Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Alain Escassut

Propriétés spectrales en analyse non archimédienne

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 17, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A13_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 17, 5 p.

18 mars 1974

PROPRIÉTÉS SPECTRALES EN ANALYSE NON ARCHIMÉDIENNE

par Alain ESCASSUT

Le chapitre VI de [2] a mis en évidence certains problèmes concernant les propriétés spectrales en algèbre de Banach non archimédienne que nous essaierons ici d'approfondir et de résoudre de façon plus générale.

Nous désignerons par K un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos.

1. Semi-normes spectrales.

Soit A une $\underset{\sim}{C}$-algèbre de Banach unitaire dont la norme est notée $\|.\|$, soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur $\underset{\sim}{C}$ et, pour tout $x \in A$, soit $s_A(x)$ l'ensemble des $\lambda \in \underset{\sim}{C}$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible dans A . Alors on connait la relation

$$\sup_{\varphi\in\mathfrak{X}} |f(x)| = \sup_{\lambda\in s_A(x)} |\lambda| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

vraie pour tout $x \in A$, et cette relation conduit à définir une semi-norme $\|.\|_{sp}$ appelée semi-norme spectrale par

$$\|x\|_{sp} = \sup_{\varphi\in\mathfrak{X}} |\varphi(x)| .$$

Considérons maintenant une K-algèbre de Banach A dont la norme $\|.\|$ n'est d'ailleurs pas supposée ultramétrique. On peut naturellement définir une semi-norme $\|.\|_{si}$ par

$$\|x\|_{si} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} ,$$

et il est clair que $\|.\|_{si} \leq \|.\|$. De plus, il résulte du théorème 1 de [3] que si l'on note $\mathrm{Mult}(A , \|.\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|.\|$, on a

$$\|x\|_{si} = \sup_{f\in \mathrm{Mult}(A,\|.\|)} f(x) .$$

D'autre part, si A n'est pas un corps, l'ensemble $s_A(x)$ des $\lambda \in K$, tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible, est non vide pour tout $x \in A$, et l'on peut définir une semi-norme $\|.\|_s$ par

$$\|x\|_s = \sup_{\lambda\in s_A(x)} |\lambda|$$

qui vérifie de façon immédiate $\|x\|_s \leq \|x\|_{si}$ du fait que A est complète.

Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1 , l'ensemble $\mathfrak{X}$ des homomorphismes de A sur K est non vide ainsi que les ensembles

$$sa_A(x) = \{\varphi(x) \ ; \ \varphi \in \mathfrak{X}\} \quad (x \in A)$$

et l'on peut définir une semi-norme $\|.\|_{sa}$ par

$$\|x\|_{sa} = \sup_{\varphi\in\mathfrak{X}} |\varphi(x)| = \sup_{\lambda\in sa_A(x)} |\lambda| ,$$

et l'on a trivialement $\|\cdot\|_{sa} \leq \|\cdot\|_s$.

Mais contrairement au cas d'une $\underset{\sim}{C}$-algèbre de Banach, la double inégalité

$$\|x\|_{sa} \leq \|x\|_s \leq \|x\|_{si}$$

peut parfois être stricte ([2], théorème VI.12).

Exemple : $\|h\| = \sup |h|(r)$, $r \leq 1$, $h \in K(D)$, où $D = \{x \; ; \; |x| \leq 1\}$.

2. Propriétés (o), (p), (q).

Ceci nous conduit à étudier les trois propriétés suivantes :

Dans une K-algèbre de Banach qui n'est pas un corps, on notera (q) la propriété

(q) $$\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{si} .$$

Dans une K-algèbre de Banach, dont l'un au moins des idéaux maximaux est de codimension 1 , on notera (o) et (p) les propriétés

(o) $$\|\cdot\|_{sa} = \|\cdot\|_s ,$$

(p) $$\|\cdot\|_{sa} = \|\cdot\|_{si} .$$

Par définition, on voit que A possède (p) si, et seulement si, elle possède (o) et (q). Nous allons comparer de façon plus précise ces propriétés.

THÉORÈME 1. - Les propriétés (o) et (p) sont équivalentes dans la classe des K-algèbres de Banach dont un idéal maximal au moins est de codimension 1 .

Preuve. - Soit A une K-algèbre de Banach, et supposons que A ne possède pas la propriété (q). On se ramène tout d'abord au cas où $\|\cdot\|_{si}$ est une norme pour laquelle A est complète, puis, grâce à un procédé de calcul fonctionnel holomorphe sur le spectre d'un élément $x \in A$, tel que $\|x\|_s < \|x\|_{si}$, et en utilisant les propriétés des T-filtres ainsi qu'un résultat de MOTZKIN-ROBBA-GUENNEBAUD (selon lequel de toute suite de disques non circonférenciés deux à deux disjoints, dont la réunion est dense dans une couronne de K , on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point de K , [5] et [4], chap. IV, preuve de la proposition 1), on démontre l'existence d'un élément $\varpi \in A$ qui est la limite d'une suite de fractions rationnelles en x , sans pôle dans $s_A(x)$, tel que $\|\varpi\|_{sa} < \|\varpi\|_s$, ce qui prouve que A ne satisfait pas (p).

PROPOSITION 1. - Soit D l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| < 1$, et soit $A = H(D)\{T\}$ l'algèbre des séries formelles restreintes en T à coefficients dans H(D) , dont l'application identique sur D est notée x . Soit $X = 1 - xT$, soit $r \in]0 , 1[$, et soit S l'ensemble des polynômes en X de la forme $\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{q_i}$, où $|a_i| < r$ pour tout i . Alors l'application $\|\cdot\|_s^B$, définie sur l'algèbre $B = S^{-1} A$ par

$$t \to \|t\|_s^B = \sup_{\lambda \in s_B(t)} |\lambda| \qquad (t \in B) ,$$

est norme, et l'algèbre de Banach $\hat{B}$ complétée de B pour cette norme possède la propriété (q), mais non la propriété (p).

Preuve. - On montre que $\|\frac{1}{X}\|_s^{\hat{B}} = \frac{1}{r}$ et $\|\frac{1}{X}\|_{sa}^{\hat{B}} = 1$, tandis que, par construction, $\hat{B}$ possède la propriété (q).

Remarque. - Rappelons à ce sujet le théorème VI. 10 de [2] qui se généralise de façon évidente dans le cas d'une K-algèbre de Banach unitaire A , même si la norme de A n'est pas ultramétrique.

Soit A une K-algèbre de Banach unitaire, qui possède la propriété (p). Soit x un élément de A dont les composantes infra-connexes du spectre D sont en nombre fini n et notées $D_1 , \ldots , D_n$. Soit $\Delta = sa_A(x)$, et soit $\Delta_i = D_i \cap \Delta$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors Δ_i est une frontière analytique de D_i $(i \leq i \leq n)$.

3. Idempotents associés.

Soit A une C-algèbre de Banach, et soit $x \in A$.

On dit qu'un idempotent u de A est associé à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$, et pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, on a $\varphi(u) = 0$. On a donné, dans [1] et [2], une définition semblable de la notion d'idempotents associés, et on a obtenu certains résultats dans le cas où A possède la propriété (p). Toutefois, il apparaît que si l'on veut obtenir des résultats plus généraux (en particulier si A ne satisfait plus (p) mais seulement (q)), il est préférable de considérer une notion légèrement différente d'idempotents associés qui coïncide toutefois avec la précédente si A satisfait la propriété (p), d'après les théorèmes VI.10 et VI.15 de [2].

Définition. - Soient A une K-algèbre de Banach, $\hat{\mathfrak{X}}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur des extensions de K , et soit $x \in A$. Nous dirons qu'un idempotent u de A est associé à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \hat{\mathfrak{X}}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$ et si, pour tout $\varphi \in \hat{\mathfrak{X}}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, $\varphi(x) \in K$, on a $\varphi(u) = 0$.

Remarque. - Si l'algèbre A possède la propriété (p), la nouvelle définition d'un idempotent associé à x et à $E \subset s_A(x)$ coïncide avec celle de [1] et [2], et tous les résultats de [1] et [2] s'appliquent à cette nouvelle définition. En particulier, si A satisfait (p) et s'il existe un idempotent associé à x et à E , il est unique ([2], théorème VI.15).

Pour généraliser le théorème VI.16 de [2], nous devrons utiliser les résultats de [3] sur les semi-normes multiplicatives continues de l'algèbre $K(D)$ des fractions rationnelles sans pôle dans un fermé borné D de K .

Définition. - Nous dirons qu'une couronne vide Γ de D est x-fendue si elle possède la propriété

$$\inf_{a\in\Gamma} |a| \, \|t_a\|_{si} < 1 \quad \text{où} \quad t_a = \frac{x - \alpha}{(x - a)^2} .$$

THÉORÈME 2. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps. Soit $x \in A$, soit $D = s_A(x)$, et soit Γ_0 une couronne x-fendue de D. Alors il existe un idempotent associé à x et $\mathfrak{J}(\Gamma_0)$ (resp. à x et $\mathcal{E}(\Gamma_0)$). De plus, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini $(D_1, \ldots, D_n)$, et si toute couronne vide de D est x-fendue, alors il existe une famille d'idempotents u_i $(1 \leq i \leq n)$ tels que u_i soit associé à x et D_i, et tels que

(1) $$u_i \, u_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

et

(2) $$\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$$

(Les couronnes vides Γ de D sont définies notamment dans [2], IV, ainsi que $\mathfrak{J}(\Gamma)$ et $\mathcal{E}(\Gamma)$).

Preuve. - La démonstration du théorème 2 s'apparente naturellement à celle du théorème VI.16 de [2]. Mais, à la différence de cette dernière, il faut ici utiliser la semi-norme $\|\cdot\|_{si}$ de l'algèbre A, à l'aide du lemme qui précède.

COROLLAIRE 1. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps et qui possède la propriété (q) ; alors, pour toute couronne vide Γ de $D = s_A(x)$, il existe un idempotent associé à x et $\mathfrak{J}(\Gamma)$ (resp. x et $\mathcal{E}(\Gamma)$) ; de même, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini n, il existe une famille d'idempotents u_i $(1 \leq i \leq n)$ associés à x et à D_i, et satisfaisant (1) et (2). Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1 et possède la propriété (p), les idempotents u_i existent, et sont uniques.

COROLLAIRE 2. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps, qui possède la propriété (q), et dont les idempotents sont en nombre fini N. Alors, pour tout $x \in A$, le nombre des composantes infra-connexes de $s_A(x)$ est majoré par N.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (A.). - Spectre algébrique et idempotents associés dans une algèbre de Banach ultramétrique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, série A, p. 1285-1288.

[2] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-107.

[3] GUENNEBAUD (B.). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.

[4] GUENNEBAUD (B.). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse Sc. math. Univ. Poitiers, 1973.

[5] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Ensemble d'analycité en analyse p-adique, Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 8a, 5 p.

(Texte reçu le 18 mars 1974)

Alain ESCASSUT
Université de Paris-Sud
Bâtiment 425, Mathématiques
Campus universitaire
91405 ORSAY