Maurice Mignotte

Amélioration effective du théorème de Liouville

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1973-1974), exp. n° G4, p. G1-G5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G4, 5 p.

12 novembre 1973

AMÉLIORATION EFFECTIVE DU THÉORÈME DE LIOUVILLE

par Maurice MIGNOTTE

(d'après BAKER et FEL'DMAN)

1. Introduction.

En 1844, J. LIOUVILLE a montré que, pour tout nombre algébrique α de degré $n > 1$, il existe une constante $c = c(\alpha)$, calculable, telle que, pour tout nombre rationnel p/q , $(p , q) = 1$ et $q > 0$, on ait

(1) $$|\alpha - \frac{p}{q}| > cq^{-n} .$$

Cette inégalité fut ensuite améliorée, en particulier, par A. THUE, C. L. SIEGEL et K. F. ROTH qui remplacèrent l'exposant n par certains exposants $n' < n$, mais leur méthode ne permettait pas de calculer effectivement la valeur de la constante c correspondante.

Le premier à améliorer l'inégalité (1), tout en conservant un résultat effectif, fut A. BAKER [1]. Actuellement, le meilleur résultat est le suivant.

THÉORÈME 1 (FEL'DMAN [3]). - Soit α un nombre algébrique de degré $n \geqslant 3$. Il existe des constantes positives effectives ε et C , ne dépendant que de α , telles que, pour tout nombre rationnel p/q irréductible, $q > 0$, on ait l'inégalité

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > Cq^{\varepsilon-n} .$$

La démonstration utilise la méthode de Baker, BAKER en a donné une autre démonstration en [2].

Nous nous proposons uniquement de montrer comment les minorations de BAKER sur les formes linéaires du type

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m ,$$

où $\alpha_1 , \dots , \alpha_m$ et $\beta_1 , \dots , \beta_m$ sont algébriques, ont permis d'obtenir des théorèmes sur l'approximation diophantienne des nombres rationnels.

2. Une première réduction.

Il y a un lien très simple entre les améliorations effectives de l'inégalité 1 et la majoration des solutions entières x , y d'équations diophantiennes du type

(2) $$f(x , y) = m ,$$

où f est une forme irréductible binaire à coefficients entiers de degré $n \geqslant 3$, et où m est un entier positif.

PROPOSITION 1. - *Soit* $\Phi : [1, \infty[\to [a, \infty[$, *une fonction croissante. Considérons les assertions*

(i) *Si* x *et* y *sont solutions de* (2), *alors on a la majoration*

$$\max(|x| , |y|) < \Phi(m) .$$

(ii) *Si* α *est solution de l'équation* $f(\alpha , 1) = 0$, *et si* Ψ *désigne la fonction réciproque de la fonction* Φ , *alors il existe une constante* c_1 , *qui ne dépend que de* α , *effective, telle que, pour tout couple* p , q *d'entiers,* $(p,q)=1$, $q > 0$, *on ait l'inégalité*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > c_1 q^{-n} \Psi(\max(|p| , |q|)) .$$

Alors, (i) *implique* (ii).

Démonstration. - Soit α un nombre algébrique de degré $n \geqslant 3$ et de dénominateur d . Posons

$$f(X , Y) = d^n \operatorname{Norme}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(X - \alpha Y) .$$

Alors, f est bien une forme irréductible à coefficients entiers de degré $\geqslant 3$, et $f(\alpha , 1) = 0$.

Soit alors, p/q un nombre rationnel irréductible, $q > 0$ tel que l'on ait

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{\delta}{2} ,$$

où δ désigne le minimum du module de la différence entre deux conjugués de α distincts.

On a alors clairement

$$\begin{aligned} |\alpha - \frac{p}{q}| &> d^{-n}(2\delta^{-1})^{n-1} q^{-n} f(p , q) \\ &> d^{-n}(2\delta^{-1})^{n-1} q^{-n} \Psi(\max(|p| , |q|) \qquad \text{(d'après (i))}. \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

3. Formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques et équations diophantiennes.

Soit $f(X , Y)$ une forme binaire irréductible à coefficients entiers. Nous allons montrer qu'à une solution de l'équation

$$(2) \qquad f(x , y) = m \qquad (m \text{ entier})$$

correspond une forme linéaire à coefficients entiers en logarithmes de certains nombres algébriques qui prend une valeur très petite.

Il est facile de voir qu'on peut se ramener à l'étude des formes f dont le coefficient de x^n est égal à 1 .

Soit alors α une racine de l'équation $f(X , 1) = 0$. On désignera par $\alpha^{(1)} = \alpha , \alpha^{(2)} , \ldots , \alpha^{(n)}$ les conjugués de α .

Ainsi,

$$f(X , Y) = (X - \alpha^{(1)} Y) \dots (X - \alpha^{(n)} Y) .$$

Soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. On supposera les $\alpha^{(i)}$ ordonnés de telle sorte que $\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(s)}$ sont réels, et $\alpha^{(s+1)}, \dots, \alpha^{(s+t)}$ sont les conjugués respectifs de $\alpha^{(s+1+t)}, \dots, \alpha^{(n)}$; de sorte que $n = s + 2t$. D'où un plongement

$$\xi \longmapsto (\sigma_1(\xi) , \dots , \sigma_r(\xi)) \quad \text{de } K \text{ dans } \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t$$

et un homomorphisme

$$\xi \longmapsto L(\xi) = (\log|\sigma_1(\xi)| , \dots , \log|\sigma_r(\xi)|) \quad \text{de } K^\times \text{ dans } \mathbb{R}^r .$$

Posons $n_j = 1$ pour $j = 1 , \dots , s$, et 2 pour $j = s + 1 , \dots , s + t$. On définit les valuations archimédiennes de K, $\mathcal{R}_1 , \dots , \mathcal{R}_r$ par $|\xi|_{\mathcal{R}_j} = |\sigma_j(\xi)|$. Si on pose enfin $\beta = x - \alpha y$, où x et y sont solutions de (2), on a

$$\sum_{j=1}^{r} n_j \log(\varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_j}) = 0 . \tag{3}$$

Autrement dit, le point $(\varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_1} ,\dots, \varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_r})$ de $\mathbb{R}^r$ appartient à l'hyperplan W d'équation

$$\sum_{j=1}^{r} n_j w_j = 0 .$$

Mais on sait, d'autre part, que l'image par L du groupe des unités de K constitue un réseau T dans l'hyperplan W. On peut déterminer explicitement des unités $\eta_1 , \dots , \eta_{r-1}$ de K telles que $L(\eta_1) , \dots , L(\eta_{r-1})$ constituent une base du $\mathbb{Z}$-module T. On peut, de plus, calculer effectivement des constantes c_1 et c_2 telles que

$$|\eta_i|_{\mathcal{R}_j} \leq c_1 , \qquad 1 \leq i <\dots\leq r - 1 , \quad j = 1 ,\dots, r$$

$$\Delta = |\det(L(\eta_1) ,\dots, L(\eta_{r-1}))| \geq c_2 \qquad (\text{régulateur de } K)$$

(voir SIEGEL [4]).

Puisque T constitue un réseau dans W, on peut trouver des entiers $b_1,\dots,b_{r-1}$ tels que, si on pose, $\gamma = \beta\eta_1^{b_1} \dots \eta_{r-1}^{b_{r-1}}$, on a

$$\log(\varphi^{-1} |\gamma|_{\mathcal{R}_j}) \leq c_3 \qquad (1 \leq j \leq r) . \tag{4}$$

Posons $H = \max_{1\leq i\leq r-1} |b_i|$. De la définition de γ, il est clair que

$$\log|\beta/\gamma|_{\mathcal{R}_j} = - b_1 \log|\eta_1|_{\mathcal{R}_j} - \dots - b_{r-1} \log|\eta_{r-1}|_{\mathcal{R}_j} \qquad (1 \leq j \leq r - 1) ,$$

en résolvant ces équations on obtient l'existence d'une constante c_4 telle que

$$\max_{1\leq j\leq r-1} |\log|\beta/\gamma|_{\mathcal{R}_j}| \geq c_4 H .$$

Soit J tel que ce maximum soit atteint pour $j = J$. Alors

$$|\log(\varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_J})| \geq |\log|\beta/\gamma|_{\mathcal{R}_J}| - |\log|\varphi^{-1} |\gamma|_{\mathcal{R}_J}|| \geq c_4 H - c_3 .$$

Cette inégalité, jointe à (3), prouve l'existence d'un indice j tel que

$$\log(\varphi^{-1}\,|\beta^{(j)}|) \leqslant -\,(C_4\,H - C_3)/(n-1)\ .$$

Ceci implique en particulier que $|\beta^{(j)}| \leqslant e^{C_3/(n-1)}\,\varphi$, il existe donc, d'après (3), un indice k tel que

$$|\beta^{(k)}| \geqslant C_5\,\varphi\ .$$

Pour H assez grand, on a $k \neq j$. Soit maintenant h un indice quelconque différent de k et de j ; un tel indice existe puisque $n \geqslant 3$. De la définition de β , $\beta = x - \alpha y$, on déduit

$$\begin{vmatrix} \beta^{(j)} & 1 & \alpha^{(j)} \\ \beta^{(k)} & 1 & \alpha^{(k)} \\ \beta^{(h)} & 1 & \alpha^{(h)} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Ce qui s'écrit

$$(\alpha^{(k)} - \alpha^{(j)})\beta^{(h)} - (\alpha^{(h)} - \alpha^{(j)})\beta^{(k)} = (\alpha^{(k)} - \alpha^{(h)})\beta^{(j)}\ .$$

Cette inégalité, multipliée par $\gamma^{(k)}/((\alpha^{(k)} - \alpha^{(j)})\beta^{(k)}\,\gamma^{(h)})$, prend la forme

(5) $$\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_{r-1}^{b_{r-1}} - \alpha_r = \omega$$

où

$$\omega = \frac{(\alpha^{(k)}-\alpha^{(h)})\beta^{(j)}\,\gamma^{(k)}}{(\alpha^{(k)}-\alpha^{(j)})\beta^{(k)}\,\gamma^{(h)}}\ ,\quad \alpha_r = \frac{(\alpha^{(h)}-\alpha^{(j)})\gamma^{(k)}}{(\alpha^{(k)}-\alpha^{(j)})\gamma^{(h)}}\ ,\quad \alpha_g = \frac{\eta_g^{(k)}}{\eta_g^{(h)}}\quad (1 \leqslant g \leqslant r-1)\ .$$

On voit facilement que ω vérifie des inégalités du type

$$0 < |\omega| < C_6\,e^{-C_7 H}\ .$$

Notons enfin que les nombres $\alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_{r-1}$ sont algébriques de degré $\leqslant n^2$, de hauteur majorée par C_8 tandis que α_r a un degré au plus égal à n^3 et une hauteur $\leqslant C_9\,|m|^n$. Si on pose $\alpha_0 = -1$ et $\log \alpha_0 = i\pi$, de (5) on déduit facilement l'existence d'un entier b_0 , $|b_0| \leqslant C_{10}\,H$ tel que

(6) $$|b_0 \log \alpha_0 + b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_{r-1} \log \alpha_{r-1} - \log \alpha_r| < C_{11}\,e^{-C_{12} H}\ .$$

4. Un théorème sur les formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques.

THÉORÈME 2 (BAKER [2]). - Soient $\alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls de degré au plus d , Supposons les hauteurs de $\alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_{n-1}$ et α_n majorées par A' et A $(\geqslant 2)$ respectivement. Alors, si pour un certain $\varepsilon > 0$, il existe des entiers rationnels $b_1\ ,\ \dots\ b_{n-1}$ de module au plus égal à B tels que

$$0 < |b_n \log \alpha_1 + \dots + b_{n-1} \log \alpha_{n-1} - \log \alpha_n| < e^{-\varepsilon B}\ ,$$

alors $B < C \log A$ pour une constante effectivement calculable $C = C(n, d, A', \varepsilon)$.

5. Conclusion.

De l'étude du paragraphe 3 et du théorème 2, résulte l'existence d'une constante C_{13} effective telle que

$$H \leqslant C_{13} \log A \ , \text{ avec } A = C_9 \, |m|^n \ .$$

De la majoration évidente

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\beta^{(j)}| \leqslant \exp(C_{14} H + C_3)$$

et des identités

$$x = (\alpha^{(h)} \beta^{(j)} - \alpha^{(j)} \beta^{(h)})/(\alpha^{(h)} - \alpha^{(j)}) \ , \quad y = (\beta^{(j)} - \beta^{(h)})/(\alpha^{(h)} - \alpha^{(i)}) \ ,$$

on déduit l'inégalité

$$\max(|x| \ , \ |y|) \leqslant |m|^{C_{15}} \ .$$

Le théorème 1 résulte alors de la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). - Contributions to the theory of diophantine equations, Philos. Trans. Royal Soc. London, t. 263, 1969, Série A, p. 173-208.

[2] BAKER (A.). - A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II, Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 33-36.

[3] FEL'DMAN (N. I.). - An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem, Math. USSR Izvestija, t. 5, 1971, p. 985-100 ; [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 35, 1971, p. 973-990.

[4] SIEGEL (C. L.). - Abschätzung von Einheten, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys., Kl., 1969, p. 71-86.

(Texte reçu le 12 novembre 1973)

Maurice MIGNOTTE
Département de Mathématiques
Centre scientifique et polytechnique
Place du 8 mai 1945
93206 SAINT DENIS