Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Pierre Barrucand

Quelques aspects de la théorie des corps cubiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1974-1975), exp. nº 18, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A13_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 18, 10 p.

7 avril 1975

QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE DES CORPS CUBIQUES

par Pierre BARRUCAND

1. Extensions et corps cubiques purs.

Si à un corps de nombres algébriques K on ajoute un élément $\sqrt[3]{\alpha}$, $\alpha \in K$, $\sqrt[3]{\alpha} \notin K$, le corps $K(\sqrt[3]{\alpha})$ sera dit une extension cubique pure de K. Cette extension sera abélienne si, et seulement si, le nombre $p = (-1 + \sqrt{-3})/2 = \exp(2\pi i/3)$ appartient à K.

Si on prend $K = Q$, le corps $Q(\sqrt[3]{m})$, $m \in Q$, sera dit corps cubique pur. On peut sans perte de généralité supposer m entier et sans facteur cubique. On a alors $m = m_1 m_2^2$, $(m_1, m_2) = 1$, $m_1 m_2$ sans facteur carré. Le discriminant de $Q(\sqrt[3]{m})$ sera alors $\Delta = -3\theta^2 f^2$ avec $f = m_1 m_2$,

$$\theta = 1 \quad \text{si} \quad m \equiv \pm 1 (9) ,$$

$$\theta = 3 \quad \text{autrement.}$$

Une théorie assez complète des corps cubiques purs a été donnée, sans considérer la clôture galoisienne par MARKOV. Au début du XXe siècle, DEDEKIND retrouva certains des résultats de MARKOV, et ajouta quelques nouvelles propriétés.

Un corps cubique pur possède une unité fondamentale, sa clôture galoisienne, ou plus généralement tout corps obtenu par adjonction de la racine carrée d'un nombre rationnel négatif à $Q(\sqrt[3]{m})$, a deux unités.

2. Extensions et corps cubiques en général.

Une voie assez fréquemment empruntée consiste à considérer les extensions cubiques en général, et les corps cubiques en particulier, comme des sous-corps non galoisiens d'un corps galoisien. Cependant, on peut procéder d'une façon directement inverse. Cette méthode a été utilisée par BERWICK qui a donné la genèse de tous les corps cubiques de discriminant donné, par WAHLIN, qui a donné de façon explicite, mais un peu compliquée, la loi de décomposition, et par Chester JAEGER qui a complété les travaux de WAHLIN.

Elle a été reprise par REICHHARDT. Une synthèse entre les deux méthodes a été faite par MARTINET et PAYAN qui ont retrouvé quelques uns des résultats de BERWICK qu'ils ignoraient.

Considérons en général l'équation $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, $A, B, C \in K$, K désignant un corps de nombres algébriques. Si le polynôme est irréductible, c'est-à-dire s'il n'a aucune racine dans K, il existe alors dans K des nombres $\alpha, \delta \in K$ tels que l'on ait, pour une des racines

$$x = \sqrt[3]{(\alpha^2-\delta^2)(\alpha+\sqrt{\delta})} + \sqrt[3]{(\alpha^2-\delta^2)(\alpha-\sqrt{\delta})} = x_1+x_1' \quad \text{avec} \quad x_1' = (\alpha^2-\delta^2)/x_1 \; .$$

$K(x_1)$ est évidemment une extension cubique pure de $K_2 = K(\sqrt{\delta})$, $x_1' \in K(x_1)$, $K(x_1) \supset K(\sqrt{\delta}) \supseteq K$ et, par conséquent, $x = x_1 + x_1'$ fait partie d'un sous-corps de $K(x_1)$. Ainsi donc toute extension cubique d'un corps K est un sous-corps d'une extension cubique d'une extension quadratique de K .

Autrement dit, toute extension cubique de K est un sous-corps d'une extension cubique pure de K_2 .

Dans le cas des corps cubiques cycliques, cela revient à définir ces corps comme sous-corps d'une extension cubique pure de $Q(\sqrt{-3})$.

Définitions et règles relatives aux corps quadratiques. Nombres quadratiques complètement primitifs. - Soient $K' = Q(\sqrt{d'})$ un corps quadratique de discriminant d' , $\mathcal{O}'$ l'anneau de ses entiers "actuels" c'est-à-dire sans idéaux, et ε son unité fondamentale, soit, si $d' < 0$,

$$\begin{aligned} &1 \quad \text{si} \quad d' < -4 \; , \\ &i \quad \text{si} \quad d' = -4 \; , \\ &\rho \quad \text{si} \quad d' = -3 \; . \end{aligned}$$

Soit alors un entier μ de $\mathcal{O}'$

$$\mu = (\alpha + \beta\sqrt{d'})/2 \; , \quad \mu^2 = (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{d'})/2$$

et en général

$$\mu^\nu = (\alpha_\nu + \beta_\nu\sqrt{d'})/2 \; .$$

μ sera dit primitif s'il n'est divisible par aucun entier rationnel,

μ sera dit complètement primitif si μ^2 est primitif,

donc si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K' , μ complètement primitif

$$\mathfrak{p}|\mu \Longrightarrow N(\mathfrak{p}) = p \; ,$$

p premier non ramifié, non inerte dans K' , et $\mathfrak{p}'\nmid\mu$.

Evidemment si μ n'est pas complètement primitif nous pouvons définir un nombre $\tilde{\mu}$ complètement primitif

$$\tilde{\mu} = \mu^2/g \; , \quad p|g \Longrightarrow p|d' \; ,$$

et on vérifiera que les corps

$$Q(\sqrt[3]{\mu^2\mu'} + \sqrt[3]{\mu\mu'^2}) \quad \text{et} \quad Q(\sqrt[3]{\tilde{\mu}^2\tilde{\mu}'} + \sqrt[3]{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'^2})$$

sont identiques.

Donc, à tout corps cubique non pur K_3 , nous pouvons associer un entier quadratique μ complètement primitif,

$$K_3 = Q(\sqrt[3]{\mu^2\mu'} + \sqrt[3]{\mu\mu'^2}) \; ;$$

naturellement, K_3 est un sous-corps de $K'_6 = Q(\sqrt[3]{\mu^2 \mu'})$.

Caractères de Berwick et 3-primarité. - Si μ est complètement primitif, $N=N(\mu)$, on définit

$$\chi(\mu) = (\frac{N^2}{3}) \exp(\frac{2\pi i}{3} (\frac{\alpha\beta}{3})) \quad \text{si} \quad 3|d'$$

$$\chi(\mu) = (\frac{N^2}{3}) \exp(\frac{2\pi i}{3} (\frac{\alpha\beta\alpha_2/3}{3})) \quad \text{si} \quad 3\nmid d'$$

et on vérifiera facilement que

$$(\frac{N^2}{3}) = 1 \Longrightarrow 3|\alpha\beta\alpha_2 ,$$

en particulier, $\chi(\mu) = 1$ si $9|\alpha\beta d' \alpha_2$. Si $\chi(\mu) = 1$, μ est dit 3-primaire [les $\chi(\mu)$ forment une suite de caractères multiplicatifs], et on vérifiera aisément que si μ est un cube dans $Q(\sqrt{d'})$, μ est 3-primaire.

Exemples.

$$\varepsilon_5 = (1 + \sqrt{5})/2 \text{ n'est pas 3-primaire}$$

$$\varepsilon_{69} = (25 + 3\sqrt{69})/2 \text{ est 3-primaire.}$$

Pseudocubes. - Un pseudocube est un nombre dont la norme est un cube, mais qui n'est pas un cube. Si $d' \geqslant -3$, d' discriminant de corps quadratique, $\varepsilon_{d'}$ est un pseudocube.

Si $d' = -4$, i est un cube $2+\sqrt{-23}$ est un pseudocube dans $Q(\sqrt{-23})$; en général, si $d' < -3$, il n'y a de pseudocubes que si le 3-rang de $Q(\sqrt{d'})$ n'est pas nul.

Si $d' \geqslant -3$ et si le 3-rang de $Q(\sqrt{d'})$ est nul, il n'y a pas d'autre pseudocubes que les nombres $\varepsilon_{d'}^n$, $3\nmid n$.

Corps quadratiques 3-primaires. - Un corps quadratique sera dit 3-primaire, si tous les nombres du corps, dont la norme est un cube (donc, s'il y en a, les pseudocubes en particulier) sont 3-primaires. Sinon il n'est pas 3-primaire.

Si $d' \geqslant -3$, une condition nécessaire, non suffisante, pour que ce corps soit 3-primaire est que son unité fondamentale le soit, la condition étant suffisante seulement si son 3-rang est nul.

3. Genèse des corps cubiques.

Nous avons vu que tout corps cubique non pur peut être généré par adjonction à Q de $T = \sqrt[3]{\mu^2 \mu'} + \sqrt[3]{\mu'^2 \mu}$, μ complètement primitif. Inversement, si $\mu^2 \mu'$ n'est pas un cube, $Q(T)$ est un corps cubique. D'autre part, le nombre

$$T^* = \sqrt{d'} [\sqrt[3]{\mu^2 \mu'} - \sqrt[3]{\mu'^2 \mu}]$$

appartient à l'anneau des entiers de $Q(T)$. On a, plus exactement, si $N = N(\mu)$

$$\mu = (\alpha + \beta\sqrt{d'})/2 ,$$

$$T^3 - 3NT - N\alpha = 0 ,$$

$$T^{*3} + 3Nd' T^{*} - d'^{2} N\beta = 0 .$$

T est d'ailleurs divisible par 3 si $3|d'$, $3|\beta$ (μ est alors 3-primaire) et si, $\zeta = T^{*}/3$,

$$\zeta^{3} + N(d'/3)\zeta - (d' N\beta/27) = 0 .$$

Détermination du discriminant. - BERWICK a donné les règles nécessaires pour la détermination exacte du discriminant de $K = Q(T)$. La supposition, que l'on peut toujours faire sans perte de généralité, que μ est complètement primitif, simplifie les règles, et on obtient en définissant $f_1\, f_2\, f_3$, f , γ , θ ,

$$N = \mu\mu' = f_1\, f_2^2\, f_3^3 , \quad f_1 , f_2 \text{ sans facteur carré } (f_1 , f_2) = 1$$

$$f = f_1\, f_2 ,$$

$$\gamma = 0 \text{ si } \mu \text{ est } 3\text{-primaire,}$$

$$\gamma = 1 \text{ si } \mu \text{ n'est pas } 3\text{-primaire,}$$

$$\theta = [3(3 , d')]^{\gamma} = 1 , 3 \text{ ou } 9 ,$$

$$\Delta = - 3d'/(3 , d')^2\, \theta^2\, f^2 ,$$

qui présente des analogies apparentes avec la formule du discriminant pour les corps purs. Définissons $d = - 3d'/(3 , d')^2$. d est alors un discriminant de corps quadratique où $d = 1$.

Si $d = 1$, $d' = - 3$, et on retrouve les corps cubiques cycliques.

Si $d \neq 1$, la complétion galoisienne de $K_3 = Q(T)$ est obtenue par adjonction de $\sqrt{d}$ à K_3 , $K_6 = K_3(\sqrt{d}) = Q(T , \sqrt{d})$.

Cas particuliers. - Si μ est un pseudocube, on a $\Delta = d\theta^2$. Un tel corps est appelé corps fondamental ou corps de base (Groundfield).

En particulier, si le pseudocube est 3-primaire, $\theta = 1$, et la clôture galoisienne de K_3 est une extension non ramifiée de $Q(\sqrt{d})$.

Exemple.

$$K_3 = Q(\sqrt{\varepsilon_{69}} + \sqrt{\varepsilon'_{69}}) ,$$

$$\Delta = - 23 , \quad h(\sqrt{-23}) = 3 ,$$

$K_3(\sqrt{-23})$ est le corps de classe de $Q(\sqrt{-23})$.

Comme cas de Groundfields :

1° $Q(\sqrt[3]{\varepsilon} + \sqrt[3]{\varepsilon'})$, ε est une unité fondamentale.

2° $Q(\sqrt[3]{\rho} + \sqrt[3]{\rho'})$, $\rho\rho = \exp(2\pi i/3)$, ce corps est cyclique, discriminant 81 .

3° $Q(\sqrt[3]{\psi} + \sqrt[3]{\psi'})$, ψ est un pseudocube ; exemple : $2 + \sqrt{-23}$ discriminant $+ 621$.

Familles de corps cubiques. - Une famille de corps cubiques est l'ensemble de corps cubiques qui sont rendus normaux par adjonction d'une irrationnelle $\sqrt{d}$;

autrement dit, si Δ_1 , Δ_2 sont des discriminants de corps cubiques, ces corps appartiennent à la même famille si, et seulement si, $\Delta_1 \Delta_2$ est un carré rationnel.

Plusieurs corps de la même famille peuvent avoir le même discriminant.

<u>Exemples particuliers</u> : <u>Corps purs</u>, <u>corps cycliques</u>. <u>Loi de décomposition</u>. – Les faits suivants sont bien connus

$p|\theta f \sim (p) = \mathfrak{p}^3$,

$(\Delta/p) = 0$, $p\nmid \theta f \sim (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2^2$,

$(\Delta/p) = -1 \sim (p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ $N(\mathfrak{p}') = p^2$.

Par contre, si

$$(\Delta/p) = +1 \begin{cases} \text{ou bien} \quad (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 & \underline{\text{décomposition}}, \\ \text{ou bien} \quad (p) = p & \underline{\text{inertie}}. \end{cases}$$

Des règles apparemment bien différentes ont été données pour séparer les deux cas

1° WAHLIN et C. JAEGER considèrent la résiduacité cubique dans le corps $Q(\sqrt{d},\sqrt{d'})$;

2° HASSE a montré que (p) est décomposé si, et seulement si, p est représentable par certaines formes quadratiques de discriminant Δ , Δ étant le discriminant du corps cubique.

Cependant, on peut simplifier considérablement ces règles.

Soit $p = 3m + \lambda$, $\lambda = 1$, 2 . Si $p > 3$, $p\nmid\Delta$, $p\nmid N$. (p) est décomposé si, et seulement si, $\mu^2 \mu' \equiv x^3$ dans $GF(p^\lambda)$; en particulier, si $p \equiv 1(3)$, $\lambda = 1$, et μ est rationnel dans $GF(p)$.

Maintenant, si $p|N$, mais si p n'est pas ramifié, p est décomposé si $(\Delta/p) = 1$. Si on considère le corps

$$Q(x) \; : \; x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ , discriminant } \Delta \text{ ,}$$

on trouve que

$$(\Delta/p) = 1 \text{ , } p|a_0 \Longrightarrow (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \text{ .}$$

Ceci est une conséquence directe du théorème de ZOLOTAREV.

Plus généralement, rappelons

$$Q(T) = Q(\sqrt[3]{\mu^{2m} \mu'^m} + \sqrt[3]{\mu^m \mu'^{2m}}) \text{ , } 3\nmid m$$

et si

$$\mu^m = (\alpha_m + \beta_m \sqrt{d'})/2 \text{ , } p \neq 3 \text{ , } (\Delta/p) = 1$$

alors

$$p|\alpha_m \beta_m \Longrightarrow (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \text{ .}$$

Le théorème de Zolotarev nous fournit des règles simples pour $p=2,3,5,7,11,13$;

nous supposerons que $(\Delta/p) = 1$ ce qui implique

$$p = 2 \,, \quad d' \equiv 5(8) \,,$$
$$p = 3 \,, \quad d' \equiv 6(9) \,,$$
$$p = 5 \,,\, 11 \,, \quad (\frac{d'}{p}) = -1 \,,$$
$$p = 7 \,,\, 13 \,, \quad (\frac{d'}{p}) = 1 \,,$$

(p) est alors décomposé dans les cas suivants :

- $p = 2$, $2|\alpha$, $2|\beta$ c'est-à-dire que $\mu = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\sqrt{d'}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ entiers, par exemple : $\mu = 6 + \sqrt{37}$; on voit que (2) est décomposé dans le corps cubique de discriminant -999.
- $p = 3$, $9|\beta$.
- $p = 5$, 7, $p|\alpha\beta$.
- $p = 11$, 13, $p|\alpha\beta\alpha_2$.

Exemple.

$$\mu = 16 + 5\sqrt{3} \,,$$
$$\Delta = -4.81.181^2 \,.$$

On voit que $(\Delta/5) = 1$ et $(5) = \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3$.

4. Composition des corps cubiques.

Soient

$$K_1 = Q(\sqrt[3]{\mu^2\,\mu'} + \sqrt[3]{\mu\mu'^2})$$
$$K_2 = Q(\sqrt[3]{\nu^2\,\nu'} + \sqrt[3]{\nu\nu'^2})$$

deux corps distincts appartenant à la même famille c'est-à-dire que μ et ν appartiennent au même corps quadratique.

Le corps $K_1\,K_2$ est un corps de degré 9, et si K_1 n'est pas cyclique, l'ordre du groupe de Galois est 18, le corps $K_1\,K_2$ contient 4 sous-corps cubiques qui sont, outre K_1 et K_2,

$$K_3 = Q(\sqrt[3]{\mu^2\,\nu^2\,\mu'\,\nu'} + \sqrt[3]{\mu\nu\mu'^2\,\nu'^2}) \,,$$
$$K_4 = Q(\sqrt[3]{\mu\nu^2\,\mu'^2\,\nu'} + \sqrt[3]{\mu^2\,\nu\mu'\,\nu'^2}) \,.$$

Supposons que (p) n'est pas ramifié dans l'un de ces quatre corps, et que l'on ait $(d/p) = 1$, alors

ou bien (p) est décomposé dans les quatre corps,

ou bien (p) est décomposé dans un seul de ces corps et inerte dans les trois autres.

Si maintenant $d = -3$, K_1 et K_2 sont des corps purs,

$$K_1 = Q(\sqrt[3]{m_1}) \quad , \quad K_2 = Q(\sqrt[3]{m_2}) \ ,$$
$$K_3 = Q(\sqrt[3]{m_1\, m_2}) \ , \quad K_4 = Q(\sqrt[3]{m_1\, m_2^2}) \ .$$

Il existe un autre cas où la composition des corps cubiques est intéressante.

Soit $\Delta = d\theta^2 f^2$, et supposons $p|\theta f$ et $(d/p) = 1$, ceci revient à :

ou $p \equiv 1(3)$,

ou $p = 3$, $d \equiv 1(3)$.

Soient alors E un corps cyclique de discriminant p^2 , ou si $p = 3$, de discriminant 81 , et N la clôture galoisienne de K . Le corps $N.E$ est alors une extension non ramifiée de N .

5. Structure du groupe des classes.

L'étude de la structure du groupe des classes fut commencée par H. COHN et moi-même en 1968 dans le cas des corps purs, depuis des progrès considérables ont été faits par G. GRAS, KOBAYASHI et F. GERTH III. Dans le cas des corps cubiques purs, la théorie de GERTH III a un énoncé particulièrement simple : $K = Q(\sqrt[3]{m})$, m sans facteurs cubiques, on a alors

$m = m_1\, m_2^2$, $m_1\, m_2$ quadratfrei ,

$$\Delta = - 3\theta^2\, m_1^2\, m_2^2 \begin{cases} \theta = 1 & \text{si} \quad m \equiv \pm 1(9) \\ \theta = 3 & \text{si} \quad m \not\equiv \pm 1(9) \end{cases} ,$$

ω nombre des diviseurs premiers distincts de $\theta m_1\, m_2$,

ω_1 nombre des diviseurs premiers $\equiv 1(3)$ de $\theta m_1\, m_2$,

ω_0 nombre des diviseurs premiers $\equiv \pm 2 , \pm 4(9)$ de $\theta m_1\, m_2$,

$a = 0$ si $\omega_0 = 0$,

$a = 1$ si $\omega_0 > 0$,

$\tilde{\omega} = \omega - 1 - a$.

Nous avons alors une formule pour le 3-rang du groupe de classes r

$$\max(\omega_1 \ , \tilde{\omega}) \leqslant r \leqslant \omega_1 + \tilde{\omega}$$

en particulier, si $\omega_1 = 0$, $r = \tilde{\omega}$.

Dans le cas, $\omega_1 = 0$, la théorie est tout à fait comparable à celle des classes ambigües dans les corps quadratiques.

Mais dans la théorie des corps quadratiques, le nombre de genres rationnels, définis par des congruences, est égal à celui des classes ambigües. Dans la théorie des corps cubiques purs, et même en général dans la théorie de tous les corps cubiques, il existe aussi des genres rationnels, mais reliés uniquement aux diviseurs premiers $\equiv 1(3)$ de m (aux diviseurs premiers $\equiv 1(3)$, ou, dans certains cas, à

3 dans le cas des corps cubiques en général). Comme exemple, considérons $Q(\sqrt[3]{7})$, la norme d'un nombre $\alpha + \beta\sqrt[3]{7} + \gamma\sqrt[3]{7^2}$ est alors

$$N = \alpha^3 + 7\beta^3 + 49\gamma^3 - 21\alpha\beta\gamma = \alpha^3 + 7N_0$$

donc un idéal premier de norme p est principal si, et seulement si

$$(p/7)_3 = 1 \quad \text{ou} \quad p = 7 .$$

D'autre part, il est connu que l'on a $(p) = \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3$ si, et seulement si, $p \equiv 1(3)$, $(7/p)_3 = 1$. En conséquence, (p) factorise en trois idéaux premiers principaux et distincts si, et seulement si, $(p/7)_3 = (7/p)_3 = 1$. Exemple : $p = 181$.

Nous considérons maintenant le problème de la détermination du 3-rang d'un corps cubique pur. GERTH III a montré que l'on a $r = \omega_1 + \tilde{\omega} - \lambda$, où λ est le rang d'une matrice rectangulaire avec ω_1 lignes. On peut donner des formules particulières plus explicites, par exemple, si $m \equiv \pm 2, \pm 4(9)$, dans ce cas, $3 \nmid m$, mais (3) est totalement ramifié, et $\omega_1 = 1$, on a alors

$$m = p \prod q_j^{\xi_j} , \quad p \equiv 1(3) , \quad q_j \equiv 2(3) , \quad \xi_j = 1 \text{ ou } 2$$

et alors

$$\lambda = 0 \text{ si, et seulement si, } \forall j , \ (q_j/p)_3 = 1 , \text{ sinon } \lambda = 1 .$$

La conclusion est équivalente à : tous les q_j sont décomposés dans le corps cubique cyclique de discriminant p^2, soit E_p. Le cas considéré ici est un peu particulier, mais illustre très simplement la théorie générale.

Maintenant, supposons que $\omega_1 = 1$, $r = 1$, et que le nombre de classes soit exactement 3. Exemple : $m = 7, 14, 28, 42$; dans ce cas, tout idéal du corps cubique devient principal dans $K.E_p$.

Plus généralement, si $h(\sqrt[3]{m}) = 3^{\omega_1}$, tout idéal premier de K devient principal dans $K.E_{p_1}.E_{p_2}\ldots E_{p_{\omega_1}}$.

Le problème de la détermination du 3-rang dans un corps cubique général est très voisin, cependant il devient plus compliqué si $3 | h(\sqrt{\Delta})$, h nombre de classes du corps $Q(\sqrt{\Delta})$.

<u>Conjecture</u> (maintenant prouvée par GRAS et GERTH III) <u>de Callahan</u>. - Si

$$\Delta = d \sim \theta^2 f^2 = 1 ,$$

et si R_2 est le 3-rang de $Q(\sqrt{d})$, r le 3-rang des corps cubiques de discriminant d,

$$r = R_2 - 1 .$$

A peu près rien n'est connu du 9-rang r_2, cependant je veux donner deux nouveaux résultats :

1° si $p \equiv 4, 7(9)$, $(3/p)_3 \neq 1$, $m = p, 3p, 9p$, alors $r_2 = 0$. Ceci reste probablement vrai si $(3/p)_3 = 1$.

2° si $\omega_1 = \tilde{\omega} = r$, alors $r_2 = 0$. Maintenant, si $m = p \equiv 1(9)$, le 9-rang peut être

ou bien 0 , $p = 19 , 37 , 73 , \ldots$

ou bien 1 , $p = 199 , 271 , 487 , \ldots$

Soient r_3 le 27-rang, r_4 le 81-rang, $r_3 > 0$ semble rare,

$$p = 3061 , 3583 , 4177 , 6733 , 8263 , 8389 ,$$

aucun autre cas si $p < 1000$.

$$\text{Si } p = 6733 , \quad h = 81 ,$$

$$\text{Si } p = 8263 , \quad h = 162 .$$

D'autre part, soit $m = qq'$; $m_2 = qq'^2$, $m \not\equiv 1(9)$. Il a été constaté empiriquement que

$$r_2 > 0 \Longrightarrow q \equiv 8(9) ,$$

et que si r'_2 est le 9-rang de $Q(\sqrt[3]{m_2})$,

$$r_2 > 0 \sim r'_2 > 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARRUCAND (P.) and COHN (H.). - A rational genus, class number divisibility and unit theory for pure cubic fields, J. Number Theory, t. 2, 1970, p. 7-21.

[2] BARRUCAND (P.) and COHN (H.). - Remarks on principal factors in a relative cubic field, J. Number Theory, t. 3, 1971, p. 226-239.

[3] BARRUCAND (P.), WILLIAMS (H. C.) and BANIUK (L.). - A computational technique for determining the class number of a pure cubic fields (sous presse).

[4] BERWICK (W. E. H.). - The classification of ideal numbers that depend on a cubic irrationality, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 12, 1913, p. 393-429.

[5] BERWICK (W. E. H.). - On cubic fields with a given discriminant, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 23, 1925, p. 359-378.

[6] CALLAHAN (T.). - Thèse Toronto 1973.

[7] CALLAHAN (T.). - The 3-class groups of non galois cubic fields, II, Mathematika, London, t. 21, 1974, p. 168-188.

[8] GERTH III (F.). - Rank of Sylow 3-subgroups of ideal class groups of certain cubic fields, Bull. Amer. math. Soc., t. 79, 1973, p. 521-525.

[9] GERTH III (F.). - On 3-class groups of pure cubic fields (sous presse).

[10] HASSE (H.). - Arithmetische Theorie der kubische Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, Math. Z., t. 31, 1930, p. 565-582.

[11] HONDA (T.). - Pure cubic fields whose class numbers are multiples of three, J. Number Theory, t. 3, 1971, p. 7-12.

[12] JAEGER (C.). - A character symbol for primes relative to a cubic field, Amer. J. of Math., t. 52, 1930, p. 85-96.

[13] KOBAYASHI (S.). - On the 3-rank of the ideal class groups of certain pure cubic fields, J. of Fac. of Sc., Univ. of Tokyo, Section 1, t. 20, 1973, p. 209-216, et t. 21, 1974, p. 263-269.

[14] MARKOFF (A.). - Sur les nombres entiers dépendant d'une racine cubique, Mem. Acad. Imp. Sc. St Pétersbourg, Série 8, t. 38, 1892, p. 1-37.

[15] WAHLIN (G. E.). - The factorization of the rational primes in a cubic domain, Amer. J. of Math., t. 44, 1922, p. 191-203.

(Texte reçu le 7 avril 1975)

Pierre BARRUCAND
151 rue du Château des Rentiers
75013 PARIS