1974.

[2] BERTHELOT (P.). - Valuation p-adique des zéros et pôles de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini, Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 7-21.

[3] DWORK (B.). On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 5-68).

[4] DWORK (B.). - On the zeta function of a hypersurface, III, Annals of Math., Series 2, t. 83, 1966, p. 457-519.

[5] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 37, p. 27-115.

[6] DWORK (B.). - Normalized period matrices, I, Annals of Math., Series 2, t. 94, 1971, p. 337-388.

[7] DWORK (B.). - On Hecke polynomials, Inv. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 249-256.

[8] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, I, Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 27-37.

[9] DWORK (B.). - On p-adic differential equation, II, Annals of Math., Series 2, t. 98, 1973, p. 366-376.

[10] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, III , Invent. Math., Berlin, t. 20, 1973, p. 35-45.

[11] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic fifferential equations (à paraître).

[12] ROBBA (P.). - Prolongement des solutions d'une équation différentielle p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 153-154.

[13] ROBBA (P.). - On the index of p-adic differential operators, I, Annals of Math., Series 2, t. 101, 1975.

[14] ROBBA (P.). - On the index of p-adic differential operators, II (à paraître).

[15] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 1, 15 p.

[16] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 2, 14 p.

[17] ROBBA (P.). - Factorisation d'un opérateur différentiel, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 2.

[18] ROBBA (P.). - Factorisation d'un opérateur différentiel, applications, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 10.

[19] CHRISTOL (G.). - Eléments algébriques, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 10, 7 p.

(Texte reçu le 30 janvier 1975)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS