Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Loup Mauclaire

# Sur la régularité des fonctions additives

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 15, n° 1 (1973-1974), exp. n° 23, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A19_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 23, 4 p.



20 mai 1974

# SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

## Notations.

$A = \{f : \underset{\sim}{N}^* \longrightarrow \underset{\sim}{C} \; ; \; f(mn) = f(m) + f(n) \text{ si } (m, n) = 1\}$ .

$B = \{f \in A \; ; \; \forall \, p \in \underset{\sim}{N}^* , \; \alpha \in \underset{\sim}{N} , \; f(p^\alpha) = \alpha f(p)\}$ .

$C = \{f \in B \; ; \; \exists \, c \in \underset{\sim}{C} , \; f(n) = c \log n\}$ .

Si $f \in A$ , on dit qu'un ensemble $P$ de nombres premiers est le support de $f$ si $f(p^\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \underset{\sim}{N}$ quand $p \notin P$ , et $f(p^\alpha) \neq 0$ pour au moins un $\alpha$ quand $p \in P$ . Si $P$ est constitué d'un nombre fini d'éléments, on dit que $f$ est à support fini. On notera $D$ l'ensemble des $f \in A$ , à support fini, et $E$ l'ensemble des $f \in A$ , bornées.

**1.** On doit à P. ERDÖS les résultats suivants [3] :

(1) Si $f \in A$ , si $f(n + 1) \geq f(n)$ , $f \in C$ .

(2) Si $f \in A$ , si $f(n + 1) - f(n) = o(1)$ , $f \in C$ .

Divers auteurs ont donné d'autres démonstrations de ces deux résultats [1], [2], [17], [18], [20], [22], et l'on a pu démontrer que

(3) Si $f \in A$ , si

$$\liminf_{n \to +\infty} (f(n + 1) - f(n)) \geq 0 ,$$

alors $f \in C$ . (Voir [10], [6].)

Dans [4], P. ERDÖS faisait les deux conjectures suivantes :

(4) Si $f \in A$ , si $f(n + 1) - f(n) = O(1)$ , alors $f(n) = g(n) + h(n)$ , $g \in C$ , $h \in E$ .

(5) Si $f \in A$ , si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n + 1) - f(n)| = 0 ,$$

alors $f \in C$ .

Ces deux résultats ont été établis [11], [7], [24], et on a même montré que :

(6) Si $f \in A$ , si

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n + 1) - f(n)| = 0 ,$$

alors $f \in C$ . (Voir [25], [19].)

2. Dans [8], I. KÁTAI montrait que :

(7) Si $f \in B$, si $f(2n+1) - f(n) \longrightarrow \ell\,(n \longrightarrow +\infty)$, $f \in C$. (Voir aussi [21].) La condition $f \in B$ n'est pas essentielle [12], et se remplace par $f \in A$. On peut montrer que :

(8) Si $f \in A$, si $f(an+b) - f(n) \longrightarrow \ell$, $f(n) = g(n) + h(n)$, où $g \in C$, $h \in D$.

(9) Si $f \in A$, si $f(an+b) - f(n) = O(1)$, $f(n) = g(n) + h(n) + k(n)$, où $g \in C$, $h \in D$, $k \in E$.

(Il suffit de remarquer que si $f \in A$, et $q \in N$, $q$ fixé, $f(qn) - f(q) \in A$. On utilise alors les résultats de [15].) On a aussi :

(10) Si $f \in A$, si $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(an+b) - f(n) - \ell| = 0$, $(a, b, \ell$ fixés), $f(n) = h(n) + k(n)$, $h \in B$, $k \in D$, et $\ell = f(a)$. (Voir [15].)

On peut se poser alors le problème suivant :

(P) Est-il vrai que, si $f \in B$, si, pour un $a \in \underset{\sim}{N}^*$ $(a > 1)$, et un $\varepsilon = \pm 1$ ($\varepsilon$ fixé), on ait

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(an+\varepsilon) - f(an)| = 0 ,$$

alors $f \in C$ ? Je pense que oui, mais ne sais pas le démontrer.

3. Dans [8] et [9], I. KÁTAI fait diverses conjectures. En particulier : "Que peut-on dire de fonctions $f \in A$, $g \in A$, telles que $f(an+b) - g(n) \longrightarrow \ell$ ?"

Des réponses partielles ont été données [13], [14], et depuis, on a pu montrer que :

(11) Si $f$ et $g \in A$, si $f(an+b) - g(n) \longrightarrow \ell$, alors $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$, où $f_1$, $g_1 \in C$, $f_2$, $g_2 \in D$ et $f_1 = g_1$.

(12) Si $f \in A$, $g \in A$ et $f(an+b) - g(n) = O(1)$, alors $f = f_1 + f_2 + f_3$, $g = g_1 + g_2 + g_3$, où $f_1$, $g_1 \in C$, $f_2$, $g_2 \in D$, $f_3$, $g_3 \in E$, et $f_1 = g_1$.

(13) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(an+b) - g(n) - \ell| = 0$, alors $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$, avec $f_1$, $g_1 \in B$, $f_2$, $g_2 \in D$, et $f_1 = g_1$.

De même que (2) permet de donner une caractérisation des séries L [23], les méthodes utilisées pour démontrer (12) mènent au résultat suivant (voir [16) :

(14) Si $G(s) = \prod_p (1/(1 - (g(p)\,\chi(p)/p^s)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)\,\chi(n)}{n^s}$ pour $\mathrm{Re}\, s > \sigma$, avec $g(p) > 0$, et $\chi$ un caractère modulo $q$, s'il existe $f$ multiplicative et $k_1$, $k_2 \in \underset{\sim}{R}$ tels que : $0 < k_1 \leq |(f(an+b))/g(n)| \leq k_2$, ($a$ et $b$ fixés)., alors :

$$G(s) = L_\chi(s + \alpha) , \quad \alpha \in \underset{\sim}{R} .$$

4. Si l'on pouvait prouver que la réponse à (P) est positive, cela permettrait de remplacer " $f_1 , g_1 \in B$ " dans (13) par " $f_1 , g_1 \in C$ " .

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BESICOVITCH (A. S.). - On additive functions of a positive integer, "Studies in mathematical analysis and related topics". p. 38-41. - Stanford, Stanford University Press, 1962 (Stanford Studies in Mathematics and Statistics, 4).

[2] CSASZAR (A.). - Solution du problème 28 (posé par P. Erdős) [en hongrois], Matematikai Lapok, t. 3, 1952, p. 91-94.

[3] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Annals of Math., t. 47, 1946, p. 1-20.

[4] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive arithmetical functions, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, t. 27, 1958, p. 3-7.

[5] KÁTAI (I.). - A remark on number theoretical functions, Acta arith., Warszawa, t. 14, 1968, p. 409-415.

[6] KÁTAI (I.). - A remark on additive arithmetical functions, Annales Univ. Sc. Budapest, Sect. Math., t. 10, 1967, p. 81-83.

[7] KÁTAI (I.). - On a problem of P. Erdős, J. Number Theory, t. 2, 1970, p. 1-6.

[8] KÁTAI (I.). - Some results and problems in the theory of additive functions, Acta Sc. Math., Szeged, t. 30, 1969, p. 305-311.

[9] KÁTAI (I.). - On number theoretical functions, "Number theory". p. 133-137. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1970 (Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 2).

[10] MÁTÉ (A.). - A new proof of a theorem of P. Erdős, Proc. Amer. math. Soc., t. 18, 1967, p. 159-162.

[11] MÁTÉ (E.). - On a problem of P. Erdős, Acta Sc. Math., Szeged, t. 30, 1969, p. 301-304.

[12] MAUCLAIRE (J.-L.). - Sur la régularité des fonctions additives, Enseign. math., Genève, Série 2, t. 23, 1972, p. 167-174.

[13] MAUCLAIRE (J.-L.). - On a problem of Kátai, Acta Sc. Math., Szeged, t. 36, 1974, p. 205-207.

[14] MAUCLAIRE (J.-L.). - Sur une conjecture de Kátai, Acta Sc. Math., Szeged (à paraître).

[15] MAUCLAIRE (J.-L.). - Sur la régularité des fonctions additives, C. R. Acad. Sc., t. 276, 1973, Série A, p. 431-433.

[16] MAUCLAIRE (J.-L.). - On a characterization of Dirichlet's L-functions, Publ. Research Inst. math. Sc. Kyoto Univ. (à paraître).

[17] MOSER (L.) and LAMBECK (J.). - On monotone multiplicative functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 4, 1953, p. 544-545.

[18] RÉNYI (A.). - On a theorem of P. Erdős and its application in information theory, Mathematica, Cluj, t. 1, 1959, p. 341-344.

[19] RYAVEC (C.). - On additive functions, Michigan math. J., t. 16, 1969, p. 321-329.

[20] SCHOENBERG (I. J.). - On two theorems of P. Erdős and A. Rényi, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 53-58.

[21] SKOF (F.). - Sulle funzioni f(n) aritmetiche additive asintotiche a C log n , Ist. Lombardo Accad. Sc. Lett., Rend., Série A, t. 103, 1969, p. 931-938.

[22] SÓS (Vera T.). - Solution du problème 28 (posé par P. Erdös) [en hongrois], Matematikai Lapok, t. 3, 1952, p. 91-94.

[23] TURÁN (P.). - On a characterization of Dirichlet's L-functions, Ann. Univ. Sc. Budapest, t. 8, 1965, p. 65-69.

[24] WIRSING (E.). - A characterization of log n as an additive arithmetic function, Symposia Mathematica, Vol. 4, p. 45-57. - London, Academic Press, 1970 (Istituto nazionale di Alta Matematica).

[25] WIRSING (E.). - Characterisation of the logarithm as an additive function, "Number theory Institute", p. 375-381. - Providence, American mathematical Society, 1971 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 20).

(Texte reçu le 10 décembre 1974)

Jean-Loup MAUCLAIRE
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud
Centre universitaire d'Orsay
91405 ORSAY