Daniel Barsky

Introduction aux mesures p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1973-1974), exp. nº G2, p. G1-G3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G2, 3 p.

29 octobre 1973

INTRODUCTION AUX MESURES p-ADIQUES

par Daniel BARSKY

On développe quelques calculs qui seront utiles pour l'exposé mesures p-adiques à densité [2].

0. Notations.

K est un corps local, A son anneau des entiers, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathfrak{k} = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de A, de cardinal $q = p^f$. La valuation $v(.)$ et la valeur absolue $|.|$ de K sont normalisées par $v(\pi) = 1$ et $|\pi| = q^{-1}$, où π est une uniformisante locale de K ($\pi \in \mathfrak{m}$, $\pi \notin \mathfrak{m}^2$). On note $\mathcal{C}(A, K) = \mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de A dans K munie de la norme de la convergence uniforme sur A, notée $|f| = \sup_{x\in A}|f(x)|$. On note $\mathcal{C}'(A, K) = \mathcal{C}'$ le dual de $\mathcal{C}$ muni de la norme habituelle : si $\mu \in \mathcal{C}'$,

$$\|\mu\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|\langle \mu/f\rangle|}{|f|} .$$

On note, si $n \in \underset{\sim}{Z}$, $v_q(n)$ l'exposant de la plus haute puissance de q qui divise n.

1. Mesures p-adiques.

DÉFINITION 1. - Une mesure p-adique est un élément du dual $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$.

On sait [4] que $\mathcal{C}$ admet des bases normales, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que toute fonction $f \in \mathcal{C}$ peut s'écrire de manière unique :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n f_n(x) \quad \text{avec} \quad |f| = \sup_{n\geq 0}|a_n| \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 .$$

En particulier, on sait [1] que $\mathcal{C}$ admet des bases normales polynomiales et aussi [3] que $\mathcal{C}$ admet des bases normales formées d'idempotents, c'est-à-dire constituées de fonctions caractéristiques de boules.

Soit $(f_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une base normale de $\mathcal{C}$, soit $(f_n^*)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}'$ tels que $\langle f_n^*|f_m\rangle = \delta_{n,m}$. Il est clair alors que $\mu \in \mathcal{C}'$ implique qu'il existe une suite bornée $(b_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\mu = \sum_{n\geq 0} b_n f_n^* , \qquad \|\mu\| = \sup_{n\geq 0}|b_n|$$

la série du second membre convergeant faiblement vers μ.

Nous allons maintenant particulariser les résultats précédents.

Soit $U = (u_0, u_1, \ldots)$ une suite très bien répartie bien ordonnée de A [1], c'est-à-dire que $v(u_i - u_j) = v_q(i - j)$ pour tous les couples $(i, j) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$.

Soit φ_n la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n , \ell(n)+1)$ de centre u_n et de rayon $q^{-(\ell(n)+1)}$ $(\ell(n) = [\frac{\log n}{\log q}])$. Nous allons montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base normale de $\mathcal{C}$. Soit $\psi_{n,h}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n , h)$ et soit $\varphi_{x,h}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x , h)$.

LEMME 1. - <u>Si</u> $0 \leqslant n < q^h$, <u>on a</u>

$$\psi_{n,h} = \varphi_n - \sum_{q^h > q^k > n} \sum_{i=1}^{q-1} \varphi_{n+iq^k} . \tag{1}$$

En effet, on remarque que, si $h = \ell(n)+1$, $\psi_{n,h} = \varphi_n$; si $h = \ell(n)+2$, alors il est immédiat que

$$\mathcal{B}(u_n , \ell(n)+2) = \mathcal{B}(u_n , \ell(n)+1) - \bigcup_{i=1}^{q-1} \mathcal{B}(u_{n+iq^{\ell(n)+1}} , \ell(n)+2) .$$

On achève la démonstration par récurrence sur h.

La formule (1) montre que, inversement, φ_n est combinaison linéaire de $\psi_{j,\ell(n)+1}$, car la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

LEMME 2. - <u>Si</u> $f(x) = \sum_{n=0}^{q^h-1} f(u_n)\, \psi_{n,h}(x)$ <u>est une fonction constante sur les boules de rayon</u> q^{-h} , <u>alors</u> :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{q^h-1} a_n\, \varphi_n(x)$$

<u>avec</u>

$$a_n = f(u_n) - f(u_{n-n_{\ell(n)}q^{\ell(n)}}) \quad \text{où} \quad n = n_0 + n_1 q + \dots + n_{\ell(n)} q^{\ell(n)} . \tag{2}$$

Remarquons que $\varphi_n(u_i) = 0$ si $0 \leqslant i < n$, et $\varphi_n(u_n) = 1$. On a

$$f(u_n) = a_0 + a_{n_0} + a_{n_0+n_1q} + \dots + a_{n_0+n_1q+\dots+n_{\ell(n)-1}q^{\ell(n)-1}} + a_n .$$

En effet, $\varphi_k(u_n) \neq 0$ si $v(u_n - u_k) \geqslant \ell(k)+1$, donc $\varphi_0(u_n) = 1$; si $1 \leqslant k < q$,

$$\varphi_{n_0}(u_n) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_k(u_n) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq n_0 \text{ ; plus généralement,}$$

si $q^i \leqslant k < q^{i+1}$

$$\varphi_{n_0+n_1q+\dots+n_iq^i}(u_n) = 1 ,$$

et

$$\varphi_k(u_n) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq n_0 + n_1 q + \dots + n_i q^i .$$

Donc

$$f(u_n) - f(u_{n-n_{\ell(n)}q^{\ell(n)}}) = a_n .$$

Donc si $f \in \mathcal{C}(A , K)$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n\, \varphi_n(u_k) = f(u_k) ,$$

donc $f \in \mathcal{C}$ est entièrement déterminée par les $(a_n)_{n\geqslant 0}$, car U est dense dans A .

PROPOSITION 1. - *Soit* $U = \{u_0 , u_1 , \dots\}$ *une suite très bien répartie bien ordonnée de* A , *et soit* φ_n *la fonction caractéristique de la boule* $\mathcal{B}(u_n, \ell(n)+1)$. *Les fonctions* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forment une base normale de* $\mathcal{C}(A , K)$. *Si* $f \in \mathcal{C}(A , K)$, $f = \sum_{n\geq 0} a_n \varphi_n$, $\lim a_n = 0$ *et*

$$a_n = f(u_n) - f(u_{n-n_{\ell(n)}q^{\ell(n)}}) ,$$

où $n = n_0 + n_1 q + \dots + n_{\ell(n)} q^{\ell(n)}$.

Soit φ_n^* l'élément du dual $\mathcal{C}'(A , K)$ de $\mathcal{C}(A , K)$ tel que $\langle\varphi_n^*|\varphi_m\rangle = \delta_{n,m}$. Toute mesure μ sur A est la limite faible de la série

$$\sum_{n\geq 0} b_n \varphi_n^* \quad \text{avec} \quad b_n = \langle\mu|\varphi_n\rangle .$$

DÉFINITION 2. - *Soit* $U = \{u_0 , u_1 , \dots\}$ *une suite très bien répartie bien ordonnée de* A . *La meilleure suite convergeant vers* $x \in A$, *extraite de la suite* U , *est définie par*

$$h \to u_{h(x)} \quad \underline{\text{avec}} \quad |x - u_{h(x)}| \leq q^{-h} \quad \underline{\text{et}} \quad 0 \leq h(x) < q^h .$$

Remarquons que $\varphi_{x,h} = \varphi_{u_{h(x)},h} = \psi_{h(x),h}$ et si $f \in \mathcal{C}(A , K)$, $f = \sum_{n\geq 0} a_n \varphi_n$, on a

$$\sum_{n=0}^{q^h-1} a_n \varphi_n(x) = f(u_{h(x)}) .$$

PROPOSITION 2. - *Soit* U *une suite très bien répartie bien ordonnée de* A , *soit* $x \in A$, *et soit* $(u_{h(x)})_{h\geq 0}$ *la meilleure suite convergeant vers* x , *extraite de* U . *On a, si* $\mu \in \mathcal{C}'$ *et* $\mu = \sum_{n\geq 0} b_n \varphi_n^*$,

(3) $$\langle\mu|\psi_{x,h}\rangle = b_{h(x)} - \sum_{q^h > q^k > h(x)} \sum_{i=1}^{q-1} b_{h(x)+iq^k} .$$

Ce résultat est immédiat à partir du lemme 1 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[2] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques à densité, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° 4.

[3] PUT (M. van der). - Algèbres de fonctions continues p-adiques, Proc. Kon. Nederl. Akad. V. Wetensch., t. 71, 1968, Série A, p. 401-420.

[4] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, n° 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 29 octobre 1973)

Daniel BARSKY
36 rue de Penthièvre
75008 PARIS