Marc Reversat

Sur les discrépances

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1973-1974), exp. nº G13, p. G1-G7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G13, 7 p.

22 avril 1974

SUR LES DISCREPANCES

par Marc REVERSAT

(d'après W. M. SCHMIDT [8], [9])

1. Minoration de la discrépance d'une suite modulo 1 .

Etant donnés $\omega = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de l'intervalle $[0 , 1[$, et α un élément de $[0 , 1[$, on pose

$$Z(n , \alpha) = \#\{k ; \ 1 \leq k \leq n , \xi_k \in [0 , \alpha[\}$$

$$D(n , \alpha) = |Z(n , \alpha) - n\alpha|$$

$$D(n) \quad = \sup_{\alpha\in[0,1[} D(n , \alpha) .$$

En 1935, Van der CORPUT posa le problème de savoir si la discrépance d'une suite modulo 1 peut être finie [4].

En 1945, Mme Van AARDENNE-EHRENFEST [1] montra que la discrépance n'est jamais bornée, et, en 1949, elle précisa ce résultat [2] :

$$\lim_{n>0} \sup(D(n) \frac{\log \log \log n}{\log \log n}) > 0 .$$

En 1954, K. F. ROTH améliora ce résultat [7] en prouvant

$$\lim_{n>0} \sup(\frac{D(n)}{(\log n)^{\frac{1}{2}}}) > 0 .$$

Enfin, en 1972 W. M. SCHMIDT montra [9] :

$$\lim_{n>0} \sup(\frac{D(n)}{\log n}) > 0 . \tag{1}$$

Ce résultat est le meilleur possible comme le montre la discrépance de la suite (nx) mod 1 lorsque x est de constante de Markov finie, ou encore la discrépance de la suite de Van der CORPUT

$$(n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_s q^s \longrightarrow u_n = \frac{a_0}{q} + \frac{a_1}{q^2} + \ldots + \frac{a_s}{q^{s+1}}) .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f(n , \alpha) = Z(n , \alpha) - n\alpha$; et si I est un intervalle entier, α un élément de $[0 , 1[$, posons

$$g^+(I , \alpha) = \sup_{n\in I} f(n , \alpha)$$

$$g^-(I , \alpha) = \inf_{n\in I} f(n , \alpha)$$

$$h(I , \alpha) \ = g^+(I , \alpha) - g^-(I , \alpha) .$$

L'étude de la discrépance revient à celle, plus aisée, de la fonction h .

Le résultat (1) de W. M. SCHMIDT découle de l'étude de la valeur moyenne de la fonction h .

PROPOSITION 1. - Soient t un entier positif, et $\beta \in [0 , 1[$. Soit I un intervalle entier de longueur $\ell(I) \geq 4^t$. Alors

$$4^{-t} \sum_{j=1}^{4^t} h(I , \beta + j4^t) \geq 2^{-5} t .$$

Cette proposition entraîne le résultat (1) en considérant n'importe quel point β et l'intervalle $I =]0 , 4^t]$. Cette proposition se montre par récurrence sur t . Le cas $t = 1$ est immédiat, et pour passer du rang t au rang $t + 1$, W. M. SCHMIDT utilise l'inégalité (fondamentale) suivante.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha , \beta \in [0 , 1[$, posons

$$f(n , \alpha , \beta) = f(n , \alpha) - f(n , \beta) .$$

Pour tout intervalle entier I , posons

$$g^+(I , \alpha , \beta) = \sup_{n \in t} f(n , \alpha , \beta) ,$$

$$g^-(I , \alpha , \beta) = \inf_{n \in I} f(n , \alpha , \beta) ,$$

et pour deux intervalles entiers J et J' :

$$h(J,J',\alpha,\beta) = \max(g^-(J,\alpha,\beta) - g^+(J',\alpha,\beta) ; g^-(J',\alpha,\beta) - g^+(J,\alpha,\beta)) .$$

LEMME 1. - Soient I , J et J' des intervalles entiers tels que $J \subset I$ et $J' \subset I$. Soient α et β deux éléments de $[0 , 1[$. Alors :

$$h(I,\alpha) + h(I,\beta) \geq h(J,J',\alpha,\beta) + \frac{1}{2} (h(J,\alpha) + h(J,\beta) + h(J',\alpha) + h(J',\beta)) .$$

Cette inégalité est non triviale lorsque $h(J , J' , \alpha , \beta) > 0$. La difficulté est d'ailleurs d'utiliser cette inégalité de façon que $h(J , J' , \alpha , \beta)$ soit grand. Pour ce faire, W. M. SCHMIDT procède de la façon suivante :

Supposons la propriété vraie pour t , et soit I un intervalle entier de longueur $\ell(I) \geq 4^{t+1}$.

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$Z(n , \beta) = Z(n , \{\beta\}) + n(\beta - \{\beta\})$$

(où $\{\beta\}$ désigne la partie fractionnaire de β), et

$$f(n , \beta) = Z(n , \beta) - n\beta \qquad (= f(n , \{\beta\})) ,$$

et remarquons que $Z(n , \beta + 1) - Z(n , \beta) = n$. Donc, si $I =]a , b]$:

$$Z(a+2.4^t , \beta+1) - Z(a+2.4^t , \beta) - (Z(a+4^t , \beta+1) - Z(a+4^t , \beta)) = 4^t .$$

Pour $j = 1 ,..., 4^{t+1}$, posons $Z_j = \beta + 4^{(t+1)}$, et

$$Z_j = Z(a+2.4^t , \alpha_j) - Z(a+2.4^t , \alpha_{j-1}) - (Z(a+4^t , \alpha_j) - Z(a+4^t , \alpha_{j-1})) .$$

D'après ce qui précède, on a

$$\sum_{j=1}^{4^{t+1}} z_j = 4^t .$$

Comparons Z_j et $h(J , J' , \alpha_j , \alpha_{j-1})$ pour

$$J =]a \, , \, a + 4^t] \quad \text{et} \quad J' =]a + 2.4^t \, , \, a + 3.4^t]$$

par définition de Z_j , on a, pour tout $n \in J$, $n' \in J'$

$$Z(n' , \alpha_j) - Z(n' , \alpha_{j-1}) - (Z(n , \alpha_j) - Z(n , \alpha_{j-1})) \geq Z_j$$

donc

$$f(n' , \alpha_j , \alpha_{j-1}) - f(n , \alpha_j , \alpha_{j-1}) \geq Z_j - (n' - n)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) ,$$

et $(n' - n)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \leq 3/4$, donc

$$\begin{aligned} f(n' , \alpha_j , \alpha_{j-1}) - f(n , \alpha_j , \alpha_{j-1}) &\geq Z_j - \frac{3}{4} \\ &\geq \frac{3}{4} Z_j \quad \text{si} \quad Z_j > 0 . \end{aligned}$$

On voit donc que si $Z_j > 0$, $h(J , J' , \alpha_j , \alpha_{j-1})$ est "grand". Par suite, si $Z_j > 0$, et en appliquant le lemme 1,

$$h(I,\alpha_j) + h(I,\alpha_{j-1}) \geq \frac{3}{4} Z_j + \frac{1}{2} (h(J,\alpha_j) + h(J',\alpha_j) + h(J,\alpha_{j-1}) + h(J',\alpha_{j-1}))$$

et cette inégalité est trivialement vraie si $Z_j = 0$. En sommant sur j , et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut alors conclure.

2. Etude des intervalles de restes bornés.

Antérieurement au résultat précédent, par la même méthode, mais de façon plus complexe, W. M. SCHMIDT a répondu à un problème de P. ERDÖS sur la mesure de l'ensemble des $\alpha \in [0 , 1[$ pour lesquels la discrépance d'une suite $D(n , \alpha)$ est majorée indépendamment de n [8].

Pour une suite donnée d'éléments de $[0 , 1[$, on note :

$$S(K) = \{\alpha \; ; \; D(n , \alpha) \leq K \, , \; \forall \, n \in \mathbb{N}\}$$

$$S(\infty) = \bigcup_{K>0} S(K) .$$

THÉORÈME 1. - $S(\infty)$ est dénombrable.

Le résultat est réalisé par certaines suites, par exemple la suite (nx) mod 1 lorsque x est de constante de Markov finie([5], [6]). Ce théorème résulte du suivant.

THÉORÈME 2. - Si $d > 4K$, on a $S^{(d)}(K) = \emptyset$, où $S^{(d)}(K)$ désigne l'ensemble d-ième, dérivé de $S(K)$.

Pour montrer le théorème 2, W. M. SCHMIDT a, comme précédemment, étudié la valeur moyenne de la fonction h .

PROPOSITION 2. - Soient $d > 0$ un entier, $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Soit R une partie de $[0 , 1[$ telle que $R^{(d)} \cap]0 , 1[\neq \emptyset$. Alors il existe $w = 2^d$ points $\lambda_1 , \dots , \lambda_w$ de R et un entier p tel que

$$w^{-1} \sum_{j=1}^{w} h(]0 , p] , \lambda_j) > \frac{1}{2} (d + 1) - \varepsilon .$$

Si cette proposition est vraie, il existe j tel que

$$h(]0\ ,\ p]\ ,\ \lambda_j) > \frac{1}{2}(d+1) - \varepsilon\ ,$$

donc il existe un entier m tel que :

$$D(m\ ,\ \lambda_j) > \frac{1}{4}(d+1) - \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

D'où $\lambda_j \notin S(\frac{1}{4}(d+1) - \varepsilon)$.

Posons $R = S(\frac{1}{4}(d+1) - \varepsilon)$. Ce qui précède montre que $R^{(d)} \cap\ ]0\ ,\ 1[\ = \emptyset$, donc $R^{(d+1)} \cap [0\ ,\ 1[\ = \emptyset$. Donc, si $(d+1) > 4K$, on a

$$S^{(d+1)}(K) = \emptyset\ .$$

Par conséquent, la proposition 2 entraîne le théorème 2. La proposition 2 résulte de la proposition 3, plus commode à démontrer par récurrence.

PROPOSITION 3. - Soient $d > 0$ un entier, $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Soit R une partie de $[0\ ,\ 1[$ telle que $R^{(d)} \cap\ ]0\ ,\ 1[\ \neq \emptyset$. Alors il existe $w = 2^d$ éléments $\lambda_j \in R$ $(j = 1\ ,\ \dots\ ,\ w)$, pour chaque $j = 1\ ,\ \dots\ ,\ w$ un voisinage L_j de λ_j , et un entier p tels que :

$$w^{-1} \sum_{j=1}^{w} h(I\ ,\ \mu_j) > \frac{1}{2}(d+1) - \varepsilon$$

pour tout intervalle entier I de longueur $\ell(I) \geq p$, et pour $\mu_1 \in L_1, \dots, \mu_w \in L_w$.

Cette proposition se démontre par récurrence sur d . Le cas $d = 0$ est l'objet d'un lemme particulier. Nous allons examiner le passage du rang $(d-1)$ au rang d . Supposons donc que cette proposition est vraie au rang $(d-1)$. Par conséquent, si $\varepsilon > 0$ et $R^{(d)} \cap\ ]0\ ,\ 1[\ \neq \emptyset$, il existe $t = 2^{d-1}$ éléments $\theta_1, \dots, \theta_t$ de $R^{(1)}$, pour $j = 1\ ,\ \dots\ ,\ t$ un voisinage D_j de θ_j , et un entier p_{d-1} tels que

$$t^{-1} \sum_{j=1}^{d} h(I\ ,\ \zeta_j) > \frac{1}{2} d - \varepsilon$$

pour $\zeta_j \in D_j$ $(j = 1\ ,\ \dots\ ,\ t)$ et pour tout intervalle entier I de longueur $\ell(I) > p_{d-1}$.

Etant donné j $(j = 1\ ,\ \dots\ ,\ t)$, on peut trouver deux points α_j et β_j , des voisinages A_j et B_j de α_j et β_j respectivement, avec $A_j \subset D_j$ et $B_j \subset D_j$, et l'on a pour tout intervalle entier I suffisamment grand et pour J et J' , intervalles entiers inclus dans I ;

$$\sum_{j=1}^{t} h(I\ ,\ \alpha'_j) + h(I\ ,\ \beta'_j) > \sum_{j=1}^{t} h(J\ ,\ J'\ ,\ \alpha'_j\ ,\ \beta'_j)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} (h(J,\alpha'_j) + h(J',\alpha'_j) + h(J,\beta'_j) + h(J',\beta'_j))$$

pour $\alpha'_j \in A_j$, $\beta'_j \in B_j$ $(j = 1\ ,\ \dots\ ,\ t)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit que, pour conclure, il faut que $\sum_{j=1}^{t} h(J\ ,\ J'\ ,\ \alpha_j\ ,\ \alpha_{j-1})$ soit grand $(\geq t(1 - 2\varepsilon))$. C'est le lemme suivant qui permet à W. M. SCHMIDT de trouver pour $j = 1\ ,\ \dots\ ,\ t$, A_j , B_j , J et J' tels que $h(J\ ,\ J'\ ,\ \alpha_j\ ,\ \alpha_{j-1})$ soit grand.

LEMME 2. - Soient $\varepsilon > 0$ un réel et $q \geq 1$ un entier. Soient α, β des éléments de $]0, 1[$ tels que

$$0 < |\alpha - \beta| < \frac{\varepsilon}{8q} .$$

Alors il existe un entier p et des voisinages A de α, B de β tels que, pour tout $\gamma \in A$, $\delta \in B$ et pour tout intervalle entier I de longueur $\ell(I) \geq p$, il existe deux intervalles entiers J et J' inclus dans I, tels que :

$$\ell(J) = \ell(J') = q$$

$$h(J, J', \gamma, \delta) > 1 - \varepsilon .$$

Preuve. - On peut supposer $\alpha < \beta$, et il suffit de montrer que, pour tout $n \in J$, $n' \in J'$, on a $f(n, \gamma, \delta) - f(n', \gamma, \delta) > 1 - \varepsilon$, au lieu de

$$h(J, J', \gamma, \delta) > 1 - \varepsilon .$$

Nous allons d'abord montrer qu'il existe des voisinages A de α, B de β tels que, pour tout intervalle entier I_0 de longueur $\ell(I_0) \geq p_0 = [(\beta - \alpha)^{-1}]$, on ait : Pour tout $\gamma \in A$, $\delta \in B$, $\psi \in \underset{\sim}{R}$, il existe deux entiers m et n tels que

$$\begin{cases} n \in I_0 \\ 0 < n(\delta - \gamma) - m - \psi < \frac{\varepsilon}{2} . \end{cases}$$

Considérons les nombres $(\beta - \alpha)$, $2(\beta - \alpha)$, ..., $p_0(\beta - \alpha)$. Comme $0 < \beta - \alpha < \frac{\varepsilon}{8q}$, pour tout $\psi \in \underset{\sim}{R}$, il existe deux entiers n et m tels que

$$(1) \quad \begin{cases} 1 \leq n \leq p_0 \\ |n(\beta - \alpha) - m - \psi| < \frac{\varepsilon}{8} . \end{cases}$$

Soient A et B les voisinages de α et β respectivement définis par

$$A = \{\gamma \ ; \ 16|\gamma - \alpha| \max(q, p_0) < \varepsilon\} ,$$

$$B = \{\delta \ ; \ 16|\delta - \beta| \max(q, p_0) < \varepsilon\} .$$

Alors (1) donne :

$$(2) \quad \begin{cases} 1 \leq n \leq p_0 \\ |n(\delta - \gamma) - m - \psi| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour tout } \gamma \in A, \ \delta \in B . \end{cases}$$

En remplaçant ψ par $\psi + \frac{\varepsilon}{4}$, il vient

$$\begin{cases} 1 \leq n \leq p_0 \\ 0 < n(\delta - \gamma) - m - \psi < \frac{\varepsilon}{2} , \end{cases}$$

et ceci est encore vrai pour tout intervalle entier I_0 de longueur $\ell(I_0) \geq p_0$ (et non plus seulement pour $I_0 =]0, p_0]$).

Montrons maintenant que si $\gamma \in A$ et $\delta \in B$, et si I_0 est un intervalle entier de longueur $\ell(I_0) > p_0$, il existe n_0 et n_0' appartenant à I_0 tels que

$$f(n_0 , \delta , \gamma) - f(n'_0 , \delta , \gamma) > 1 - \frac{1}{2}\varepsilon .$$

Soit $n'_0 \in I_0$ tel que $f(n'_0 , \delta , \gamma) = \min_{n \in I_0} f(n , \delta , \gamma)$. Il existe deux entiers m et $n_0 \in I_0$ tels que

$$0 < n_0(\delta - \gamma) - m + f(n'_0 , \delta , \gamma) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

On a

$$Z(n_0,\delta) - Z(n_0,\gamma) = f(n_0,\delta,\gamma) + n_0(\delta-\gamma) \geqslant f(n'_0,\delta,\gamma) + n_0(\delta,\gamma) > m .$$

Donc

$$Z(n_0 , \delta) - Z(n_0 , \gamma) \geqslant m + 1 .$$

Par suite

$$\begin{aligned} f(n_0 , \delta , \gamma) - f(n'_0 , \delta , \gamma) &\geqslant m + 1 - n_0(\delta - \gamma) - f(n'_0 , \delta , \gamma) , \\ &> m + 1 - m - \frac{1}{2}\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon . \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Posons $p = p_0 + 2q$. Montrons que p , les voisinages A de α et B de β , définis précédemment, répondent à la question.

Soit $I =]a , b]$ un intervalle entier de longueur $\ell(I) \geqslant p$. Posons

$$I_0 =]a + q , a + q + p_0] ,$$

et soient n_0 et n'_0 les entiers correspondant à cet intervalle I_0 et à des éléments $\gamma \in A$, $\delta \in B$. Posons

$$J =]n_0 , n_0 + q] , \quad J' =]n'_0 - q , n'_0] .$$

On a pour $n \in J$, $n' \in J'$

$$f(n,\delta,\gamma) - f(n_0,\delta,\gamma) \geqslant - (\delta-\gamma)(n-n_0) \geqslant - q(\delta-\gamma) \geqslant - \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{car} |\delta-\gamma| < \frac{\varepsilon}{4q}) ,$$

$$f(n' , \delta , \gamma) - f(n'_0 , \delta , \gamma) \leqslant - (\delta - \gamma)(n' - n'_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} .$$

Donc

$$\begin{aligned} f(n,\delta,\gamma)-f(n',\delta,\gamma) &= (f(n,\delta,\gamma)-f(n_0,\delta,\gamma))+(f(n_0,\delta,\gamma)-f(n'_0,\delta,\gamma))-(f(n',\delta,\gamma)-f(n'_0,\delta,\gamma)) \\ &\geqslant 1 - \varepsilon . \end{aligned}$$

3. Un problème non résolu.

Le résultat de K. F. ROTH sur la minoration des discrépances des suites modulo 1 peut s'énoncer à plusieurs dimensions [7] : si D_d désigne la discrépance d'une suite d'éléments de $[0 , 1[^d$, il existe une constante $C_d > 0$ telle que

$$D_d(n) > C_d(\log n)^{d/2} \quad \text{pour une infinité de } n .$$

La méthode de W. M. SCHMIDT, rappelée au paragraphe 1, ne permet pas d'améliorer ce résultat dès que $d \geq 2$. Il se pose donc toujours le problème d'atteindre la meilleure minoration possible (à une constante multiplicative près) de la discrépance des suites en dimension $d \geq 2$.

Nous avons vu que, en dimension 1 , la suite (nx) modulo 1 réalise la meilleure discrépance possible (à une constante multiplicative près) lorsque x est de constante de Markov finie. Signalons alors le résultat qui se déduit facilement d'un résultat de W. W. ADAMS ([3]) : Soit $x = (x_1, \ldots, x_d) \in]0, 1[^d$, et supposons que

$$M_d(x) = \limsup_{n>0} (1/n^{1/d} \sup_{i=1,\ldots,q} \|nx_i\|)$$

(où $\|.\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche) soit fini (dans le cas $d = 1$, $M_1(x)$ est la constante de Markov de x). Soit K un hypercute de côté de longueur ξ de $]0, 1[^d$, et soit $Z(n, K)$ le nombre d'entiers k tels que $1 < k \leq n$ et $kx \in K \pmod{\underset{\sim}{Z}^d}$. Soit

$$D(n, K) = |Z(n, K) - n\xi^d| .$$

Alors

$$D(n, K) = O(\xi^{d-1} n^{1-(1/d)}) + O(\log n) + O(1)$$

uniformément par rapport à l'hypercube K .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AARDENNE-EHRENFEST (T. van). - Proof of the impossibility of a just distribution, Indag. Math., Amsterdam, t. 7, 1945, p. 71-76.

[2] AARDENNE-EHRENFEST (T. van). - On the impossibility of a just distribution, Indag. Math., Amsterdam, t. 11, 1949, p. 264-269.

[3] ADAMS (W. W.). - Simultaneous asymptotic diophantine approximations, Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 173-180.

[4] CORPUT (J. G. van der). - Verteilungsfunktionen, Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch., t. 38, 1935, p. 1058-1066.

[5] KESTEN (H.). - On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod. 1 , Acta Arithmetica, Warszawa, t. 12, 1966, p. 193-212.

[6] LESCA (J.). - Sur la répartition modulo 1 des suites $(n\alpha)$, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 2, 9 p.

[7] ROTH (K. F.). - On irregularities of distribution, Mathematika, London, t. 1, 1954, p. 73-79.

[8] SCHMIDT (W. M.). - Irregularities of distribution, VI., Compositio Math., Groningen, t. 24, 1972, p. 63-74.

[9] SCHMIDT (W. M.). - Irregularities of distribution, VII., Acta Arithmetica, Warszawa, t. 21, 1972, p. 45-50.

(Texte reçu le 4 mai 1974)

Marc REVERSAT
E. R. A. du C. N. R. S. n° 362
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
351 cours de la Libération
33405 TALENCE