Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

PHILIPPE TOFFIN

Conditions suffisantes d'équirépartition modulo 1. Problème de Waring-Goldbach pour $f(x) = x^c$, c non entier

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1974-1975), exp. nº 15, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 15, 6 p.

3 mars 1975

CONDITIONS SUFFISANTES D'ÉQUIRÉPARTITION modulo 1 . PROBLÈME DE WARING-GOLDBACH POUR $f(x) = x^c$, c NON ENTIER

par Philippe TOFFIN

Dans tout ce qui suit, pour x réel, on pose $e(x) = \exp 2i\pi x$ et $[x]$ la valeur entière de x par défaut.

1. Conditions suffisantes d'équirépartition modulo 1 .

Nous donnons une amélioration du lemme fondamental démontré dans l'appendice du livre de HUA [4].

LEMME 0. - *Il existe* A , B , C *réels strictement positifs tels que, pour tout polynôme* $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ *de degré* $n \geqslant 2$, *pour tous entiers* N *et* P *tels que* $0 < 2n|a_n| P \leqslant 1$, *et pour tout réel* λ *situé dans* $]0 , 1[$, *on ait* :

$$|\sum_{x=N+1}^{N+P} e(f(x))| \leqslant A \exp(Bn(\log^2 n + \log^2 \lambda)) \log P \, P^{1-(\lambda/(18n^2 \log n/\lambda))} + C/(|a_n|^{1/(n-\lambda)}) .$$

LEMME 1. - *Soient* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $k \longrightarrow Q_k$, *et* $k \longrightarrow P_k$ *deux suites telles que* :

Q_k *est non décroissante* ;

P_k *et* Q_k *ont pour limite* $+\infty$.

Pour tout k *assez grand*, $P_k < Q_{k-1}$. *Soit* $S(N) = \sum_{x=1}^{N} e(f(x))$.

On suppose que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, k_0(\varepsilon)$, $\forall\, k \geqslant k_0(\varepsilon)$, $\forall\, N \in [Q_{k-1} , Q_k]$,

$$|S(N - [P_k]) - S(N)| \leqslant \varepsilon[P_k] .$$

Alors

$$\lim_{N\to\infty} S(N)/N = 0 .$$

THÉORÈME 1. - *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe 4 suites* :

$k \longrightarrow t_k \in \mathbb{N} - \{0 , 1\}$,

$k \longrightarrow \lambda_k \in]0 , 1[$,

$k \longrightarrow P_k$,

$k \longrightarrow Q_k$,

telles que :

Q_k *est non décroissante* ;

Q_k , P_k et $Q_{k-1} - P_k$ ont pour limite $+\infty$.

On suppose qu'il existe x_0 tel qu'en tout $x \geqslant x_0$, f admette une dérivée continue à l'ordre $1 + t_k$, pour tout k . Enfin on suppose :

$$(\alpha) \quad \lim_{k\to+\infty} \sup_{Q_{k-1}-P_k \leq x \leq Q_k} P_k^{1+t_k} \left|\frac{f^{(1+t_k)}(x)}{(1+t_k)!}\right| = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{k\to+\infty} \sup_{Q_{k-1} \leq x \leq Q_k} 2t_k\, P_k \left|\frac{f^{(t_k)}(x)}{t_k!}\right| = 0$$

$$(\gamma) \quad \lim_{k\to+\infty} \inf_{Q_{k-1} \leq x \leq Q_k} P_k \left|\frac{f^{(t_k)}(x)}{t_k!}\right|^{1/(t_k-\lambda_k)} = +\infty$$

$$(\delta) \quad \lim_{k\to+\infty} \exp(Bt_k(\log^2 t_k + \log^2 \lambda_k)) \log P_k\, P_k^{-(\lambda_k/(18t_k^2 \log(t_k/\lambda_k)))} = C$$

(B étant la constante du lemme 0).

Alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 .

Du théorème 1, on tire le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un entier $t \geqslant 2$, un réel λ dans $]0 , 1[$, et x_0 réel tels que f admette, en tout $x \geqslant x_0$, une dérivée continue à l'ordre $1 + t$. On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(1) φ est non décroissante et non majorée,

(2) $\lim_{x\to+\infty} x - \varphi(x) = +\infty$,

(3) $\exists M , \forall x \geqslant x_0 , \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x - \varphi x))} \leqslant M$,

(A) $\lim_{x\to+\infty} \varphi^{1+t}(x)\, f^{(1+t)}(x) = 0$,

(B) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\, f^{(t)}(x) = 0$,

(C) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\, |f^{(t)}(x)|^{1/(t-\lambda)} = +\infty$.

Alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 .

Exemples.

- En prenant $\varphi(x) = x^u$, $0 < u < 1$, on retrouve l'équirépartition de $(P^c(n))_{n\in\mathbb{N}}$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré k , c un réel > 0 tel que kc non entier.

- Soient k un entier $\geqslant 2$, $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty ;$$

il existe β et $\varepsilon > 0$ tels que $h(x) \ll x^\beta$ et $h'(x)/h(x) \ll 1/(x^{(1/k)+\varepsilon})$. Soit g holomorphe au voisinage de l'infini, réelle sur la partie de $\mathbb{R}$ où elle est définie, et vérifiant $g(\infty) \neq 0$. Soit f telle que

$$f^{(k)}(x) = \frac{g(x)}{x \log^{\alpha} h(x)} \quad \text{où} \quad \alpha > 0 .$$

Alors $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 .

Nous donnons maintenant une généralisation du théorème de Fejer (pour les fonctions deux fois continûment différentiables.

LEMME 3. - Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ayant une dérivée seconde continue. On suppose qu'il existe φ vérifiant (1), (2), (3) du théorème 2, et que

$\lim_{x\to+\infty} \varphi^2(x)\, f''(x) = 0$,

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$,

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\,|f'(x)| = +\infty$.

Alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 .

G. RAUZY [6] a étudié l'équirépartition des suites $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque f est est entière $(f(x) = \sum_{n\geq 0} v_n x^n)$ et que v_n décroit rapidemant vers 0 . Ces fonctions vérifient les hypothèses du théorème 1. Ce même théorème permet de montrer que la suite $f(n) = \sum_{j\geq 0} e^{-j^6} n^j + \log n$ est équirépartie (f est seulement analytique).

Equirépartition de suites $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite croissante des nombres premiers.

THÉORÈME 3. - Soient f et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que :

(1) φ est non décroissante,

(2) $\varphi(x) \ll \varphi(\frac{x}{2})$,

(3) $x^{(1/2)+\varepsilon} \ll \varphi(x) \ll x^{1-\varepsilon}$,

(4) $\varphi(x)\,|f^{(k)}(x)|^{1/(k-\varepsilon)} \gg x^{\varepsilon} \quad (k \geq 2)$,

(5) $\varphi^{k+1}(x)\, f^{(k+1)}(x) \ll x^{-\varepsilon}$,

(6) $f^{(k)}(x) \ll x^{-(5k/8)-\varepsilon}$,

(7) $|f^{(k)}(x)| \ll |kf^{(k)}(x) + xf^{(k+1)}(x)| \ll |f^{(k)}(x)|$.

Alors la suite $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 .

Les deux lemmes suivants permettent, en utilisant la méthode employée par G. RHIN dans [7], d'obtenir le théorème 3.

LEMME 4. - Soit $S = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \psi(y) \sum_{x\in\mathcal{X}} e(f(t^2 xy))$, où t et N sont entiers, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ deux parties de $\mathbb{N}$ dépendant de t et de N , $t^2 xy \leq N$,

$$t^{-1} N^{0,24} \ll y \ll t^{-1} N^{0,5} ,$$

et où ψ vérifie, pour $Y^{0,6} \leq Y' \leq Y \leq N$,

$$\sum_{Y-Y'<y\leq Y} |\psi(y)| \ll Y' \log N \quad \text{et} \quad \sum_{Y-Y'<y\leq Y} |\psi(y)|^2 \ll Y' \log^3 N .$$

Alors il existe $\rho > 0$ tel que $S \ll t^{-1,1} N^{1-\rho}$.

LEMME 5. - Soit $S = \sum_{d\in\mathcal{D}} \sum_{M'<x\leq M, dx\leq N} e(f(dx))$, où $\mathcal{D}$ est une partie de $\underline{N}$ dépendant de N , et $N^{0,75} \leq M/4 \leq M' \leq M/2 < M \leq N$.

Alors il existe $\rho > 0$ tel que $S \ll N^{1-\rho}$.

Application. - Soit $f(x) = (P(x))^c$, où $P \in \mathbb{R}[X]$, $d^0 P = k$, c réel > 0 .

- Si kc n'est pas entier, $(P^c(p_n))_{n\in\underline{N}}$ est équirépartie modulo 1 .

- Si kc est entier, il existe un polynôme Q de degré kc , et ψ holomorphe 0 , nulle en 0 telle que $f(x) = Q(x) + \psi(\frac{1}{x})$. On est ramené à l'équirépartition de $Q(p_n)$ (cf. [7]).

2. Problème de Waring-Goldbach pour $f(x) = x^c$, c réel non entier > 12 .

On veut montrer qu'il existe $\ell = \ell(c)$ tel que tout entier N assez grand s'écrive

(1) $N = [p_1^c] + \dots + [p_\ell^c]$, où les p_i sont premiers.

Soit $r_\ell(N)$ le nombre de représentations de N sous la forme (1). $G(c)$ est le plus petit entier ℓ vérifiant la condition précédente. On pose $\gamma = 1/c$ et $r = \log N$.

THÉORÈME 1. - Pour $\ell \geq 1650c^3 \log c$, on a

$$r_\ell(N) = \frac{(\Gamma(\gamma))^\ell}{\Gamma(\gamma\ell)} \frac{N^{\gamma\ell-1}}{\log^\ell N} + o\left(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{\log^\ell N}\right) .$$

THÉORÈME 2.

$$G(c) \leq [c + 1] + 4c\left(\log c + \frac{1}{2} \log \log c + 5,8\right) .$$

On sait que $r_\ell(N) = \int_I \left(\sum_{p\leq N^\gamma} e(\alpha[p^c])\right)^\ell e(-\alpha N)\, d\alpha$, où I est un intervalle de longueur 1 .

Soit $\varphi(\alpha) = \sum_{p\leq N^\gamma} e(\alpha[p^c])$

Lorsque $|\alpha|$ est petit $(|\alpha| \leq \tau^{-1})$, on écrit

$$\varphi(\alpha) = \sum_{N_1} \sum_{N_1-A<p\leq N_1} e(\alpha[p^c]) \text{ , où } A \text{ est fonction de } N .$$

On remplace $e(\alpha[p^c])$ par $e(\alpha N_1^c)$. En utilisant le théorème de La Vallée Poussin sur le nombre de nombres premiers dans un intervalle, on arrive à

$$\varphi(\alpha) = \int_2^{N^\gamma} \frac{e(\alpha x^c)}{\log x}\, dx + O(\tau^{-1} AN) + O(N^{2\gamma} \exp(c_1 \sqrt{r})\, A^{-1}) \text{ , où } c_1 > 0 ,$$

l'erreur sur $\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} (\varphi(\alpha))^\ell e(-\alpha N)\, d\alpha$ est

$$\ll (N^{\gamma\ell-1}/r^\ell)\, r(\tau^{-2} AN^{2-\gamma} + \tau^{-1} N^{1+\gamma} A^{-1} \exp(-c_1 \sqrt{r})) .$$

Pour obtenir une erreur qui soit $o(N^{\gamma\ell-1}/r^{\ell})$, il faut que

$$\tau^{-2}\ AN^{2-\gamma}\ \tau^{-1}\ N^{1+\gamma}\ A^{-1}\ \exp(-\ c_1\ \sqrt{r})\quad \text{soit}\quad o(1)\ ,$$

c'est-à-dire $\tau^{-1} = o(\exp(1/3)c_1\ \sqrt{r}/N)$. On prend $\tau^{-1} = r^{\sigma}/N$ où $\sigma > 0$. On obtient alors

$$\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} (\varphi(\alpha))^{\ell}\ e(-\ \alpha N)\ d\alpha = \frac{(\Gamma(\gamma\ell))^{\ell}}{\Gamma(\gamma\ell)}\ \frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^{\ell}} + o(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^{\ell}})\ .$$

Or la méthode de VINOGRADOV [9] ne permet d'obtenir une majoration

$$\varphi(\alpha) \ll N^{\gamma(1-\rho)}$$

où $\rho > 0$ que si $\|\alpha\| \geqslant N^{\varepsilon}/N$, $\varepsilon > 0$, ce qui donne en posant $\lambda^{-1} = N^{(\gamma/4)-1}$:

$$\int_{\lambda^{-1}}^{1-\lambda^{-1}} (\varphi(\alpha))^{\ell}\ e(-\ \alpha N)\ d\alpha = o(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^{\ell}})\quad \text{dès que}\ \ \ell\ \ \text{est assez grand.}$$

A la différence de J.-M. DESHOUILLERS qui a traité le problème de Waring (les p_i ne sont plus nécessairement premiers), nous avons ici deux sortes d'intervalles complémentaires : $(\lambda^{-1}\ ,\ 1 - \lambda^{-1})$ et $(\tau^{-1}\ ,\ \lambda^{-1})$.

Lorsque $\tau^{-1} \leq |\alpha| \leq \lambda^{-1}$, on obtient :

$$\varphi(\alpha) \ll N^{\gamma}\ r^{-\sigma_0}\quad \text{où}\ \ \sigma_0\ \ \text{est}\ \ > 0\ \ \text{quelconque.}$$

En utilisant

$$\int_{r^{\sigma}/N}^{N^{(\gamma/4)-1}} |\varphi(\alpha)|^{2t}\ d\alpha \ll N^{\gamma(2t-c)}$$

pour t entier $\geqslant 3c^3(\log c + 14)$, on arrive à

$$\int_{\tau^{-1}}^{\lambda^{-1}} (\varphi(\alpha))^{\ell}\ e(-\ \alpha N)\ d\alpha = O(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^{\ell}})$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] DESHOUILLERS (J.-M.). - Problème de Waring avec exposants non entiers, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 285-295.

[2] ESTERMANN (T.). - Introduction to modern prime number theory. - Cambridge, at the University Press, 1952 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 41).

[3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, New edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1968.

[4] HUA (L. K.). - Additive theory of prime numbers. Translated from the Chinese. - Providence, American mathematical Society, 1965 (Translations of mathematical Monographs, 13).

[5] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, London, Sydney [etc.], J. Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).

[6] RAUZY (G.). - Fonctions entières et répartition modulo 1 , II, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 185-192.

[7] RHIN (G.). - Sur la répartition modulo 1 des suites f(p) , Acta Arithmetica, Warszawa, t. 23, 1973, p. 217-248.

[8] TITCHMARSCH (E. C.). - The theory of the Riemann zeta function. - Oxford, at the Clarendon Press, 1951.

[9] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated from the Russian. - London, New York, Interscience Publishers, 1954.

(Texte reçu le 3 mars 1975)

Philippe TOFFIN
U.E.R. de Sciences
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX