Michel Bruneau

Comportement local des fonctions et approximation sur le tore

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1974-1975), exp. n° 5, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 5, 10 p.

25 novembre 1974

COMPORTEMENT LOCAL DES FONCTIONS ET APPROXIMATION SUR LE TORE

par Michel BRUNEAU

Au cours de deux exposés que je fais actuellement dans le cadre du Séminaire d'Initiation à l'Analyse, j'essaye de mettre en évidence le lien entre l'étude des fonctions de variable réelle et la théorie de la mesure. Ici, je voudrais éclairer une autre facette de l'étude des fonctions de variable réelle : le lien profond entre le comportement local des fonctions et certains problèmes de répartition modulo 1 . Ce lien nous est apparu pour la première fois dans notre thèse [1] (Juin 1970, Strasbourg) ; il est également le thème central du chapitre III de "variation totale d'une fonction" [4], mais la plupart des résultats dont nous disposons dans cette direction ont moins de six mois.

A vrai dire, on nous le reprochera peut-être, il ne nous est pas possible de présenter ici une véritable théorie, mais seulement de montrer, sur quelques exemples, que nous détenons un précieux outil de recherche qui, mieux utilisé que nous ne l'avons fait jusqu'ici, peut encore fournir de nombreux résultats.

1. Approximation par une suite Λ .

(a) Suites numériques associées à une fonction. - Pour simplifier, nous ne considérons ici que des fonctions numériques réelles, périodiques, de période 1 , c'est-à-dire définies sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. D'une façon assez générale, on peut dire qu'étant donnée une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, il existe une suite croissante $\Lambda = (\lambda_k)$ de nombres réels, "enregistrant" convenablement les variations de f , en ce sens que, $\{.\}$ désignant la partie fractionnaire, la restriction de la fonction

$$(1) \qquad (x , y) \to |f(y) - f(x)|$$

à l'ensemble des couples $(\{\lambda_k\} , \{\lambda_{k+1}\})$ $(k \in \mathbb{N})$ rende compte suffisamment des valeurs prises par (1). Etant donnée une telle suite Λ , le comportement de f au voisinage d'un point x de $\mathbb{T}$ dépendra assez précisément de la manière dont x sera approché (mal, bien, très bien, ... nous allons préciser ces qualificatifs), par les parties fractionnaires des points de la suite Λ ; en d'autres termes par la suite Λ "enroulée" sur le tore.

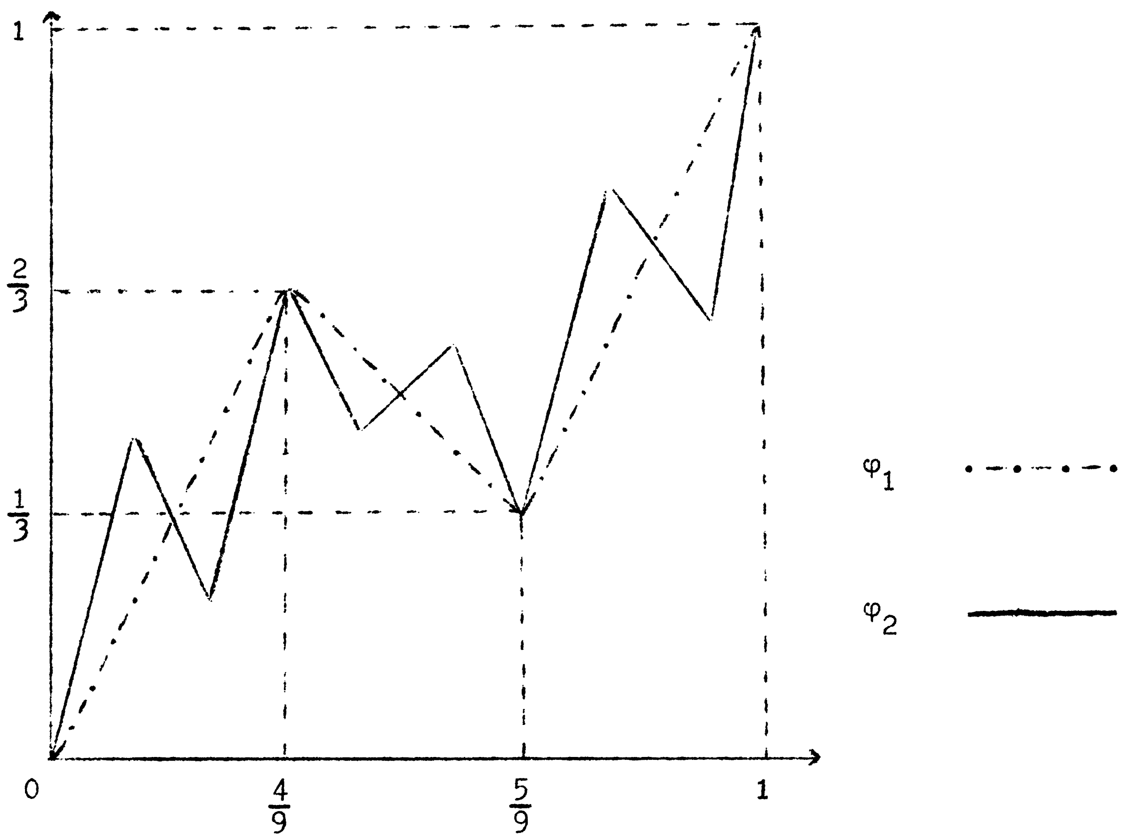
(b) Un exemple de fonction continue, nulle part dérivable. - Nous préférons donner d'abord un exemple. Soit T la transformation définie sur l'espace des fonctions $\varphi : [0 , 1] \to [0 , 1]$ par

$$(2)\qquad \begin{aligned} (T(\varphi))\left(\frac{4\lambda}{9}\right) &= \frac{2}{3}\,\varphi(\lambda) \\ (T(\varphi))\left(\frac{4+\lambda}{9}\right) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\varphi(\lambda) \\ (T(\varphi))\left(\frac{5+4\lambda}{9}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\varphi(\lambda)\ , \end{aligned}$$

où $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Si l'on désigne par φ_0 l'application identique $x \longrightarrow x$ de $[0\ ,\ 1]$ sur lui-même

$$\varphi_n = T^n(\varphi_0)\ , \qquad (n \in \underset{\sim}{N})$$

est une suite de fonctions continues, convergeant uniformément vers une fonction continue φ, qui n'est dérivable en aucun point. Sur le graphique ci-dessous nous nous contentons de représenter les fonctions φ_1 et φ_2.



$\|\cdot\|$ désignant la distance à l'entier le plus proche, nous allons nous intéresser à la fonction $f = \|\varphi\|$ que nous considérons comme application de $\underset{\sim}{T}$ dans $\underset{\sim}{R}$.

Si une suite croissante $\Lambda = (\lambda_k)$ de nombres réels, tendant vers $+\infty$, est considérée "modulo 1", autrement dit est "enroulée" sur le tore, elle est complètement déterminée par les suites s_n $(n \in \underset{\sim}{N})$ qu'elle décrit. Ainsi, nous appelons suite triadique la suite $\Lambda_3 = (\lambda_k)$ dont la n-ième spire est

$$(3)\qquad s_n = \{jz^{-n}\ ;\ 0 \leqslant j < z^n\}\ ,$$

et désignons par $\Lambda_{(4/9,5/9)}$ la suite (associée comme nous allons le voir à f), qui se déduit de Λ_3 par homéomorphisme, dont les spires sont

$$s_1 = \left(0\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{5}{9}\ ,\ 1\right)$$
$$s_2 = \left(0\ ,\ \frac{16}{81}\ ,\ \frac{20}{81}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{40}{81}\ ,\ \frac{41}{81}\ ,\ \frac{5}{9}\ ,\ \frac{61}{81}\ ,\ \frac{65}{81}\ ,\ 1\right)\ , \text{etc.}$$

La fonction f vérifie la condition de Lipschitz

(4) $$|f(y) - f(x)| \leqslant |y - x|^{1/2} ,$$

d'où la continuité. Par ailleurs, $\underset{\sim}{T}$ étant identifié à $[0 , 1[$,

(5) $$\overline{\lim}_{y\leq x\leq z, 0<|z-y|\to 0} \frac{|f(z) - f(y)|}{|z - y|^{1/2}} = 1 \qquad (x \in \underset{\sim}{T}) ,$$

d'où la non-dérivabilité. Il faut remarquer que (5) reste vrai si (y , z) parcourt seulement l'ensemble des couples $(\{\lambda_k\} , \{\lambda_{k+1}\})$ $(k \in \underset{\sim}{N})$, où (λ_k) est la suite $\Lambda_{(4/9,5/9)}$. Etudions maintenant la limite supérieure

(6) $$\gamma(x) = \overline{\lim}_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^{1/2}} \qquad (x \in \underset{\sim}{T}) .$$

On déduit de (4) et (5) que

(7) $$1/2 \leqslant \gamma(x) \leqslant 1 \qquad (x \in \underset{\sim}{T}) ;$$

par ailleurs $\gamma(x) = 1$ en tout point de la suite $\Lambda_{(4/9,5/9)}$. Mais on peut dire plus, grâce aux propriétés d'approximation : $\gamma(x) = 1$ si, et seulement si, x est "bien approché" par les points de $\Lambda_{(4/9,5/9)}$, si bien que $\gamma(x) = 1$ sauf aux points $x \in \underset{\sim}{T}$ d'un ensemble de mesure nulle et de dimension de Hausdorff 1 .

Nous allons maintenant présenter de façon assez systématique le problème d'approximation que nous avons voulu illustrer par cet exemple.

(c) Suites $\Lambda(x)$ associées à une suite $\Lambda = (\lambda_k)$. – $\Lambda = (\lambda_k)$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels tels que $\lambda_0 = 0$,

(8) $$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = + \infty , \quad \lim_{k\to+\infty}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0 .$$

A tout point $x \in \underset{\sim}{T}$, où $\underset{\sim}{T}$ est identifié à $[0 , 1[$, est associée l'unique suite croissante d'indices (k_n) vérifiant

(9) $$\lambda_{k_n} \leqslant x + n - 1 < \lambda_{k_n+1} \qquad (n \in \underset{\sim}{N}) .$$

On désigne alors par $\Lambda(x)$ la suite, à valeurs dans $\underset{\sim}{T}$,

(10) $$n \longrightarrow \frac{x + n - 1 - \lambda_{k_n}}{\lambda_{k_n+1} - \lambda_{k_n}} \qquad (n \in \underset{\sim}{N}) .$$

Nous allons maintenant étudier la répartition des suites $\Lambda(x)$.

2. Répartitions des suites $\Lambda(x)$.

(a) Points bien approchés. – $\Lambda = (\lambda_k)$ est une suite strictement croissante de nombres réels vérifiant (8). Pour tout $x \in \underset{\sim}{T}$, $\Lambda(x)$ est la suite des points du tore qui lui est associée par (9) et (10). Un point $x \in \underset{\sim}{T}$ est dit bien approché par une suite Λ si 0 est une valeur d'adhérence de la suite $\Lambda(x)$. Dans le cas contraire, x est dit mal approché. L'ensemble des points mal approchés est noté $E(\Lambda)$.

Comme nous le verrons plus loin.

PROPOSITION 1. - Pour toute suite Λ, presque tout point de $\underset{\sim}{T}$ est bien approché par Λ (i. e. $E(\Lambda)$ est de mesure nulle).

Ainsi, par exemple, l'ensemble $E(\Lambda_z)$ des points x de $\underset{\sim}{T}$ mal approchés par la suite des nombres triadiques est l'ensemble des x de $\underset{\sim}{T} = [0, 1[$ dont le développement en base 3 n'admet pas de plages de 0 ou de plages de 2 de longueur arbitrairement grande.

(b) Deux types remarquables de suites Λ. - Nous allons, afin de disposer par la suite d'exemples intéressants, donner deux généralisations distinctes de la suite Λ_3 : les suites Λ_s et les suites $\Lambda_{(\mu_n)}$.

Les suites Λ_s. - Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{g-1} < 1$ des nombres donnés. Posons $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$. Etant donné un intervalle $]a, a + \ell[$ de $\underset{\sim}{T}$, on appelle s-section de $]a, a + \ell[$ l'ensemble

$$\{a, a + \lambda_1 \ell, a + \lambda_2 \ell, \ldots, a + \lambda_{g-1} \ell, a + \ell\} .$$

Désignons par (s_n) la suite des parties finies du tore obtenues à partir de la s-section de $\underset{\sim}{T}$

$$s_1 = (0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1}, 0)$$

de la façon suivante : s_n est la réunion des s-sections des intervalles contigus à s_{n-1}, ceci pour $n \geq 2$. Dans ces conditions, soit Λ_s l'unique suite $\Lambda = (\lambda_k)$ dont la n-ième spire est s_n $(n \in \underset{\sim}{N})$; pour $s = (4/9, 5/9)$ on retrouve la suite $\Lambda_{(4/9,5/9)}$ du paragraphe I (b). Nous avons prouvé dans : "variation totale d'une fonction" [4] (théorème 3 du chapitre III), le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Pour toute partie finie s de $\underset{\sim}{T}$, $E(\Lambda_s)$ est de mesure nulle et a pour dimension de Hausdorff 1.

Les suites $\Lambda_{(\mu_n)}$. - (μ_n) est une suite de nombres réels, strictement positifs, convergeant vers $+\infty$. $\Lambda_{(\mu_n)}$ désigne la suite, dont la n-ième spire est

$$s_n = \{\frac{k}{\mu_n} \mid 0 \leq k < [\mu_n]\} \qquad (n \in \underset{\sim}{N}) ,$$

où, pour tout $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, $[\lambda] = \lambda - \{\lambda\}$ est la partie entière de λ.

Etant données deux suites (λ_n), (λ'_n) dans $\underset{\sim}{T}$, convenons de poser $(\lambda_n) \sim (\lambda'_n)$ s'il existe $n_0 \in \underset{\sim}{N}$ tel que $\lambda_n = \lambda'_n$ $(n \geq n_0)$. De façon évidente, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2. - Pour toute suite (μ_n) de nombres réels, strictement positifs, convergeant vers $+\infty$,

$$\Lambda_{(\mu_n)}(x) \sim (\{\mu_n x\}) \qquad (x \in \underset{\sim}{T}^*) . \tag{11}$$

Les suites Λ_g. - Pour tout entier $g \geq 2$, posons

$$s_g = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g}) . \tag{12}$$

On a

(13) $$\Lambda_{s_g} = \Lambda_{(g^n)} \ .$$

Cette suite, qui est à la fois du type Λ_s et du type $\Lambda(\mu_n)$, sera notée Λ_g et appelée suite des nombres g-adiques. On retrouve ainsi en cas particulier la suite Λ_3 donnée à titre d'exemple au paragraphe I (b).

(c) Densité et équirépartition. - La proposition 1 est un corollaire du résultat suivant.

THÉORÈME 2. - Pour toute suite Λ , la suite $\Lambda(x)$ est dense pour presque tout $x \in \underset{\sim}{T}$.

C'est un résultat assez facile, dont on peut donner une démonstration élémentaire. Mais nous trouvons plus agréable d'en donner une démonstration probabiliste.

Soit $(\Omega , \mathfrak{F} , P)$ l'espace de probabilité défini sur $\Omega = \underset{\sim}{T}$, en prenant pour $\mathfrak{F}$ la σ-algèbre des boréliens, et pour P la mesure de Haar sur $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$. Soit $I =]a , b[$ un intervalle non vide de $\underset{\sim}{T} = [0 , 1[$. Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, désignons par $\Lambda_n(\omega)$ le n-ième terme de la suite $\Lambda(\omega)$. Alors, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$,

(14) $$A_n = \{\omega \ ; \ \Lambda_n(\omega) \in I\}$$

est un évènement, et

(15) $$P(A_n) \longrightarrow b - a \qquad (n \longrightarrow + \infty) \ .$$

Envisageons d'abord le cas simple où les évènements A_n $(n \in \underset{\sim}{N})$ sont indépendants. Il résulte de (15) que la série de terme général $P(A_n)$ diverge, et l'on déduit donc du théorème de Borel-Cantelli que

(16) $$P(\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} A_n) = 1 \ .$$

Revenons maintenant au cas général. Notre but est de prouver que l'on a toujours (16). Or il suffit pour cela de remarquer que, si l'on choisit une suite d'indices (n_k) croissant assez rapidement, les évènements A_{n_k} $(k \in \underset{\sim}{N})$ peuvent être rendus "asymptotiquement" indépendants en ce sens que

(17) $$P[A n_k | \cap_{j=1}^{k-1} A n_j^c] \longrightarrow b - a \qquad (n \longrightarrow + \infty) \ .$$

Alors $\bigcup_{k\in\underset{\sim}{N}} A n_k$, donc $\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} A n$, est un évènement de probabilité 1 . On a donc toujours (16), ce qui exprime que presque sûrement $\omega \longrightarrow \Lambda(\omega)$ rencontre I . En faisant parcourir à I les intervalles à extrémités rationnelles, on en déduit que presque sûrement $\omega \longrightarrow \Lambda(\omega)$ est dense.

.

. .

Il semble assez naturel de poser de même le problème de l'équirépartition des suites $\Lambda(x)$. Disons pour simplifier qu'une suite Λ est bien répartie si la suite $\Lambda(x)$ est équirépartie pour presque tout $x \in \underset{\sim}{T}$. Toute suite Λ est-elle bien répartie ? Non ... ainsi par exemple la suite $\Lambda_{(\log n)}$ n'est pas bien répartie. C'est en effet une conséquence de la proposition 2 et de ce que la suite $(\lambda \log n)$ n'est équirépartie modulo 1 pour aucun $\lambda \in \underset{\sim}{R}$. On a toutefois les résultats positifs suivants.

THÉORÈME 3. - Pour toute partie finie s de $\underset{\sim}{T}^*$, la suite Λ_s est bien répartie.

THÉORÈME 4. - Pour toute suite Λ de n-ième spire s_n, il existe une suite strictement croissante d'indices (n_k) telle que toute suite Λ', dont les spires constituent un sous-ensemble de $\{s_{n_k}\}$, soit bien répartie.

On peut démontrer le théorème 3 à l'aide du théorème ergodique de Birkhoff. Quant au théorème 4, il utilise un théorème de J. KOMLOS, qui est une généralisation de la loi forte des grands nombres permettant de s'affranchir de l'hypothèse d'indépendance.

Problème 1. - Les suites

$n \longrightarrow n^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$,

$n \longrightarrow \log n$,

$n \longrightarrow 1 + 1/2 + \dots + 1/n$,

sont-elles bien réparties ?

(d) Points très bien approchés. - Rappelons qu'un point $x \in \underset{\sim}{T}$ est bien approché par une suite Λ si la suite $\Lambda(x)$, encore notée $n \longrightarrow \Lambda_n(x)$, admet 0 pour valeur d'adhérence. Il est souvent intéressant d'envisager, comme nous allons le voir dans la suite de cet exposé, une notion plus forte.

DÉFINITION. - Un point $x \in \underset{\sim}{T}$ est très bien approché par une suite Λ si la suite à valeurs dans $\underset{\sim}{T}^{\underset{\sim}{N}}$

$$n \longrightarrow (\Lambda_n(x), \Lambda_{n+1}(x), \dots, \Lambda_{n+k}(x), \dots) \tag{18}$$

admet 0 pour valeur d'adhérence.

C'est réellement la notion "utile" à l'étude du comportement local des fonctions. Si pendant très longtemps cette notion nous a échappé et nous nous sommes contentés de la notion de bonne approximation, c'est que nous ne considérions alors que des suites du type Λ_s et que nous avions le résultat ci-après.

PROPOSITION 3. - Etant donnée une partie finie s de $\underset{\sim}{T}^*$, un point $x \in \underset{\sim}{T}$ est très bien approché par Λ_s si, et seulement si, il est bien approché par Λ_s.

Ici un petit dessin peut suppléer à une démonstration, de toute façon extrêmement simple.

Remarque. - Signalons qu'en revanche il existe des suites Λ pour lesquelles aucun point de $\underset{\sim}{T}$ n'est très bien approché (seul le point 0 est très bien approché par la suite $\Lambda(n)$).

3. Comportement local des fonctions à série de Fourier lacunaire.

Il ne nous est pas possible au cours de cette seule conférence, d'aborder toutes les applications possibles du problème d'approximation que nous venons de décrire. Nous allons donc nous contenter d'indiquer à la fin de cet exposé une bibliographie assez complète du sujet et de n'évoquer ici que nos résultats les plus récents.

(a) Fonctions à série de Fourier lacunaire. - La propriété la plus remarquable des fonctions à série de Fourier lacunaire est qu'il suffit de connaître leur comportement au voisinage de l'origine pour en déduire leur comportement au voisinage de chaque point. Mais si l'on s'intéresse, non plus à leur "nature", mais plus précisément à leur "allure", il est nécessaire, pour obtenir une propriété de cet ordre, d'adjoindre à la notion de "lacunarité" celle d'"équilibre".

(b) Equilibre des suites. - Une suite (μ_n) de nombres réels est équilibrée si, pour presque tout x dans $\underset{\sim}{T} = [0 , 1[$, la suite à valeurs dans $\underset{\sim}{T}^{\underset{\sim}{N}}$

(19) $$n \longrightarrow (\{\mu_n x\} , \{\mu_{n+1} x\} , \ldots , \{\mu_{n+k} x\} , \ldots)$$

admet 0 pour valeur d'adhérence ; par ailleurs elle est dite lacunaire si

(20) $$\inf_{n\in\underset{\sim}{N}} \mu_{n+1}/\mu_n > 1 ,$$

et à rapports bornés si

(21) $$\sup_{n\in\underset{\sim}{N}} \mu_{n+1}/\mu_n < + \infty .$$

Notons tout de suite un nouveau résultat.

PROPOSITION 4. - Une suite (μ_n) est équilibrée si, et seulement si, presque tout $x \in \underset{\sim}{T}$ est très bien approché par la suite $\Lambda_{(\mu_n)}$.

La suite (n) n'est pas équilibrée. - En revanche, on prouve, en utilisant certains résultats d'équirépartition que, pour tout nombre réel $\theta > 1$, la suite (θ^n) est équilibrée ; cela va de soi pour θ transcendant, mais nous a semblé plus caché pour θ algébrique.

Comme nous l'avons exprimé au cours des "Journées modulo 1 " à Marseille-Luminy (juin 1974), nous avons pensé un certain temps que toute suite lacunaire était équilibrée. Mais il n'en est rien puisque, par exemple, la suite $(2^n + 1)$ n'est pas équilibrée.

(c) "Allure" d'une fonction en un point. - Soit $f : \underset{\sim}{T} \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ une fonction lipschitzienne d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$. En tout point $x \in \underset{\sim}{T}$,

(22) $$|f(x + h) - f(x) - f(h) + f(0)| = O(h^\alpha) \qquad (h \longrightarrow 0) .$$

Nous dirons que la fonction f a "même allure" au point x qu'à l'origine pour exprimer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $0 < \eta \leqslant 1$ tel que

$$|f(x + h) - f(x) - f(h) + f(0)| \leqslant \varepsilon\eta^\alpha \qquad (|h| \leqslant \eta) . \tag{23}$$

(d) Allure et équilibre. - La propriété que nous voulons mettre ici en évidence est que, si une fonction $f : \underset{\sim}{T} \dashrightarrow \underset{\sim}{R}$ est à série de Fourier lacunaire et équilibrée, elle a en presque tout point "même allure" qu'à l'origine, la notion d'équilibre étant d'une certaine façon, nécessaire et suffisante pour que l'on ait une telle propriété. Plus précisément, nous pouvons établir le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - *Pour une suite lacunaire d'entiers naturels* (n_k) , *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(α) *La suite* (n_k) *est équilibrée ou n'est pas à rapports bornés.*

(β) *Toute fonction* $f : \underset{\sim}{T} \dashrightarrow \underset{\sim}{R}$, *lipschitzienne d'ordre* α $(0 < \alpha < 1)$, *admettant un développement en série de Fourier de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k \cos 2\pi n_k x + b_k \sin 2\pi n_k x) \qquad (x \in \underset{\sim}{T}) \tag{24}$$

a, en presque tout point, même allure qu'à l'origine.

On établit en fait une forme plus précise de ce résultat : *La suite* (n_k) *étant supposée lacunaire et à rapports bornés, pour qu'en un point* $x \in \underset{\sim}{T}$ *toute fonction* (24) *ait même allure qu'à l'origine, il faut et il suffit que* x *soit très bien approché par la suite* $\Lambda(n_k)$.

4. Finesse des fonctions.

(a) Régularité dans l'irrégularité. - On sait que (au sens des catégories de Baire) "la plupart" des fonctions continues ne sont dérivables en aucun point et sont donc très irrégulières. Dans cet ordre d'idées, on peut même préciser que pour beaucoup de fonctions continues, localement irrégulières, il y a régularité dans l'irrégularité. On ne peut mieux illustrer cette situation qu'en prenant des exemples parmi les fonctions à série de Fourier lacunaire. Or dans le cas particulièrement clair des fonctions lipschitziennes d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$, la notion de finesse, que nous avons introduit dans notre thèse, traduit tout à fait cette idée.

(b) Finesse des fonctions. - Soient des nombres $0 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$. Une fonction $f : \underset{\sim}{T} \dashrightarrow \underset{\sim}{R}$ est dite fine (relativement à α et γ) si

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \gamma|y - x|^\alpha \qquad (x , y \in \underset{\sim}{T}) \tag{25}$$

et presque partout sur $\underset{\sim}{T}$

$$\overline{\lim}_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\alpha} = \gamma . \tag{26}$$

Nous connaissons de nombreux exemples de fonctions fines, mais le cas qui a le plus retenu notre attention depuis quelques années est celui des fonctions de Weierstrass.

(c) Les fonctions de Weierstrass. - Si l'on fait exception du manuscrit de BOLZANO (1834) et de l'exemple de CALLÉRIER, qu'on ne publia qu'en 1890, les fonctions de Weierstrass (1875)

(27) $$x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \sin 2\pi\theta^{n} x \qquad (x \in \underset{\sim}{T})$$

et

(28) $$x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \cos 2\pi\theta^{n} x \qquad (x \in \underset{\sim}{T}) ,$$

où $0 < \alpha < 1$, $\theta > 1$, ont fourni le premier exemple historique d'une fonction continue sans dérivée. Parmi les très nombreux travaux qui ont été consacrés à ces fonctions, il faut naturellement citer ceux de G. H. HARDY, R. SALEM et A. ZYGMUND, G. C. YOUNG, ...

La finesse des fonctions (27) et (28) résulte de propriétés de répartition modulo 1 des suites $(\theta^n x)$ $(x \in \underset{\sim}{T})$. Pour les fonctions (28), le cas où θ est algébrique n'est pas actuellement résolu.

(d) Finesse des fonctions de Weierstrass. - On a les résultats suivants :

THÉORÈME 5. - Pour tout nombre $0 < \alpha < 1$, les fonctions (27) et (28) sont fines lorsque $\theta \in 2\underset{\sim}{N}$.

Ce résultat figurait dans notre thèse (1970) et on en trouvera la démonstration dans "Variation totale d'une fonction" [4]. Mais il nous a fallu plus de quatre ans pour décider si (27) est fine lorsque $\theta = 3$. Or nous avons finalement obtenu le théorème qui suit.

THÉORÈME 6. - Pour tout nombre $0 < \alpha < 1$:

(α) La fonction (27) est fine quel que soit $\theta > 1$ réel.

(β) La fonction (28) est fine quel que soit $\theta > 1$ transcendant.

Dans la démonstration du théorème 5, une propriété de symétrie a permis de conclure sans mettre en lumière de propriété d'approximation. Dans le cas du théorème 6 tout au contraire, on ne peut espérer conclure sans que paraissent au grand jour de telles propriétés.

En clair, on peut prouver que :

(27) est fine si (θ^n) est équilibrée ;

(28) est fine si la suite $(\theta^n x)$ est complètement équirépartie modulo 1 pour presque tout $0 \leq x < 1$.

(e) Allure des fonctions (27) et (28) lorsque θ est transcendant. - Lorsque $\theta > 1$ est transcendant, on obtient, en généralisant de façon naturelle la notion "d'allure", un résultat assez fort.

THÉORÈME 7. - Relativement à un nombre $0 < \alpha < 1$ donné, pour $\theta > 1$ transcendant, quel que soit x dans $\underset{\sim}{T}$, les fonctions (27) et (28) ont en presque tout point même allure que (27) et que (28) au point x.

(f) Problèmes. - De façon plus audacieuse on peut se demander si, par une étude plus profonde, il ne serait pas possible de "lire" sur le graphe des fonctions (27) et (28) certaines propriétés arithmétiques des nombres θ. Pour l'instant, contentons nous de formuler deux problèmes :

Problème 2. - Existe-t-il des nombres algébriques $\theta > 1$ tels que (28) ne soit pas fine ?

Problème 3. - Le théorème 7 caractérise-t-il les nombres $\theta > 1$ transcendants ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUNEAU (Michel). - Etude et généralisation d'une classe de fonctions lipschitziennes très régulières, Thèse Sc. math., Strasbourg 1970 (multigraphiée).

[2] BRUNEAU (Michel). - Fonctions d'une variable réelle ; p-variation fine d'une fonction à p-variation bornée, C. R. Acad. Sc., t. 270, 1970, Série A, p. 585-588.

[3] BRUNEAU (Michel). - Fonctions numériques et approximation sur le tore ; Fonctions (p, α)-fines et nombres mal approchés, C. R. Acad. Sc., t. 275, 1972, Série A, p. 903-906.

[4] BRUNEAU (Michel). - Variation totale d'une fonction. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 413).

[5] BRUNEAU (Michel). - Comportement local des fonctions et approximation sur le tore, Tunis, 1974 (multigraphié).

[6] BRUNEAU (Michel). - Finesse des fonctions de Weierstrass, Tunis, 1974 (multigraphié)

(Texte reçu le 2 décembre 1974)

Michel BRUNEAU
12 rue Baudelaire
EL OMRANE
TUNIS
(Tunisie)