GILLES CHRISTOL

Éléments analytiques uniformes et multiformes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974), exp. n° 6, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 6, 18 p.

3 décembre 1973

ÉLÉMENTS ANALYTIQUES UNIFORMES ET MULTIFORMES

par Gilles CHRISTOL

0. Notations.

p est un nombre premier fixé. $\underset{\sim}{C}_p$ désignera le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, $\mathfrak{A}$ les entiers de $\underset{\sim}{C}_p$, $\overline{\underset{\sim}{F}}_p$ le corps des restes de $\mathfrak{A}$ (qui est une clôture algébrique de $\underset{\sim}{F}_p$) et $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ est muni de la valuation telle que $v(p) = 1$.

Si $a \in \mathfrak{A}$, nous noterons $\overline{a}$ son image dans $\overline{\underset{\sim}{F}}_p$, ω désignera l'homomorphisme multiplicatif injectif de $\overline{\underset{\sim}{F}}_p^*$ dans $\mathfrak{A}$, qui vérifie, pour tout α de $\overline{\underset{\sim}{F}}_p^*$, $\overline{\omega(\alpha)} = \alpha$. Un élément de $\mathfrak{A}^*$ s'écrit alors, de manière unique, $a = \omega(\overline{a})\langle a\rangle$, où $\langle a\rangle \in 1 + \mathfrak{M}$.

Nous munirons $\underset{\sim}{N}$ du filtre des parties formées des multiples non nuls d'un élément et noterons la convergence associée $h \times\!\!\to \infty$. Si $\underset{\sim}{F}(h)$ désigne le corps à p^h éléments, il est clair que $\overline{\underset{\sim}{F}}_p = \bigcup_{h\times\to\infty} \underset{\sim}{F}(h)$.

A étant un anneau valué, nous noterons $\mathfrak{F}_r(A)$ l'ensemble des applications de $\underset{\sim}{N}^r$ dans A, muni de la topologie de la convergence uniforme, et nous noterons, pour $f \in \mathfrak{F}_r(A)$,

$$v(f) = \inf_{(n_1,\ldots,n_r)}[v[f\langle n_1, \ldots, n_r\rangle]]$$

d'autre part nous utiliserons la notation

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\underset{\sim}{N}^r} f\langle n_1, \ldots, n_r\rangle\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r},$$

cette série est convergente sur $\mathfrak{M}^r$; en particulier si $A = \mathfrak{A}$ et si $r = 1$, on sait que

$$v(f) = \inf_{x\in\mathfrak{M}} v[f(x)] .$$

$\mathfrak{F}_r(A)$ sera muni du produit qui provient de son identification à l'anneau des séries formelles $A[[x_1, \ldots, x_r]]$, et $\mathfrak{F}_1(A)$ sera en outre muni du produit de Hadamard, dans ce cas nous avons donc

$$fg\langle n\rangle = \sum_{m=0}^{n} f\langle m\rangle\, g\langle n - m\rangle \ ; \qquad f * g\langle n\rangle = f\langle n\rangle\, g\langle n\rangle ,$$

Nous allons étudier deux sous-ensembles de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$, mais il est clair que tous les résultats se généralisent immédiatement au cas des applications bornées de $\mathfrak{F}_1(\underset{\sim}{C}_p)$.

0.1: Sous-anneaux de $\mathfrak{A}$. - Si A est un sous-anneau de $\mathfrak{A}$, on note $v(A)$ l'ensemble des valuations de ses éléments, en particulier, $v(\mathfrak{A}) = \underset{\sim}{Q}^+$.

On dira que A est séparable si $v(A)$ est formé d'une suite tendant vers l'infini. Il n'est pas difficile de voir que A est séparable si, et seulement si, c'est un espace topologique séparable quand on le munit de la topologie induite de celle de $\mathfrak{a}$.

Nous noterons W l'anneau des vecteurs de Witt de $\overline{\underset{\sim}{F}}_p$, et nous dirons que le sous-anneau B de $\mathfrak{a}$ est <u>saturé</u> si, pour tout a de B , on a $a.W \in B$.

PROPOSITION 1. - <u>Tout sous-anneau</u> A , <u>de</u> $\mathfrak{a}$, <u>est contenu dans un anneau</u> B <u>saturé, tel que</u> $v(B) = v(A)$.

Définissons $B = \{\sum_{\text{finie}} a_i\, b_i \mid a_i \in W \ ; \ b_i \in A\}$. B est un anneau ; il est clair qu'il est saturé et qu'il contient A , il suffit donc de vérifier que $v(A) \supset v(B)$. Nous dirons que $(a_i\, b_i)$ est une représentation de a si $a=\sum a_i b_i$, avec $a_i \in W$, $b_i \in A$, et nous dirons que cette représentation est d'ordre r s'il existe r indices i tels que $v(a_i\, b_i) = \inf_j v(a_j\, b_j)$. Si $a \in B$, parmi toutes les représentations de a il en existe une qui est d'ordre minimum, supposons que ce minimum est au moins 2 , alors, pour cette représentation nous pouvons supposer, par exemple,

$$v(a_1\, b_1) = v(a_2\, b_2) = \inf v(a_i\, b_i) \ , \text{ et } \ v(a_1) \geqslant v(a_2) \ .$$

Comme a_1 et a_2 sont dans W , $v(a_1) = v(a_2) + k$, où k est un entier, et $b_2 \in p^k\, b_1\, \mathfrak{a}$. Il existe donc $\alpha \in W$ tel que $b_2/p^k\, b_1 = \alpha \bmod \mathfrak{M}$, ce qui s'écrit $b_2 = p^k\, \alpha b_1 + b_2'$ avec $v(b_2') > v(b_2)$. On a donc

$$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 = (a_1 + p^k\, \alpha a_2) b_1 + a_2\, b_2' \quad \text{avec} \quad v(a_2\, b_2') > v(a_2\, b_2) \ .$$

On trouve donc une représentation de a d'ordre $r - 1$, ce qui contredit notre hypothèse.

Pour tout a de B , il existe donc une représentation d'ordre 1 , ce qui implique $v(a) = \inf v(a_i\, b_i)$. Comme a_i est dans W sa valuation est entière, donc, pour tout a de B , il existe b dans A tel que $v(a) = v(p^k\, b) \subset v(A)$.

Pour tout k , $p^k\, \mathfrak{a} \cap A$ est un idéal de A . Nous dirons que A est <u>profini</u> si, pour tout k , $A/(p^k\, \mathfrak{a} \cap A)$ a un nombre fini d'éléments.

PROPOSITION 2. - <u>Tout sous-anneau de</u> $\mathfrak{a}$, <u>engendré par un nombre fini d'éléments, est profini</u>.

Supposons A engendré par $a_1 , \ldots , a_r$. Alors $a_i \in \underset{\sim}{C}_p$ est limite d'éléments algébriques sur $\underset{\sim}{Q}_p$, il existe donc b_i algébrique sur $\underset{\sim}{Q}_p$ tel que $b_i = a_i \pmod{p^k}$. Par suite, $A/(p^k\, \mathfrak{a} \cap A) = B/(p^k\, \mathfrak{a} \cap B)$, où B est l'anneau engendré par les b_i . Or B est contenu dans l'anneau des entiers d'une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_p$ (celle qu'engendrent les b_i) et il est bien connu que, modulo p^k , il y a nkp entiers dans une extension de degré n .

PROPOSITION 2 bis. - <u>Si</u> A <u>et</u> B <u>sont profinis, l'anneau engendré par</u> $A \cup B$ <u>est profini</u>.

Si on regarde modulo p^k , A et B sont finis, et $A \cup B$ peut donc être engendré, modulo p^k , par un nombre fini d'éléments, on retrouve la démonstration précédente.

PROPOSITION 3. - Tout anneau profini est séparable.

Comme A ne possède qu'un nombre fini d'éléments modulo p^k , il est clair que les valuations des éléments de A , inférieures à k , sont en nombre fini, donc ces valuations forment bien une suite qui tend vers l'infini.

1. Eléments analytiques uniformes.

1.1: Nous appellerons "fractions rationnelles" les éléments f de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})$ qui sont des fractions rationnelles sur $\underset{\sim}{C}_p$. f , étant alors analytique sur $\mathfrak{M}$, n'a pas de pôle dans $\mathfrak{M}$.

L'ensemble EAU (éléments analytiques uniformes) est la fermeture dans $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})$ de l'ensemble des fractions rationnelles. On dira qu'un élément de EAU est prolongeable dans un ensemble $\mathfrak{S}$ qui contient $\mathfrak{M}$ s'il existe une suite f_n de fractions rationnelles telles que :

- les f_n n'ont pas de pôles dans $\mathfrak{S}$,
- $f(x)$ est limite uniforme sur $\mathfrak{S}$ de $f_n(x)$.

Remarque. - Si x appartient à $\mathfrak{S} - \mathfrak{M}$, la deuxième condition est à considérer comme la définition de la valeur de f au point x .

Exemple. - Il est facile de constater que f est prolongeable dans $\mathfrak{a}$ si, et seulement si, $f\langle n\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$.

On pourra considérer des ensembles $\mathfrak{S}$ contenant l'infini, et par suite parler de la valeur de f à l'infini.

THÉORÈME 4. (MITTAG-LEFFLER). - Un élément analytique uniforme se décompose de manière unique dans EAU sous la forme

$$f = \sum_{\alpha \in \overline{\underset{\sim}{F}_p}} f_\alpha$$

avec :

- $v(f_\alpha) \to \infty$ sur le filtre du complémentaire des parties finies de $\underset{\sim}{F}_p$ (nous noterons dans ce cas $\alpha \to \infty$),
- f_α pour $\alpha \neq 0$ est prolongeable dans le complémentaire de $\omega(\alpha) + \mathfrak{M}$ et nulle à l'infini,
- f_0 est prolongeable dans $\mathfrak{a}$.

On trouvera une démonstration de ce résultat, par exemple, dans [11]. On sait de plus que $v(f) = \inf v(f_\alpha)$.

THÉORÈME 5 (AMICE). - Un élément f de EAU est prolongeable dans le complémentaire de $1+\mathfrak{M}$ et nul à l'infini si, et seulement si, $f\langle n\rangle$ est uniformément continu de $\underset{\sim}{N}$ (muni de la topologie p-adique) dans $\mathfrak{A}$.

Ce résultat est démontré dans [2].

COROLLAIRE 6. - f appartient à EAU si, et seulement si, pour tout α de $\overline{\underset{\sim}{F}}{}_p^*$ il existe une fonction $\langle f , \alpha\rangle$ uniformément continue de $\underset{\sim}{N}$ dans $\mathfrak{A}$ telle que :

- $v(\langle f , \alpha\rangle) \to \infty$ si $\alpha \to \infty$,
- $v[f\langle n\rangle - \sum_{\alpha\in\overline{\underset{\sim}{F}}{}_p^*} \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)] \to \infty$ si $n\to\infty$.

On remarque que, pour $\alpha \neq 0$, la fonction $\omega(\alpha)^n f_\alpha\langle n\rangle = \langle f , \alpha\rangle(n)$ est prolongeable dans le complémentaire de $1+\mathfrak{M}$, c'est-à-dire est uniformément continue de $\underset{\sim}{N}$ dans $\mathfrak{A}$, et telle que $v(f_\alpha) = v(\langle f , \alpha\rangle)$ puisque $v[\omega(\alpha)] = 0$, la deuxième relation vient du fait que la quantité considérée n'est autre que $f_0\langle n\rangle$.

Réciproquement, d'après le théorème 5, on voit que

$$f_\alpha\langle n\rangle = \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)$$

est prolongeable dans le complémentaire de $\omega(\alpha)+\mathfrak{M}$ et donc appartient à EAU ; d'autre part, $g = \sum_\alpha f_\alpha$ converge, d'après la première relation, dans $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$, donc dans EAU ; enfin, la deuxième relation montre que $f-g$ est prolongeable dans $\mathfrak{A}$ c'est-à-dire appartient à EAU.

1.2: On appellera fonction presque périodique une application de $\underset{\sim}{N}$ dans $\mathfrak{A}$ (ou plus généralement dans $\underset{\sim}{C}_p$) qui vérifie la condition :

$$\forall N ,\ \exists K(N) \text{ tel que } v(f\langle n+K(N)\rangle - f\langle n\rangle) \geq N , \text{ pour tout } n \geq K(N) .$$

Remarque. - Si $f\langle n\rangle$ est presque périodique et à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, il est clair que $f\langle n\rangle$ est borné. Se restreindre à des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{A}$ ne limite donc pas la portée des résultats.

THÉORÈME 7. - f appartient à EAU si, et seulement si, $f\langle n\rangle$ est presque périodique.

Supposons $f\langle n\rangle$ presque périodique, et considérons la fraction rationnelle

$$g(x) = \frac{\sum_{n=0}^{K(N)-1} f\langle n+K(N)\rangle\, x^n}{1-x^{K(N)}} + \sum_{n=0}^{K(N)-1}(f\langle n\rangle - f\langle n+K(N)\rangle)\, x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{K(N)-1} f\langle n\rangle\, x^n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{K(N)-1} f\langle n+K(N)\rangle\, x^{n+mK(N)} .$$

Il est alors immédiat de vérifier que $v(f-g) \geq N$. En faisant tendre N vers l'infini, on voit que f est limite de fractions rationnelles (sans pôles dans $\mathfrak{M}$), donc appartient à EAU.

La réciproque découlera d'un lemme.

LEMME 8. - Si f appartient à EAU, pour tout N, il existe h tel que, pour tout n et tout $k \geqslant 1$, on ait :

$$v[f\langle n + kp^h\rangle - \sum_{\alpha \in \underset{\sim}{F}(h)^*} \omega(\alpha)^{-n-k} \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N ;$$

D'après le corollaire 6, il existe un nombre fini de α tels que $v(\langle f,\alpha\rangle) \geqslant N$, et donc un nombre h_1 tel que, si $\alpha \notin \underset{\sim}{F}(h_1)$, $v(\langle f , \alpha\rangle) \geqslant N$. D'autre part, il existe h_2 tel que, si $n \geqslant h_2$, on ait

$$v[f\langle n\rangle - \sum_{\alpha \in \underset{\sim}{F}^*_p} \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N$$

c'est-à-dire

$$v[f\langle n\rangle - \sum_{\alpha \in \underset{\sim}{F}(h_1)^*} \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N .$$

Les fonctions $\langle f , \alpha\rangle$ à considérer sont maintenant en nombre fini, comme elles sont uniformément continues, il existe h_3 tel que, pour tout k et pour tout $\alpha \in \underset{\sim}{F}(h_1)^*$, on ait

$$v[\langle f , \alpha\rangle(n + kp^{h_3}) - \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N ;$$

il suffit alors de remarquer que, si h_1 divise h, on a, pour tout α de $\underset{\sim}{F}(h_1)$,

$$\omega(\alpha)^{-p^h} = \omega(\alpha) ,$$

et le lemme est démontré pour h multiple de h_1 (de sorte que $\underset{\sim}{F}(h_1) \subset \underset{\sim}{F}(h)$), et supérieur à h_2 et h_3.

Il suffit alors de prendre $K(N) = (p^h - 1)p^h$ et de vérifier

$$v[f\langle n + 2K(N)\rangle - f\langle n + K(N)\rangle] \geqslant N \quad \text{pour tout } n$$

pour établir que $f\langle n\rangle$ est presque périodique.

On trouvera une autre démonstration de la condition suffisante dans [11].

Remarques. - Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'on peut toujours prendre des "périodes" de la forme $p^h(p^h - 1)$, ceci n'est pas étonnant car il est clair que si $h \times\!\!\to \infty$, alors $p^h(p^h - 1) \times\!\!\to \infty$.

D'autre part, on voit que les éléments de EAU sont limites uniformes de fractions rationnelles n'ayant pour pôles (simples) que des racines de l'unité, ceci n'était pas évident à priori.

1.3: Prolongement des éléments analytiques uniformes.

PROPOSITION 9. - Si f appartient à EAU et si $\alpha \neq 0$, on a

$$\langle f , \alpha\rangle(n) = - \lim_{h \times\!\to \infty} \sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\alpha)^{n+k} f\langle n + kp^h\rangle ,$$

la limite étant uniforme en n.

D'après le lemme 8, pour tout N, si h est "assez grand multiplicativement", on a

$$v[f\langle n + kp^h\rangle - \sum_{\beta\in \underset{\sim}{F}(h)^*} \omega(\beta)^{-n-k} \langle f , \beta\rangle(n)] \geq N .$$

Etant donné α , quitte à multiplier h , nous pouvons toujours supposer que $\alpha \in F(h)^*$. Alors on aura, pour tout $\beta \in \underset{\sim}{F}(h)^*$,

$$\sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\tfrac{\alpha}{\beta})^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ p^h-1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\alpha)^{n+k} f\langle n\rangle &= \sum_{\beta\in F(h)^*} \sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\tfrac{\alpha}{\beta})^{n+k} \langle f , \beta\rangle(n) \pmod{p^N} \\ &= (p^h - 1)\langle f , \alpha\rangle(n) \pmod{p^N} ,\end{aligned}$$

et comme nous pouvons toujours supposer que h est supérieur à N , la proposition est démontrée.

THÉORÈME 10. - f , <u>appartenant à EAU, est prolongeable dans</u> $\mathfrak{M} \cup (\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ <u>pour</u> $\alpha \neq 0$ <u>si, et seulement si, pour tout</u> n ,

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\alpha)^k f\langle n + kp^h\rangle = 0 .$$

<u>Alors, si</u> a <u>appartient à</u> $\omega(\alpha) + \mathfrak{M}$, <u>on a</u>

$$f(a) = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{p^{2h}-1} a^m f\langle m\rangle([m/p^h] + 1) ,$$

<u>où</u> [ ] <u>désigne la partie entière</u>.

<u>Enfin</u> f <u>est prolongeable dans</u> $\mathfrak{M} \cup C\mathfrak{a}$ <u>si, et seulement si,</u> $f\langle n\rangle$ $(n = 1 ,\dots)$ <u>est prolongeable en une application continue de</u> $\underset{\sim}{\hat{Z}} = \mathrm{Gal}(\overline{\underset{\sim}{F}}_p/\underset{\sim}{F}_p)$ <u>dans</u> $\mathfrak{a}$.

La première partie découle immédiatement de la proposition 9 ; en effet, pour que f soit prolongeable en $\mathfrak{M} \cup (\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ d'après le théorème 4, il faut et il suffit que $\langle f , \alpha\rangle$ soit nulle. Dans ce cas on sait que f est limite uniforme sur $\mathfrak{M} \cup (\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ de fractions rationnelles f_n sans pôles dans cet ensemble. Il en résulte que

$$\frac{f(ax) - f(a)}{1 - x} = \lim_n \frac{f_n(ax) - f_n(a)}{1 - x}$$

est prolongeable sur $1 + \mathfrak{M}$ (la convergence uniforme du deuxième membre sur $\mathfrak{M}$ est évidente, et sur $1 + \mathfrak{M}$ se vérifie immédiatement en posant $y = 1 - x$). Nous considérons alors la fonction $g(x) = (f(ax))/1 - x$, c'est-à-dire

$$g\langle n\rangle = \sum_{m=0}^{n} a^m f\langle m\rangle ,$$

l'unicité de la décomposition dans le théorème de Mittag-Leffler montre que $g_1(x) = (f(a))/1 - x$, c'est-à-dire $g_1\langle n\rangle = f(a)$. En particulier, pour $n = 0$, on trouve d'après la proposition 9 :

$$f(a) = - \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} g\langle kp^h\rangle = - \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} \sum_{m=0}^{kp^h} a^m f\langle m\rangle$$

$$= - \lim_{h\times\to 0}\Big[(p^h - 1)\sum_{m=0}^{p^h} a^m f\langle m\rangle + (p^h - 2)\sum_{m=p^h-1}^{2p^h} a^m f\langle m\rangle + \dots$$

$$+ 1 \sum_{m=p^h(p^h-2)}^{p^h(p^h-1)} a^m f\langle m\rangle + 0 \sum_{m=p^h(p^h-1)}^{p^{2h}} a^m f\langle m\rangle\Big]$$

les quantités $a^m f\langle m\rangle$ étant bornées et h tendant vers l'infini, on peut réecrire l'expression ci-dessus en remplaçant $-(p^h - k)$ par k. Or on sait que, puisque $\lim_{h\times\to 0} a^{p^h} = \omega(\alpha)$, on a :

$$\lim_{h\times\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} a^{kp^h} f\langle kp^h\rangle = \langle f , \alpha\rangle(0) = 0 .$$

On en déduit alors l'expression de $f(a)$ indiquée en retranchant à la valeur déjà trouvée cette quantité nulle.

Pour la dernière partie du théorème, nous supposons que $f_0 = 0$. Ceci revient à dire que $f\langle n\rangle$ est, modulo p^N, périodique pour $n = 1 , \dots$ (le cas $n = 0$ correspondant à la valeur éventuellement non nulle de $f(\infty)$). Il est connu (voir [10]) que $\hat{\underset{\sim}{Z}} = \mathrm{Gal}(\overline{\underset{\sim}{F}}_p/\underset{\sim}{F}_p)$ est isomorphe aux idèles finis (produit pour les nombres premiers des $\underset{\sim}{Z}_p$) ou, ce qui revient au même, est le complété de $\underset{\sim}{N}$ $(= 1 , \dots)$ pour la topologie multiplicative (l'isomorphisme faisant correspondre à l'élément 1 le Frobenius $\alpha \to \alpha^p$). Il est maintenant clair qu'une fonction sur $\underset{\sim}{N}$ se prolonge en une fonction continue de $\hat{\underset{\sim}{Z}}$ dans $\mathfrak{A}$ si, et seulement si, elle est pour tout N, périodique modulo p^N.

Remarques. - La condition de prolongeabilité peut s'écrire, en remplaçant $\omega(\alpha)$ par a, comme nous l'avons vu en cours de démonstration ; ceci laisse penser que, par ce procédé, on ne pourra rien savoir de la prolongeabilité de f sur des ensembles $\mathfrak{S}$ qui ne sont pas réunion de boules de rayon 1^-.

On a trouvé une formule montrant que, sur les ensembles $\mathfrak{S}$, du type ci-dessus, où f est prolongeable, f est limite d'une suite de polynômes, ceux-ci n'ont aucune raison de converger uniformément. D'autre part, la formule donne encore un résultat si f n'est pas prolongeable dans $\omega(\alpha) + \mathfrak{M}$, il s'agit en fait alors du prolongement de $f - f_\alpha$.

2. Eléments analytiques multiformes.

2.1: Si A est un domaine d'intégrité de corps des fractions K, nous noterons $K(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur K et $A[x_1 , \dots , x_r]$ l'ensemble des polynômes à r variables sur A.

Nous dirons qu'un élément f de $\mathfrak{F}_1(A)$ est algébrique s'il existe un polynôme non nul P de $A[x , y]$ tel que $P(x , f) = 0$ (tout élément algébrique, au sens usuel, sur $K(x)$ vérifie une équation de ce type).

L'ensemble EAM (éléments analytiques multiformes) est la fermeture dans $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ de l'ensemble des éléments algébriques de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$.

Nous appellerons diagonale d'un élément f de $\mathfrak{F}_r(A)$ l'élément Δf de $\mathfrak{F}_1(A)$

défini par

$$\Delta f(x) = \sum_{\underset{\sim}{N}} f\langle n , \ldots , n\rangle x^n .$$

THÉORÈME 11 (FURSTENBERG). - Soit A un domaine d'intégrité, et soit P un polynôme de $A[x , y]$, alors l'équation

$$(1) \qquad y - xP(x , y) = 0$$

a une, et une seule, racine f dans $\mathfrak{F}_1(A)$ qui vérifie $f(0) = 0$, cette racine est telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$f^n = \Delta\left[\frac{y^n[1 - xyP'_y(xy , y)]}{1 - xP(xy , y)}\right] .$$

La première partie de ce théorème est classique et due à Cauchy, on obtient le résultat par itération. Posons :

$$f_0 = 0 , \qquad f_{n+1} = xP(x , f_n) ,$$

et montrons par récurrence que $f_n = f_{n-1} + x^n g_n$. Ceci étant clair pour $n = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= xP(x , f_{n-1} + x^n g_n) = xP(x , f_{n-1}) + x^{n+1} g_{n+1} \\ &= f_n + x^{n+1} g_{n+1} \end{aligned}$$

les f_n convergent donc, au sens de la topologie x-adique, vers un élément f qui vérifie bien l'équation (1). Les f_n appartenant tous à $A[x]$, il est clair que f appartient à $\mathfrak{F}_1(A)$, et vérifie $f(0) = 0$. L'unicité de la solution se montre en remarquant que, si g est une autre solution, on a :

$$f - g = xP(x , f) - P(x , g) = x(f - g) R(x , f , g) ,$$

c'est-à-dire $f = g$.

La deuxième partie est due à FURSTENBERG [8]. Comme f est racine du polynôme $y - xP(x , y)$, on a

$$y - xP(x , y) = (y - f) Q(x , y) ,$$

où Q appartient à $\mathfrak{F}_1(A)[y]$. Nous dérivons alors les deux polynômes par rapport à y

$$1 + xP'_y(x , y) = Q(x , y) + (y - f) Q'_y(x , y) ,$$

ce qui montre, en particulier, que $Q(0 , 0) = 1$, c'est-à-dire que Q est inversible dans $\mathfrak{F}_2(A)$, on trouve :

$$\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{Q(xy , y)} = 1 + (y - f(xy)) \frac{Q'_y(xy , y)}{Q(xy , y)} .$$

D'autre part, puisque $f(0) = 0$, $f(xy)/y$ appartient à $\mathfrak{F}_2(A)$, et $[1 - \frac{f(xy)}{y}]$ est inversible dans $\mathfrak{F}_2(A)$. Si nous multiplions par cet inverse, il vient

$$\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{1 - xP(xy , y)} = \sum_{m \in \underset{\sim}{N}} \frac{f^m(xy)}{y^m} + y \frac{Q'_y(xy , y)}{Q(xy , y)} .$$

Comme Q'_y/Q appartient à $\mathfrak{F}_2(A)$, dans le développement de $Q'_y/Q(xy , y)$, on ne trouvera que des termes "sous la diagonale", ce qui nous donne la formule annoncée.

COROLLAIRE 12. - Si f est la solution dans $\mathfrak{F}_1(A)$ de l'équation (1), et si $g = R(x , f)$ où R est un polynôme de $A(x)[y]$, alors :

$$g = \Delta\left[\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{1 - xP(xy , y)} R(xy , y)\right] .$$

Ce corollaire est évident.

COROLLAIRE 13. - Si K est un corps parfait, tout élément de $\mathfrak{F}_1(K)$, algébrique, est diagonal d'une fraction rationnelle à deux variables sur K .

On sait, d'après BATEMAN et DUQUETTE [4] ou [9], que, si K est un corps parfait, toute extension finie de $K(t)$, contenue dans $K((t^{-1}))$, est engendrée par un élément θ de Pisot, c'est-à-dire par un élément entier sur $K[t]$, dont tous les conjugués sont de valuation t^{-1}-adique positive, ce qui peut encore s'exprimer en disant que θ est racine d'un polynôme :

$$\theta^n + c_1(t)\, \theta^{n-1} + \dots + c_n(t) = 0$$

où les c_i sont des polynômes tels que $\deg(c_1) > \deg(c_i)$.

En particulier, si g est un élément algébrique de $\mathfrak{F}_1(K)$, $K(t)[g(\frac{1}{t})]$ est engendré par un élément de Pisot θ , $f(x) = 1/\theta(1/x)$ engendre alors $K(x , g(x))$ et vérifie une équation :

$$x^{\deg c_1} c_n(1/x)\, f^n(x) + \dots + x^{\deg c_1} c_1(1/x)\, f(x) + x^{\deg c_1} = 0$$

c'est-à-dire, en divisant par le coefficient du terme de degré le plus élevé dans c_1 , une équation du type : $f = xP(x , f)$. Comme $g = R(x , f)$, le corollaire 13 est une conséquence du corollaire 12.

Remarque. - Le corollaire 13 ne fonctionne pas si K n'est pas un corps, car nous avons divisé par un coefficient de c_1 : tout élément algébrique de $\mathfrak{F}_1(A)$ est diagonale d'une fraction rationnelle de $\mathfrak{F}_2(K)$, mais rien n'impose à cette fraction rationnelle d'avoir ses coefficients dans A . Nous allons, dans le paragraphe suivant, montrer comment tourner cette difficulté.

Pratiquement, on considère la fonction

$$g(x) = x^{-h}\left[f(x) - \sum_{n=0}^{h} f\langle n\rangle\, x^n\right] ,$$

où h est le maximum des valuations x-adiques des différences de f avec ses conjugués de telle sorte que g est solution d'une équation du type (1), on peut d'ailleurs démontrer le corollaire 13 par cette méthode.

2.2: Si A est un domaine d'intégrité, on dira que f est un élément algébrique régulier, s'il est algébrique et diagonal d'une fraction rationnelle de $\mathfrak{F}_2(A)$.

PROPOSITION 14. - Si M est un idéal maximal de A tel que A/M soit un corps k parfait, alors tout élément $\overline{f}$ de $\mathfrak{F}_1(k)$ algébrique se relève en un élément algébrique régulier f de $\mathfrak{F}_1(A)$.

D'après le corollaire 13, on sait que :

$$\overline{f} = \Delta\left[\frac{1 - xy\overline{P}'_y(xy , y)}{1 - x\overline{P}(xy , y)} \overline{R}(xy , y)\right] ,$$

où $\overline{P}$ et $\overline{R}$ sont des polynômes de $k[x , y]$ et $k(x)[y]$ respectivement. On choisit alors un relèvement de k dans A , $\overline{P}$ et $\overline{R}$ se relèvent en P et R . Si nous posons

$$f = \Delta\left[\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{1 - xP(xy , y)} R(xy , y)\right] ,$$

f est un relèvement de $\overline{f}$. Le corollaire 12 montre alors que, si g est la racine de l'équation $g - xP(x , g) = 0$ telle que $g(0) = 0$, $f = R(x , g)$, c'est-à-dire que f est algébrique et, comme f est diagonale d'une fraction rationnelle, f est algébrique régulier.

PROPOSITION 15. - Soient A un sous-anneau séparable saturé de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{F}$ un sous-A-module de $\mathfrak{F}_1(A)$ qui contient les éléments algébriques réguliers et nous supposons que, pour tout f de $\mathfrak{F}$, il existe a dans A tel que $v(a) = v(f)$, et $\overline{(f/a)}$ soit algébrique sur $\underset{\sim}{\overline{F}}_p(x)$. Alors les éléments de $\mathfrak{F}$ sont limites uniformes d'éléments algébriques réguliers.

Soit α_n la suite qui compose $v(A)$, supposons qu'il existe f_n , élément algébrique régulier de $\mathfrak{F}_1(A)$, tel que $v(f - f_n) = \alpha_n$. f_n appartient à $\mathfrak{F}$, il en est de même de $f - f_n$, et il existe a tel que $v(a) = \alpha_n$ et $(f - f_n)/a$ soit algébrique sur $\underset{\sim}{\overline{F}}_p$. En appliquant la proposition 14 à W , il existe g_n dans $\mathfrak{F}_1(W)$ algébrique régulier tel que $v(f - f_n - ag_n) > \alpha_n$, il suffit donc de poser $f_n + ag_n = f_{n+1}$, puisque A est saturé, ag_n est un élément de $\mathfrak{F}_1(A)$ et donc f_{n+1} aussi ; d'autre part, il est clair que f_{n+1} est algébrique régulier, et vérifie $v(f - f_{n+1}) = \alpha_r$ avec $r \geqslant n + 1$. La proposition est alors démontrée par récurrence.

Exemples de famille $\mathfrak{F}$.

- Les éléments algébriques de $\mathfrak{F}_1(A)$.
- Les limites uniformes d'éléments algébriques de $\mathfrak{F}_1(A)$.
- Les éléments analytiques multiformes de Krasner sur $B(0 , 1^-)$, à coefficients dans A .
- La famille $\mathfrak{Q}(A)$ du § 3.

Question : Existe-t-il un élément algébrique de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ dont les coefficients ne soient pas dans un anneau séparable ? Dans les autres cas, on voit que les éléments algébriques sont limites uniformes de fractions rationnelles.

3. L'algèbre $\mathcal{D}(A)$.

3.1: Dans la suite, A sera un sous-anneau de $\mathcal{C}$. Une fraction rationnelle sera un élément de $\mathcal{F}_r(A)$ qui peut s'écrire $P/(1 + Q)$, où P et Q sont des polynômes à coefficients dans A avec $Q(0 , \dots , 0) = 0$. Dans le cas où A est noethérien et intégralement clos (anneau de valuation par exemple), on peut démontrer que toute fraction rationnelle de $\mathcal{F}_r(A)$ peut s'écrire sous la forme indiquée (lemme de Fatou).

Nous dirons que f appartient à $\mathcal{D}^0(A)$ s'il existe une fraction rationnelle dont f soit la diagonale (nous considérons des fractions rationnelles à un nombre quelconque de variables). Nous appellerons $\mathcal{D}(A)$ la fermeture dans $\mathcal{F}_1(A)$ de $\mathcal{D}^0(A)$.

PROPOSITION 16. - $\mathcal{D}^0(A)$ *est une A-algèbre stable par produit de Hadamard.*

Si f appartient à $\mathcal{F}_r(A)$ et si g appartient à $\mathcal{F}_s(A)$, avec $r \geqslant s$, on a :

$$\Delta[f(x_1 , \dots , x_r) + \frac{1}{1 - x_{s+1} \dots x_r} g(x_1 , \dots , x_s)] = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta(af) = a\Delta f \quad \text{pour tout } a \text{ de } A ,$$

ce qui montre que $\mathcal{D}^0(A)$ est un A-module. Il n'est pas difficile de voir

$$\Delta[f(x_1 y_1, \dots, x_{s-1} y_{s-1}, x_s, \dots, x_r)\, g(x_1, \dots, x_{s-1}, x_s y_1 \dots y_{s-1} x_{s+1} \dots x_r)] = \Delta f . \Delta g$$

qui montre bien que $\mathcal{D}^0(A)$ est stable par produit, enfin il est clair que

$$\Delta[f(x_1 , \dots , x_r)\, g(y_1 , \dots , y_s)] = \Delta f * \Delta g$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 17. - *Si* f *appartient à* $\mathcal{D}^0(A)$, *alors la fonction*

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\langle n + 1\rangle x^n$$

appartient aussi à $\mathcal{D}^0(A)$.

Nous supposons que f est diagonale de $g(x_1 , \dots , x_r)$. Soit $g_{\hat{i}}$ la fonction de r variables obtenue en faisant $x_i = 0$ dans g , nous posons :

$$G(x_1 , \dots, x_r) = g - \sum_{i=1}^{r} g_{\hat{i}} + \sum_{i,j} g_{\hat{i}\hat{j}} + \dots + (-1)^r g(0 , 0 , \dots, 0) .$$

Il est clair que $G_{\hat{i}} = 0$ pour tout i , c'est-à-dire que G est divisible par $x_1 \dots x_r$. On vérifie donc :

$$\frac{G(x_1 , \dots , x_r)}{x_1 \dots x_r} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = Tf(x) .$$

COROLLAIRE 18. - *Les propositions* 16 *et* 17 *sont vraies en remplaçant* $\mathcal{D}^0$ *par* $\mathcal{D}$.

C'est évident par passage à la limite uniforme.

3.2: *L'application* N . - r est maintenant un nombre fixé. Si f appartient à

$\mathfrak{F}_r(A)$ et si ℓ appartient à $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, $\ell = (\ell_1 , \ldots , \ell_r)$, on pose :

$$f^{(\ell)} = \sum_{n_i \equiv \ell_i (\mathrm{mod}\ p)} f\langle n_1 , \ldots , n_r \rangle x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r} .$$

On voit en particulier que $f^{(\ell)} = x_1^{\ell_1} \ldots x_r^{\ell_r} g(x_1^p , \ldots , x_r^p)$.

PROPOSITION 19. - <u>Soit</u> s <u>une bijection de</u> $(1 , \ldots p^r)$ <u>dans</u> $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, <u>et soit</u> $[f_\ell]$ <u>une famille d'éléments de</u> $\mathfrak{F}_r(A)$ <u>indexée par</u> $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, <u>alors</u>

$$\det[f_{s(j)}^{(s(i)-sj))}] ,$$

<u>où</u> i <u>et</u> j <u>numérotent les lignes et les colonnes du déterminant et varient de</u> 1 <u>à</u> p^r , <u>est une fonction de</u> $x_1^p , \ldots , x_r^p$.

En effet, chaque terme du déterminant s'écrit à l'aide d'une permutation σ des éléments $1 , \ldots , p^r$:

$$(-1)^{\overline{\sigma}} \prod_j f_{s(j)}^{(s(\sigma(j))-s(j))} = x_1^{\sum_j [s(\sigma(j))]_1 - [s(j)]_1} \ldots x_r^{\sum_j [s(\sigma(j))]_r - [s(j)]_r} g(x_1^p, \ldots, x_r^p))$$

ce qui donne le résultat en remarquant que, pour toute permutation,

$$\sum_j [s(\sigma(j))]_i = \sum_j [s(j)]_i .$$

Avec les notations ci-dessus, nous noterons $\{f_\ell\}$ l'élément de $\mathfrak{F}_r(A)$, défini par $\{f_\ell\}(x_1^p , \ldots , x_r^p) = \det[f_{s(j)}^{(s(i)-s(j))}]$.

PROPOSITION 20. - $\{f_\ell\}$ <u>est indépendant du choix de la bijection</u> s .

Si s' est une autre bijection de $(1 , \ldots , p^r)$ dans $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, $s^{-1} s'$ est une permutation des nombres $(1 , \ldots , p^r)$. En faisant cette permutation sur les lignes et les colonnes du déterminant, on ne change pas sa valeur, mais on remplace s par s' dans sa définition.

PROPOSITION 21. - <u>Si</u> k <u>appartient à</u> $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, <u>alors</u> $\{f_{\ell+k}\} = \{f_\ell\}$.

Si on pose $s'(j) = s(j) + k$, s' est aussi une bijection de $(1 , \ldots p^r)$ dans $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, et $\{f_\ell\}$, écrit avec cette bijection, n'est autre que $\{f_{\ell+k}\}$.

Si f appartient à $\mathfrak{F}_r(A)$, on pose $Nf = \{f_\ell\}$ avec $f_\ell = f$ pour tout ℓ .

PROPOSITION 22. - <u>On a</u> $\{f_\ell\}.Ng = \{gf_\ell\}$, <u>en particulier</u> $N(fg) = Nf.Ng$.

On vérifie facilement que :

$$(fg)^{(\ell)} = \sum_{k \in (\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r} f^{(k)} g^{(\ell-k)} .$$

Il en résulte que

$$\det[f_{s(j)}^{(s(i)-s(j))}].\det[g^{(s(i)-s(j))}] = \det[\sum_k f_{s(j)}^{(s(k)-s(j))} g^{(s(i)-s(k))}]$$
$$= \det[(f_{s(j)}) g^{(s(i)-s(j))}]$$

ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 23. – $v[N(f+g) - Nf - Ng] \geqslant \inf_{0 \leqslant h < r}[p^h[v(f) + v(g)] + r - h]$.

Soit Θ et Θ' deux applications de $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$ dans l'ensemble à deux éléments (f, g) , on dira que Θ est équivalent à Θ' s'il existe k tel que, pour tout ℓ , on ait $\Theta(\ell + k) = \Theta'(\ell)$. D'après la proposition 21, si Θ et Θ' sont équivalents, $\{\Theta(\ell)\} = \{\Theta'(\ell)\}$. Un déterminant étant multilinéaire, on a

$$N(f+g) = \Sigma_{\Theta}\{\Theta(\ell)\} = \Sigma_{\mathfrak{F}}|\mathfrak{F}|\{\Theta(\ell)\} ,$$

où $\mathfrak{F}$ représente la classe d'équivalence de Θ et $|\mathfrak{F}|$ le nombre d'éléments de cette classe. Calculons $|\mathfrak{F}|$; l'application de $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$ dans $\mathfrak{F}$, définie par $k \to \Theta(. + k)$, est un homomorphisme, le nombre d'éléments de $|\mathfrak{F}|$ est donc égal au nombre d'éléments du groupe $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r/H$, où H est défini par " k appartient à H si, et seulement si, pour tout ℓ , $\Theta(k + \ell) = \Theta(\ell)$ ". Nous mettons alors de côté les deux classes constantes, qui ne contiennent qu'un seul élément, et dont la contribution sera Nf et Ng . Pour tout autre classe, Θ prend au moins card(H) fois la valeur f et card(H) fois la valeur g , comme il est par ailleurs clair que l'on a $v(\{f_\ell\}) \geqslant \Sigma\, v(f_\ell)$, on trouve :

$$v[|\mathfrak{F}|\{\Theta(\ell)\}] \geqslant \mathrm{card}(H)\ v(f) + \mathrm{card}(H)\ v(g) + v(p^r/\mathrm{card}(H))$$

comme H est un sous-groupe d'un groupe à p^r élément, H a p^h éléments (avec, dans le cas des classes non constantes, $h < r$), la contribution de la classe de Θ aura donc une valuation supérieure ou égale à $p^h\, v(f) + v(g) + r - h$, ce qui donne le résultat cherché.

COROLLAIRE 24. – <u>Si</u> f_i <u>est une famille finie d'éléments de</u> $\mathfrak{F}_r(A)$, <u>on a</u>

$$v[N(\Sigma_i\, f_i) - \Sigma_i\, N(f_i)] \geqslant 1 .$$

Les $v(f_i)$ étant positifs, on applique la proposition 23 avec $h = r - 1$.

3.3: <u>L'application</u> U . – Nous définissons trois opérateurs de $\mathfrak{F}_r(A)$ par :

$$Ff(x_1, \ldots, x_r) = f(x_1^p, \ldots, x_r^p) ,$$

$$Uf\langle n_1, \ldots, n_r\rangle = f\langle n_1 p, \ldots, n_r p\rangle ,$$

$$Vf\langle n_1, \ldots, n_r\rangle = (f\langle n_1, \ldots, n_r\rangle)^p .$$

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier, I désignant l'identité,

$$F(f+g) = Ff + Fg ;\quad U(f+g) = Uf + Ug ;\quad F(fg) = Ff.Fg ,$$

$$v(Ff) = v(f) ;\quad v(Uf) \geqslant v(f) ;\quad v(FVf - f^p) \geqslant 1 ,$$

$$UF = I ;\quad VF = FV ;\quad VU = UV ;\quad F\Delta = \Delta F ;\quad U\Delta = \Delta U ,$$

dans ces derniers cas, les deux opérateurs F (resp. U) correspondent d'une part à $\mathfrak{F}_r$ et d'autre part à $\mathfrak{F}_1$. Enfin, on trouve que $Uf = \{f_\ell\}$, où tous les f_ℓ valent 1 sauf l'un d'entre eux qui vaut f .

PROPOSITION 25. – $v(FNf - f^{p^r}) \geqslant 1$.

Il est clair en effet que $f = \sum_\ell f_\ell$; d'après le corollaire 24, on a

$$v[Nf - \sum_\ell N(f^{(\ell)})] \geqslant 1 .$$

Or, comme $(f^{(\ell)})^{(k)} = \delta_{\ell k} f^{(\ell)}$, $FN(f^{(\ell)})$ est un déterminant dont les seuls termes non nuls sont sur la diagonale et qui vaut donc $(f^{(\ell)})^{p^r}$. Comme nous sommes dans un sous-anneau de $\mathfrak{a}$, nous avons

$$v(\sum(f^{(\ell)})^{p^r} - (\sum f^{(\ell)})^{p^r}) \geqslant 1 ,$$

et on obtient la proposition en utilisant la linéarité de F .

g étant un élément de $\mathfrak{F}_r(A)$ tel que $g(0 , \ldots , 0) = 1$, nous définissons l'opérateur T_g par la relation :

$$T_g(f) = U^{r-1}[Ng.U(\frac{f}{g})] = U^{r-1}[\{f , g , \ldots , g\}]$$

la deuxième égalité provenant de la proposition 22.

PROPOSITION 26. - $v[U^r [f/g^{p^k}] - (T_{g^{p^k}}(f))/([V^r(g)]^{p^k})] \geqslant 1 + k$.

Il résulte de ce qui a déjà été vu que l'on a

$$v[F^r N^r(g) - g^{p^r}] \geqslant 1$$

ce qui montre, à l'aide de la proposition 25,

$$v[N(g) - F^{r-1} V^r(g)] \geqslant 1 .$$

Comme F et N commutent avec le produit, il vient

$$v[N(g)^{p^k} - F^{r-1}[V^r(g)]^{p^k}] \geqslant 1 + k$$

en multipliant alors par $U(f/g^{p^k})$, et en appliquant l'opérateur U^{r-1} , on trouve le résultat annoncé.

PROPOSITION 27. - <u>Si</u> Q <u>est polynôme à coefficients dans</u> A , <u>tel que</u>

$$Q(0 , \ldots , 0) = 1 ,$$

<u>alors</u> T_Q <u>est un opérateur sur les polynômes, de plus, si</u> $\deg_i P$ <u>désigne le degré de</u> P <u>par rapport à la variable</u> x_i , <u>on a</u> :

$$\deg_i(T_Q(P)) \leqslant \sup[\deg_i(Q) , \deg_i Q + \frac{\deg_i P - \deg_i Q}{p^r}] .$$

Si P et Q sont des polynômes, d'après la définition de { } , il est clair que {P , Q , ... , Q} est encore un polynôme et qu'il en est donc de même pour $T_Q(P) = U^{r-1}\{P , Q , \ldots , Q\}$. Calculons le degré de ces polynômes

$$\deg_i\{P , Q , \ldots , Q\} < [\deg_i P + (p^r - 1) \deg_i Q] \frac{1}{p}$$

il suffit alors de remarquer que l'opérateur U divise le degré des polynômes par p pour trouver la proposition.

Nous allons supposer maintenant que A est profini.

LEMME 28. - <u>Si</u> A <u>est un anneau profini, il existe</u> m <u>tel que, pour tout</u> a <u>de</u>

A , <u>on ait, pour</u> $h \geq 1$, $v(a^{p^{hm}} - a^{p^m}) \geq 1$.

A étant profini, $A/\mathfrak{M} \cap A$ est un corps fini, qui possède donc p^{m_0} éléments, il en résulte que $v(a^{p^{m_0}} - a) > 0$, mais comme A est aussi séparable

$$v(a^{p^{m_0}} - a) \geq \alpha_1 > 0 ,$$

il existe donc m_1 tel que $v(a^{p^{m_0+m_1}} - a^{p^{m_1}}) \geq 1$, il suffit donc de prendre $m = \sup(m_0 , m_1)$.

PROPOSITION 29. - m <u>et</u> Q <u>étant donnés comme ci-dessus, pour tout</u> h <u>et tout polynôme</u> P , <u>il existe un polynôme</u> R_h <u>tel que</u>

$$\begin{cases} v[U^{rmh}(P/Q^{p^k}) - R_h/(V^{mr} Q)^{p^k}] \geq 1 + k \\ \deg_i(R_h) \leq \sup[p^k \deg_i Q , (\deg_i P - p^k \deg_i Q)/p^{rmh} + p^k \deg_i Q] . \end{cases}$$

Le polynôme Q étant à coefficient dans A , le lemme 28 montre que :

$$v[V^{hm} Q - V^m Q] \geq 1$$

c'est-à-dire $v[(V^{hm} Q)^{p^k} - (V^m Q)^{p^k}] \geq 1 + k$. Si nous posons $T_{Q,k} = \prod_{\ell=0}^{m-1} T_{(V^{r\ell} Q)^{p^k}}$, la proposition 26 donne

$$v[U^{rm}(P/Q^{p^k}) - (T_{Q,k}(P))/(V^{mr} Q)^{p^k}] \geq 1 + k ,$$

ce qui nous donne enfin :

$$v[U^{rmh}(P/Q^{p^k}) - (T^{h-1}_{V^{mr}Q,k} . T_{Q,k}(P))/(V^{mr} Q)^{p^k}] \geq 1 + k .$$

Il suffit donc de prendre $R_h = T^{h-1}_{V^{mr} Q,k} . T_{Q,k}(P)$, la proposition 27 donne alors

$$\deg_i R_h \leq \sup[p^k \deg_i Q , (\deg_i R_{h-1} - p^k \deg_i Q)/p^{rm} + p^k \deg_i Q]$$

ce qui conduit au résultat (on a pris $R_0 = P$).

COROLLAIRE 30. - <u>Si</u> f <u>est une fraction rationnelle de</u> $\mathfrak{F}_r(\mathfrak{a})$, <u>alors la suite</u> $U^h f$ <u>converge uniformément si</u> $h \to \infty$.

Il résulte en effet de la proposition 29 que si h est un multiple de rm , $U^h f$ est de la forme (polynôme de degré borné / polynôme fixé) modulo p^{1+k} . Or f étant une fraction rationnelle a ses coefficients dans un anneau profini, auquel appartiennent les coefficients de R_h , il s'en suit que R_h ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, il existe donc h_0 et h_1 tels que $R_{h_0} = R_{h_1}$, comme R_h se déduit de R_{h-1} par un opérateur indépendant de h , pour h multiple de $mr(h_0 - h_1)h_1$, R_h est constant (modulo p^{1+k}) , ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 31. - <u>Si</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$, <u>alors</u> :

$$\mathfrak{U}f = \lim_{h \to \infty} U^h f$$

<u>existe et appartient à</u> $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$.

C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent.

THÉORÈME 32. - Un élément f de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ appartient à $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ si, et seulement si, pour h entier et $0 \leq n < p^h$, les éléments

$$f_{n,h}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f\langle n + mp^h\rangle\, x^m$$

sont, pour tout k, en nombre fini modulo p^k.

La condition étant visiblement stable par passage à la limite uniforme, nous faisons la démonstration pour f fraction rationnelle. Comme dans le corollaire 30, tout se passera dans l'anneau profini engendré par les coefficients de f. On remarque alors que $f_{n,h}(x) = \frac{1}{x} U^h[x^{p^h-n} f(x)]$, c'est-à-dire que, si f est diagonale de P/Q, on a :

$$xf_{n,h} = \Delta[U^h[(x_1\ldots x_r)^{p^h-n} (PQ^{p^{k-1}})/Q^{p^k}]] .$$

On a donc, pour $h = nrh_0 + i$, d'après la proposition 29, $x(f_{n,h})$ de la forme $R_{h_0}/(V^{mr} Q_i)^{p^k}$, où on a posé, pour $0 \leq i < mr$

$$U^i(P/Q) = P_i/Q_i .$$

Il est facile de voir que le degré des R_{h_0} est borné par une constante dépendant de k, P et Q, puisque les i sont en nombre fini ; comme dans le corollaire 30, cela montre bien que les R_{h_0} sont en nombre fini.

Pour la réciproque, nous démontrons tout d'abord un lemme.

LEMME 33. - Soient A un anneau fini, à élément unité tel que p ait une puissance nulle, et f appartenant à $\mathfrak{F}_1(A)$, tel que les $f_{n,h}$ soient en nombre fini, alors il existe $N + 1$ polynômes à coefficients dans A, avec $P_0 \neq 0$, tels que

$$P_0\, f + P_1\, VF(f) + \ldots + P_N\, V^N F^N(f) = 0 .$$

Puisque les $f_{n,h}$ sont en nombre fini, il en est de même des $V^k(f_{n,h})$, car, pour k assez grand, ceux-ci sont nuls. On prend pour N deux fois ce nombre, étant donné $N + 1$ polynômes de $A[x]$ de degré inférieur à p^N, nous posons :

$$g = x[P_0\, f + \ldots + P_N\, V^N F^N(f)] \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq p^N - 1 ,$$

on vérifie que $U^N(x^n g)$ est une A-combinaison linéaire des $V^k(xf_{n,h})$ et des $V^k(x^2 f_{n,h})$. Si K est le nombre d'éléments de A, on voit donc que, pour chaque n, $U^N x^n g$ ne peut prendre que K^N valeurs. Il en résulte que g ne peut prendre que $(K^N)^{p^N}$ valeurs. Or il y a K^{p^N} façon de choisir un des polynômes (de degré strictement inférieur à N), c'est-à-dire $(K^{p^N})^{N+1}$ façon d'écrire g, il en résulte qu'il existe deux g différents qui sont égaux. Si, par différence, on trouvait une combinaison avec $P_0 = 0$ il suffirait d'appliquer $V^{-1} U$ au résultat pour se trouver dans le cas annoncé.

Si un élément f de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ vérifie la condition du théorème, en regardant le terme constant des $f_{n,h}$, on voit que ses coefficients sont dans un anneau profini, lui-même contenu dans un anneau A séparable et saturé (propositions 1 et 3). Nous allons démontrer que les éléments de $\mathfrak{F}_1(A)$, qui vérifient cette condition et dont les coefficients sont dans un sous-anneau profini, forment une famille $\mathfrak{F}$ de la proposition 15. Il est clair qu'ils forment un A-module (voir proposition 2 bis). D'après la partie directe du théorème, les éléments algébriques réguliers, en tant qu'éléments de $\mathfrak{O}(A)$, appartiennent à cette famille. Enfin si a appartient à A et est tel que $v(f) = v(a)$, alors f/a vérifie encore la condition et ses coefficients sont dans l'anneau profini engendré par a et les coefficients de f. En regardant cet élément modulo $\mathfrak{M}$, on se trouve dans le cas du lemme 33, or, modulo $\mathfrak{M}$, VF n'est autre que la puissance p-ième, il en résulte que $\overline{(f/a)}$ est racine d'un polynôme non nul, c'est-à-dire est algébrique. La famille envisagée est donc formée de limite uniforme d'éléments algébriques réguliers c'est-à-dire d'éléments de $\mathfrak{O}(A)$.

COROLLAIRE 34. - <u>Un élément</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$ <u>si, et seulement si, il est limite d'éléments algébriques dont les coefficients sont dans un anneau séparable.</u>

La partie directe découle de la proposition 15 et de l'exemple qui suit. La réciproque a été démontrée dans le théorème 32.

4. Applications.

Nous n'énoncerons que deux résultats, dont les démonstrations très techniques s'appuient sur les corollaires 30 et 31.

PROPOSITION 35. - <u>Avec les notations de BARSKY [3], si</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$, <u>alors la mesure associée est à densité faible sur les entiers négatifs.</u>

Si f est diagonale de $g(x , y)$, on peut donner le résultat :

$$d_{-n}(\mu_f) = \mathcal{U}[\Delta[\frac{1}{1-y}\,\mathcal{U}[\frac{1}{1-x-xy}\,\frac{t^n z^n}{1-xtz}\,g(t , z)]]]\langle 1\rangle .$$

PROPOSITION 36 (de prolongement). - <u>Si</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$,

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{k=1}^{p^h-1} a^{kp^h}\, f\langle n + kp^h\rangle$$

<u>existe pour tout</u> a <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>et tout</u> n <u>entier,</u>

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{n=0}^{p^{2h}-1} a^n\, f\langle n\rangle[[n/p^h] + 1]$$

<u>existe pour tout</u> a, <u>et, sur chaque boule</u> $(\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ <u>est une fonction analytique dont la série de Taylor appartient à</u> $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$.

Par analogie avec le théorème 10, on pourrait parler de prolongement des éléments de $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$, mais je ne sais démontrer aucune propriété de ce prolongement.

Signalons que si A est un p-anneau strict (SERRE [12]) on peut donner des formules explicites pour résoudre les équations algébriques dans $\mathfrak{F}_1(A)$.

On trouvera un résultat plus précis que le théorème 32, mais avec des hypothèses plus strictes, dans [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.

[2] AMICE (Yvette) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[3] BARSKY (D.). - Mesures et éléments analytiques p-adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 22, 4 p.

[4] BATEMAN (Paul T.) and DUQUETTE (A. L.). - The analogue of Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[5] CHRISTOL (G.). - Equirépartition dans les séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 11e année, 1969/70, n° 4, 13 p.

[6] CHRISTOL (G.). - Sur une opération analogue à l'opération de Cartier en caractéristique nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 1-3.

[7] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 37), p. 27-115.

[8] FURSTENBERG (H.). - Algebraic functions over finite fields, J. of Algebra, t. 7, 1967, p. 271-277.

[9] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 4, 12 p.

[10] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143, 1964, Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

[11] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Thèse Sc. math., Paris, 1971.

[12] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. - Paris, Hermann, 1962 (Actualités scientifiques et industrielles, 1296. Publication de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nangaco, 8).

(Texte reçu le 3 décembre 1973)

Gilles CHRISTOL
Résidence Bois des Roches
Bâtiment 29, Escalier 1
91240 SAINT MICHEL SUR ORGE