Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Transcendance dans les variétés de groupe

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº 23, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 23, 16 p.

14 mai 1973

TRANSCENDANCE DANS LES VARIÉTÉS DE GROUPE

par Michel WALDSCHMIDT

CARTIER avait conjecturé que le théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de e^{α} devait s'étendre aux variétés de groupe. LANG démontra cette conjecture en 1962, puis obtint, en 1966 ([3], [4]), une généralisation semblable du théorème de Gel'fond-Schneider sur la transcendance de a^b, par la méthode de Gel'fond (c'est-à-dire en considérant les deux fonctions e^z et e^{bz}). LANG déduit ces résultats d'un critère de dépendance algébrique de fonctions méromorphes satisfaisant une équation différentielle à coefficients algébriques.

Nous étudierons une généralisation analogue du même théorème de Gel'fond-Schneider, mais en utilisant la méthode de Schneider (qui considérait les deux fonctions z et a^z). Là encore, les résultats seront des conséquences d'un critère général sur les fonctions méromorphes.

1. Préliminaires.

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Une variété de groupe, définie sur K, est un sous-ensemble G d'un espace affine ou projectif sur $\mathbb{C}$, qui est une K-variété algébrique (c'est-à-dire que G est l'ensemble des zéros des éléments d'un idéal premier d'un anneau de polynômes à coefficients dans K) muni d'une structure de groupe, telle que l'ensemble

$$\{(x, y, xy^{-1}) ; \ x \in G, \ y \in G\}$$

soit une K-variété algébrique.

On note alors G_K l'ensemble des points de G à coefficients dans K.

Un exemple simple de variété de groupe est fourni par le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices inversibles $n \times n$.

Soit G une variété de groupe. Un sous-groupe à un paramètre est un homomorphisme analytique complexe

$$\varphi : \mathbb{C} \dashrightarrow G_{\mathbb{C}}$$

dont la dérivée à l'origine est non nulle. La dimension algébrique de φ est la dimension de la plus petite sous-variété de groupe de G contenant $\varphi(\mathbb{C})$.

Etant donné un plongement de $G_{\mathbb{C}}$ dans un espace projectif, si

$$\varphi = (\varphi_0 , \ldots , \varphi_N) , \quad \varphi_0(0) \neq 0 ,$$

est un système de coordonnées projectives de φ, la dimension algébrique de φ est égale au degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps

$$\mathbb{C}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \dots, \frac{\varphi_N}{\varphi_0}\right) .$$

2. Le cas linéaire.

Un sous-groupe à un paramètre φ d'un groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ vérifie

$$\varphi(t+s) = \varphi(t).\varphi(s) \quad \text{pour tout} \quad t \text{ , } s \in \mathbb{C} ,$$

donc

$$\varphi'(t) = \varphi(t).\varphi'(0) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{C} .$$

On en déduit

$$\varphi(t) = \exp(M.t) ,$$

avec $M = \varphi'(0) \in M_n(\mathbb{C})$ et $M \neq 0$, où $M_n(\mathbb{C})$ est l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

La dimension algébrique d de φ se calcule très facilement en fonction de la dimension δ du sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les valeurs propres de M : on a $d = \delta$ si M est diagonalisable, et $d = \delta + 1$ sinon. Pour le voir, écrivons φ sous forme matricielle (c'est-à-dire en coordonnées affines)

$$\varphi = (\varphi_{i,j}) .$$

La dimension algébrique de φ est égale au degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps, noté $\mathbb{C}(\{\varphi_{i,j}\})$, obtenu en adjoignant à $\mathbb{C}$ les n^2 éléments $\varphi_{i,j}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$.

LEMME 1 [9]. - *Soit*

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathbb{C} &\dashrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ t &\dashrightarrow (\varphi_{i,j}(t)) \end{aligned}$$

un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$, *de dimension algébrique* d .

Soient $\lambda_1 , \dots , \lambda_n$ *les valeurs propres de la matrice* $\varphi'(0)$, *et* $u_1 , \dots , u_\delta$ *une base du sous-*$\mathbb{Z}$*-module de* $\mathbb{C}$ *engendré par* $\lambda_1 , \dots , \lambda_n$.

1° *Soit* Ω_1 *un sous-corps algébriquement clos de* $\mathbb{C}$, *tel que* $\varphi'(0) \in M_n(\Omega_1)$.

Si $\varphi'(0)$ *est diagonalisable, on a*

$$\Omega_1[\{\varphi_{i,j}\}] = \Omega_1[\exp(u_1\, t) , \dots , \exp(u_\delta\, t)] ,$$

donc $d = \delta$.

Si $\varphi'(0)$ *n'est pas diagonalisable, on a*

$$\Omega_1[\{\varphi_{i,j}\}] = \Omega_1[t , \exp(u_1\, t) , \dots , \exp(u_\delta\, t)] ,$$

donc $d = \delta + 1$.

2° *Soit* γ *un nombre complexe tel que*

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \exp \lambda_i\, \gamma \neq \exp \lambda_j\, \gamma .$$

<u>Soit</u> Ω_2 <u>un sous-corps algébriquement clos, de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>tel que</u> $\varphi(\gamma) \in GL_n(\Omega_2)$. <u>Alors</u>

$$\Omega_2[\{\varphi_{i,j}\}] \subset \Omega_2[\frac{t}{\gamma} , \exp(u_1 \; t) , \dots , \exp(u_\delta \; t)] .$$

<u>De plus</u>, <u>si</u> $d = \delta$, <u>alors</u>

$$\Omega_2[\{\varphi_{i,j}\}] = \Omega_2[\exp(u_1 \; t) , \dots , \exp(u_\delta \; t)] .$$

On voit ainsi que φ est une fonction rationnelle de t si, et seulement si, $M = \varphi'(0)$ est nilpotente.

<u>Démontrons le lemme</u> 1.

1° Si $P \in GL_n(\Omega_1)$, la dimension de φ est égale à la dimension algébrique du sous-groupe à 1-paramètre

$$\varphi : \underset{\sim}{C} \dashrightarrow GL_n(\underset{\sim}{C})$$
$$t \dashrightarrow P.\varphi(t).P^{-1} = (\psi_{i,j}(t)) ,$$

et on a même

$$\Omega_1[\{\varphi_{i,j}\}] = \Omega_1[\{\psi_{i,j}\}] .$$

Donc, quitte à remplacer M par $P^{-1}\,MP$, on peut supposer que M est soit diagonale (auquel cas le résultat est immédiat), soit "réduite" sous forme de blocs diagonaux

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix} , \text{ où } M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} .$$

Alors

$$\exp(M_i \; t) = \exp \lambda_i \; t \times \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque enfin que les fonctions

$$t , \exp u_1 \; t , \dots , \exp u_\delta$$

sont algébriquement indépendantes sur $\underset{\sim}{C}$ si, et seulement si, les nombres

$$u_1 , \dots , u_\delta$$

sont $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants.

2° Soit $P \in GL_n(\Omega_2)$ tel que $P^{-1}\,\varphi(\gamma)\,P$ soit diagonale si $d = \delta$, ou "réduite" si $d = \delta + 1$. Soit

$$M_1 = P^{-1}\,\varphi'(0)\,P ,$$

et

$$\psi(t) = P^{-1}\,\varphi(t)\,P = \exp M_1 \; t = (\psi_{i,j}(t)) .$$

On a alors

$$K[\{\psi_{i,j}\}] = K[\{\varphi_{i,j}\}] .$$

On décompose la matrice M_1 sous la forme $S + N$, où $S \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, et $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$, tel que $B^{-1} SB$ soit diagonale ; il existe des polynômes $P_{i,j,k} \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$(\psi_{i,j}(t)) = B(\exp(B^{-1} SBt))\, B^{-1} \exp Nt$$
$$= (\textstyle\sum_{k=1}^{n} P_{i,j,k}(t) \exp \lambda_k t) .$$

Pour $t \in \mathbb{Z}$, la diagonale de $\exp M_1 \gamma t$ est $(\exp \lambda_1 \gamma t , \dots , \exp \lambda_n \gamma t)$, d'où

$$\psi_{i,i}(\gamma t) = \exp \lambda_i \gamma t \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{Z} , \quad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

On déduit de l'hypothèse

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \exp \lambda_i \gamma \neq \exp \lambda_j \gamma$$

l'égalité

$$\psi_{i,i}(t) = \exp \lambda_i t \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{C} , \quad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

Donc

$$\Omega_2[\{\psi_{i,j}\}] \supset \Omega_2[\exp u_1 t , \dots , \exp u_\delta t] .$$

Si $d = \delta$, l'inclusion inverse est immédiate, puisque $\psi_{i,j}(\gamma t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $i \neq j$, donc $\psi_{i,j}(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{C}$, $i \neq j$.

Supposons $d = \delta + 1$. Soit f une des fonctions $\varphi_{i,j}$

$$f(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} P_k(t) \exp \lambda_k t , \quad t \in \mathbb{C} .$$

Écrivons le système d'équations $f(\gamma t) \in K$ pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \gamma^{i-1} t^{i-1} \exp \lambda_j \gamma t \in K , \quad t \in \mathbb{Z} .$$

On en déduit (par exemple en utilisant le lemme 5 de N. I. FEL'DMAN [2]),

$$a_{i,j} \gamma^{i-1} \in K ,$$

donc

$$f(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} Q_k(\frac{t}{\gamma}) \exp \lambda_k t \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{C} ,$$

où $Q_k \in K[X]$. Donc $f(t) \in K[\frac{t}{\gamma} , \exp u_1 t , \dots , \exp u_\delta t]$. D'où le lemme 1.

Si G est une variété de groupe linéaire, et $\varphi : \mathbb{C} \to G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à un paramètre de G, on a

$$\varphi(t) = \exp Mt ,$$

où $M = \varphi'(0)$ est un élément de l'espace tangent T à l'origine ; on peut représenter G comme un groupe de matrices, et T par $M_n(\mathbb{C})$.

Il est facile maintenant d'énoncer le théorème de Gel'fond-Schneider en utilisant le langage des groupes linéaires.

PROPOSITION 1. - *Soit* G *une variété de groupe linéaire, définie sur le corps* $\overline{\mathbb{Q}}$ *des nombres algébriques. Soit* φ *un sous-groupe à un paramètre de* G ; *on suppose que* $\varphi(t)$ *n'est pas une fonction rationnelle de* t . *Soient* α_1 , α_2 *deux nombres algébriques, tels que* $\varphi(\alpha_1)$ *et* $\varphi(\alpha_2)$ *appartiennent à* $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Alors α_1 , α_2 *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement dépendants.*

Si on considère le sous-groupe à 1 paramètre

$$t \longmapsto a^t = \exp(\ell t)$$

de $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, avec $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = b$, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE (GEL'FOND, SCHNEIDER). - *Soient* $\ell \neq 0$ *et* $b \notin \mathbb{Q}$ *deux nombres complexes. L'un au moins des trois nombres*

$$b , \quad a = e^{\ell} , \quad a^b = e^{\ell b}$$

est transcendant (sur $\mathbb{Q}$ *).*

Montrons inversement, que la proposition 1 est une conséquence du théorème de Gel'fond-Schneider. Comme $\varphi(t)$ n'est pas une fraction rationnelle de t , la matrice $\varphi'(0)$ n'est pas nilpotente, et possède donc au moins une valeur propre non nulle λ ; la fonction $t \longmapsto \exp \lambda t$ appartient alors à $\overline{\mathbb{Q}}[\{\varphi_{i,j}(t)\}]$ (avec les notations du lemme 1). Pour $t = \alpha_1$ ou α_2 , on en déduit

$$\exp \lambda\alpha_1 \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \text{et} \quad \exp \lambda\alpha_2 \in \overline{\mathbb{Q}} .$$

Le théorème de Gel'fond-Schneider (avec $\ell = \lambda\alpha_1$ et $b = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$) montre que α_1 , α_2 sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

Lorsqu'on ne suppose plus les nombres α_1 , α_2 algébriques, on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 2 [9]. - *Soit* G *une variété de groupe linéaire, définie sur le corps* $\overline{\mathbb{Q}}$ *des nombres algébriques. Soit* φ *un sous-groupe à un paramètre de* G , *de dimension algébrique* d . *Soient* $t_1 , \dots , t_m$ *des nombres complexes,* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants, tels que*

$$\varphi(t_j) \in G_{\overline{\mathbb{Q}}} \quad \textit{pour} \quad j = 1 , \dots , m .$$

Alors $md \leqslant m + d$.

La conclusion s'écrit aussi : $(m \geqslant 3) \Rightarrow (d = 1)$, et $(m \geqslant 2) \Rightarrow (d \leqslant 2)$. Sous les hypothèses de la proposition 2, si on impose à $\varphi'(0)$ de n'être pas diagonalisable, la conclusion devient : $(m \geqslant 2) \Rightarrow (d = 1)$. C'est le théorème de Gel'fond-Schneider. Dans le cas où $\varphi'(0)$ est diagonalisable, la proposition 2 est équivalente au corollaire suivant.

COROLLAIRE (LANG [3]). - Si x_1 , x_2 (resp. y_1 , y_2 , y_3) sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, l'un des six nombres

$$\exp(x_i\, y_j)\ , \quad i = 1\ ,\ 2\ ;\quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,$$

est transcendant.

LANG [3] conjecture qu'on peut remplacer les trois nombres y_1 , y_2 , y_3 par deux nombres y_1 , y_2 ; c'est équivalent à conjecturer que, sous les hypothèses de la proposition 2, on a l'inégalité stricte

$$md < m + d\ ,$$

c'est-à-dire $(m \geqslant 2) \Rightarrow (d = 1)$.

Les propositions 1 et 2 peuvent être améliorées dans le cas particulier où

$$\varphi'(0) \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})\ .$$

PROPOSITION 3 [3]. - Soit G une variété de groupe linéaire définie sur le corps des nombres algébriques. Soit φ un sous-groupe à un paramètre, normalisé pour avoir une dérivée à l'origine $\varphi'(0)$ algébrique. On suppose que $\varphi(t)$ n'est pas une fonction rationnelle de t . Alors

1° Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \neq 0$, on a $\varphi(\alpha) \notin G_{\overline{\mathbb{Q}}}$,

2° S'il existe $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$, tel que $\varphi(u) \in G_{\overline{\mathbb{Q}}}$,

alors $\varphi(\mathbb{C})$ est une sous-variété de groupe de dimension 1 de G .

Dans le cas où $\varphi'(0)$ n'est pas diagonalisable, la proposition 3 est encore une nouvelle formulation du théorème de Gel'fond-Schneider. Dans le cas où $\varphi'(0)$ est diagonalisable, la proposition 3 est équivalente au corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE (HERMITE-LINDEMANN). - Si $\alpha \neq 0$ est un nombre algébrique, alors e^{α} est transcendant.

Pour terminer cette étude des sous-groupes à un paramètre de variétés linéaires, traduisons la conjecture suivante de Schanuel [3].

Si x_1 , ... , x_n sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$K = \mathbb{Q}(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n\ ,\ \exp x_1\ ,\ \ldots\ ,\ \exp x_n)$$

est supérieur ou égal à n .

CONJECTURE (SCHANUEL). - Soit φ un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$, de dimension algébrique d . Soit K un sous-corps algébriquement clos de $\mathbb{C}$, et soit α un élément non nul de K ; on suppose

$$\varphi'(0) \in M_n(K) \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha) \in GL_n(K)\ .$$

Alors le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$ est supérieur ou égal à $d - 1$.

3. Le cas abélien.

Soit A une variété de groupe dans l'espace projectif $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$; on dit que A est une variété abélienne de dimension D s'il existe un homomorphisme analytique surjectif

$$\Theta : \mathbb{C}^D \longrightarrow A_{\mathbb{C}}$$

dont le noyau est une "lattice" Λ de $\mathbb{C}^D$ (c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^D$ de dimension $2D$ sur $\mathbb{R}$).

Les sous-groupes à un paramètre de A sont alors décrits par les homomorphismes

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow A_{\mathbb{C}} \\ t &\longmapsto \Theta(\alpha t) , \end{aligned}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^D$, $\alpha \neq 0$. Utilisons un système de coordonnées projectives ; il existe $N + 1$ fonctions entières $\theta_0 , \dots , \theta_N$, de $\mathbb{C}^D$ dans $\mathbb{C}$, telles que

$$\Theta(z) = (\theta_0(z) , \dots , \theta_N(z)) \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{C}^D .$$

L'un des nombres $\theta_0(0) , \dots , \theta_N(0)$ est non nul ; quitte à effectuer un changement de coordonnées, on supposera que $\theta_0(0) \neq 0$.

Les composantes $(\varphi_0 , \dots , \varphi_N)$ de φ sont alors les fonctions

(1) $$\varphi_i(t) = \theta_i(\alpha . t) , \quad 0 \leq i \leq N , \quad t \in \mathbb{C} .$$

La relation

$$\Theta(z + \lambda) = \Theta(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{C}^D , \quad \lambda \in \Lambda ,$$

se traduit sur les fonctions $\theta_0 , \dots , \theta_N$ (voir par exemple [5]).

En particulier il existe une forme quadratique q

$$q : \mathbb{C}^D \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

telle que les fonctions

(2) $$\psi_i(z) = |\theta_i(z)| . \exp q(z)$$

vérifient

(3) $$\psi_i(z + \lambda) = \psi_i(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{C}^D , \quad \lambda \in \Lambda .$$

Comme ψ_i est continue et $\mathbb{C}^D/\Lambda$ compact, on en déduit que les fonctions

$$\theta_0 , \dots , \theta_N$$

sont d'ordre inférieur ou égal à 2 , c'est-à-dire vérifient

$$\log \max_{|z|=R} |\theta_i(z)| = \log|\theta_i|_R \ll R^2 \quad \text{pour} \quad R \longrightarrow +\infty .$$

Si φ est un sous-groupe à un paramètre de $A_{\mathbb{C}}$ de dimension algébrique 1 , alors l'image de φ est une courbe elliptique, et on peut paramétrer φ à l'aide d'une fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass, par

(4) $$\varphi(t) = (1 , \wp(bt) , \wp'(bt) , 0 , \dots , 0) ,$$

où $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Si, de plus, la variété abélienne A est définie sur le corps des nombres algébriques, alors l'invariant modulaire j, associé à la courbe elliptique (donc à $\wp$), est algébrique, ce qui revient à dire qu'on peut choisir une paramétrisation (4) telle que les invariants g_2 et g_3 de $\wp$ soient algébriques (c'est pour cette raison que nous avons choisi cette forme de paramétrisation, sans imposer la condition $b = 1$).

Rappelons que $\wp$ vérifie l'équation différentielle

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\,\wp - g_3 ,$$

avec $j = (12g_2)^3/(g_2^3 - 27g_3^2)$.

La dérivée à l'origine $\varphi'(0)$ de φ est à coefficients algébriques si, et seulement si, b est algébrique (et dans ce cas on peut choisir $b = 1$).

La paramétrisation (4) fait intervenir des fonctions méromorphes ; nous avons vu, dans le cas général, qu'il existait une paramétrisation avec des fonctions théta holomorphes ; pour la retrouver ici, on introduit les fonctions sigma de Weierstrass [5]. Par exemple, en désignant par a un zéro de $\wp$, on a [7] :

$$\wp(u) = -\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}{\sigma^2(u)\,\sigma(a)} .$$

On déduit alors de (4) une paramétrisation de φ (qu'il suffit d'écrire dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$) par des fonctions entières.

On peut maintenant étudier les sous-groupes à un paramètre de variétés abéliennes de la même manière que nous l'avons fait au § 1 pour les variétés linéaires.

Voici donc pour commencer l'analogue de la proposition 1 dans le cas des variétés abéliennes.

THÉORÈME 1 [10]. - Soit A une variété abélienne définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to G_C$ un sous-groupe à un paramètre de A. Soient α_1, α_2, α_3 trois nombres algébriques, tels que les trois nombres

$$\varphi(\alpha_1) , \quad \varphi(\alpha_2) , \quad \varphi(\alpha_3)$$

appartiennent à $A_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Alors α_1, α_2, α_3 sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

Dans le cas d'une variété abélienne de dimension 1, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE (RAMACHANDRA [7]). - Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, dont les invariants g_2, g_3 sont algébriques. Soit $b \neq 0$ un nombre complexe, et soient α_1, α_2, α_3 trois nombres algébriques, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, tels que, $b\alpha_1$, $b\alpha_2$, $b\alpha_3$ ne soient pas pôles de $\wp$.

Alors l'un des trois nombres $\wp(b\alpha_1)$, $\wp(b\alpha_2)$, $\wp(b\alpha_3)$ est transcendant.

Quand on ne suppose plus que les points α_1 , α_2 , α_3 sont algébriques, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2 [9]. - Soient A une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $\varphi : \mathbb{C} \to A_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à un paramètre de A , de dimension algébrique d , et $t_1 , \ldots , t_m$ des nombres complexes, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, dont les images par φ appartiennent à $A_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Alors $md \leqslant m + 2d$.

La conclusion s'écrit aussi :

$$(m \geqslant 5) \Rightarrow (d = 1) ;$$

$$(m \geqslant 4) \Rightarrow (d \leqslant 2) ;$$

$$(m \geqslant 3) \Rightarrow (d \leqslant 3) .$$

On en déduit, en particulier [3], que dans une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, les seuls sous-groupes à un paramètre pouvant contenir un sous-groupe de $A_{\overline{\mathbb{Q}}}$, de type fini et de rang supérieur ou égal à 5 , sont les courbes elliptiques.

D'autre part, en considérant un sous-groupe à un paramètre,

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to A_{\mathbb{C}} \\ t &\mapsto \Theta(b.t) , \end{aligned}$$

(avec $b = (b_1 , \ldots , b_d) \in \mathbb{C}^D$, $b_i \neq 0$ pour tout $i = 1 , \ldots , d$), d'une variété A produit de d courbes elliptiques :

$$t \mapsto (1 , \wp_i(t) , \wp_i'(t)) , \quad 1 \leqslant i \leqslant d ,$$

on déduit du théorème 2 le corollaire suivant.

COROLLAIRE (RAMACHANDRA [7]). - Soient $\wp_1 , \ldots , \wp_d$ $(d \geqslant 2)$ des fonctions elliptiques de Weierstrass, dont les invariants sont tous algébriques. Soient

$$b_1 , \ldots , b_d$$

des nombres complexes non nuls. On suppose que les fonctions

$$\wp_1(b_1 t) , \ldots , \wp_d(b_d t)$$

sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. Alors l'ensemble des nombres complexes u , tels que, pour tout $i = 1 , \ldots , d$, $b_i u$ soit un pôle de $\wp$, ou

$$\wp_i(b_i u) \in \overline{\mathbb{Q}} ,$$

forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$, de dimension inférieure ou égale à $2d/(d - 1)$.

LANG conjecture [4] que, sous les hypothèses du théorème 2, la conclusion s'écrit: $(m \geqslant 2) \Rightarrow (d = 1)$. On en déduirait un cas particulier d'une conjecture de RAMACHANDRA [7] : Sous les hypothèses du corollaire, la dimension de l'espace vectoriel des u est inférieure ou égale à 1 (Le cas général de la conjecture de Ramachandra nécessiterait, en outre une généralisation aux variétés de groupe quelconques ; nous discuterons ce problème plus loin). Enfin, dans le cas du théorème 1, on peut conjecturer qu'il suffit d'utiliser deux points α_1, α_2 au lieu de trois.

Lorsqu'on normalise le sous-groupe φ pour que sa dérivée à l'origine soit algébrique, on obtient un théorème.

THÉORÈME 3 [3]. - Soit A une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit

$$\varphi : \mathbb{C} \dashrightarrow A_{\mathbb{C}}$$

un sous-groupe à un paramètre, normalisé pour avoir une dérivée algébrique à l'origine. On a

$$\varphi(t) = \Theta(\alpha t) ,$$

où α est un élément non nul de l'espace tangent à l'origine, et α est algébrique (c'est-à-dire à coordonnées algébriques).

Alors

1° $\Theta(\alpha)$ est transcendant ;

2° S'il existe $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$ tel que $\varphi(u) \in A_{\overline{\mathbb{Q}}}$,

alors φ est une sous-variété de groupe de dimension 1, c'est-à-dire une courbe elliptique.

Dans le cas de dimension 1, on déduit du théorème 3 le résultat suivant de SCHNEIDER :

COROLLAIRE 1 [8]. - Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants g_2, g_3 algébriques. Si $\alpha \neq 0$ est algébrique, alors α n'est pas pôle de $\wp$, et $\wp(\alpha)$ est transcendant.

D'autre part, en utilisant une variété produit de deux courbes elliptiques, on déduit du théorème 3 un autre résultat de SCHNEIDER.

COROLLAIRE 2 [8]. - Soient $\wp_1$, $\wp_2$ deux fonctions elliptiques de Weierstrass, d'invariants algébriques. Soit β un nombre algébrique non nul, tel que les deux fonctions $\wp_1(t)$ et $\wp_2(\beta t)$ soient algébriquement indépendantes. Si u est un nombre complexe non pôle de $\wp_1(t)$ ou de $\wp_2(\beta t)$, alors l'un des deux nombres $\wp_1(u)$, $\wp_2(\beta u)$ est transcendant.

On obtient, en particulier, la transcendance de $j(\alpha)$ quand α est algébrique sans être imaginaire quadratique. Ce résultat sur la fonction modulaire a été étendu par MORITA à certaines fonctions arithmétiques automorphes [6].

4. Le cas général.

Les propositions 1, 2, 3 et les théorèmes 1, 2, 3 s'étendent évidemment aux variétés de groupe qui sont produits d'une variété linéaire et d'une variété abélienne.

On peut également étendre ces résultats à des produits faisant intervenir des variétés de dimension 2 associées aux intégrales de seconde espèce par l'application

$$(t\ ,\ u) \longmapsto (1\ ,\ \wp(t)\ ,\ \wp'(t)\ ,\ u - \zeta(t))\ , \tag{5}$$

où ζ est la fonction zêta de Weierstrass associée à $\wp$. On obtient ainsi le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - *Soient* $G_1, \ldots, G_\ell$ *des variétés de groupe, définies sur le corps* $\overline{\mathbb{Q}}$ *des nombres algébriques. On suppose que, pour tout* $i = 1, \ldots, \ell$, G_i *est une variété linéaire, ou abélienne, ou encore une variété de dimension* 2 *paramétrée par* (5). *Soit* $G = G_1 \times \ldots \times G_\ell$, *et soit* $\varphi : \mathbb{C} \to G_{\mathbb{C}}$ *un sous-groupe à un paramètre de* G, *de dimension algébrique* d. *Soient* $t_1, \ldots, t_m$ *des nombres complexes,* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants, tels que* $\varphi(t_i) \in G_{\mathbb{Q}}$ *pour tout* $i = 1, \ldots, m$. *Alors* $md \leqslant m + 2d$.

Dans le cas $s = 1$ et $d = 2$, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - *Soit* $\wp$ *une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants* g_2, g_3 *algébriques. Soit* ζ *la fonction zêta de Weierstrass associée à* $\wp$. *Soient* t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 *cinq nombres complexes,* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Soit* $b \in \mathbb{C}$. *Alors l'un au moins des dix nombres* $\wp(u_i)$, $\zeta(u_i) + bu_i$, $i = 1,2,3,4,5$, *est transcendant.*

On peut déduire du théorème 4 de nombreux autres corollaires du même genre [9], mais aucun d'eux ne semble le meilleur possible. On peut conjecturer, ici encore, que la conclusion peut être remplacée par $(m \geqslant 2) \Rightarrow (d = 1)$, et que, de plus, l'énoncé est valable pour une variété de groupe quelconque. Cette généralisation est possible dans la situation du théorème 3, grâce à l'existence, dans une variété de groupe G, d'un sous-groupe linéaire maximal L tel que G/L soit une variété abélienne. Par ce procédé, on déduit de la proposition 3 et du théorème 3 le résultat suivant.

THÉORÈME 5 [3]. - *Soit* G *une variété de groupe définie sur le corps des nombres algébriques. Soit* $\varphi : \mathbb{C} \to G_{\mathbb{C}}$ *un sous-groupe à un paramètre de* G, *normalisé pour avoir une dérivée algébrique à l'origine.*

1° *Si* $\varphi(t)$ *n'est pas une fonction rationnelle de* t, *alors, pour tout* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \neq 0$, $\varphi(\alpha)$ *est transcendant (c'est-à-dire n'appartient pas à* $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ *).*

2° *Si* φ *peut être représenté par des fonctions méromorphes d'ordre fini, et* *s'il existe* $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$, *tel que* $\varphi(u) \in G_{\overline{\mathbb{Q}}}$, *alors* $\varphi(\mathbb{C})$ *est une sous-variété de* G *de dimension algébrique* 1 .

De la deuxième partie du théorème 5, on déduit deux résultats de SCHNEIDER ; le premier fait intervenir une variété paramétrée par (5), le second utilise le produit d'un groupe linéaire par une courbe elliptique.

COROLLAIRE 1 [8]. - *Soit* $\wp$ *une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants* g_2 , g_3 *algébriques. Soit* ζ *la fonction zêta associée à* $\wp$, *et soient* a *et* b *deux nombres algébriques,* $(a , b) \neq (0 , 0)$.

Si t *est un nombre complexe non pôle de* $\wp$, *l'un des deux nombres* $\wp(t)$, $at + b\zeta(t)$ *est transcendant.*

On obtient ainsi l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres 1 , ω , η (où $\omega \neq 0$ est une période de $\wp$, et η est défini par $\zeta(t + \omega) = \zeta(t) + \eta$ pour tout $t \in \mathbb{C}$).

COROLLAIRE 2 [8]. - *Soit* $\wp$ *une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants* g_2 , g_3 *algébriques. Soit* $\beta \neq 0$ *un nombre algébrique. Si* t *n'est pas pôle de* $\wp$, *l'un des deux nombres* $\wp(t)$, $\exp \beta t$ *est transcendant.*

En particulier, si $\omega \neq 0$ est période de $\wp$, alors ω/π est transcendant.

De nombreuses autres conséquences des corollaires 1 et 2 sont exposées dans [8].

5. Valeurs algébriques de fonctions méromorphes.

Tous les résultats précédents se déduisent de deux énoncés généraux sur les propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Le premier de ces énoncés concerne des fonctions satisfaisant des équations différentielles ; on en déduit le théorème de Hermite-Lindemann (en considérant les deux fonctions t et e^t), le théorème de Gel'fond-Schneider (avec e^t et e^{bt}), ainsi que les théorèmes 3 et 5 (ces déductions sont exposées en détail dans [3]).

Rappelons qu'*une fonction méromorphe* f *est d'ordre inférieur ou égal à* ρ s'il existe deux fonctions entières g et h telles que $f = g/h$, et

$$\max_{|t|=R}[\log|g(t)| , \log|h(t)|] \ll R^{\rho} .$$

CRITÈRE 1 [3]. - *Soient* K *un corps de nombres,* $f_1 , \dots , f_m$ *des fonctions méromorphes, d'ordre inférieur ou égal à* ρ . *Supposons que le corps* $L=K(f_1,\dots,f_m)$ *ait un degré de transcendance sur* K *supérieur ou égal à* 2 , *et que la dérivation* d/dt *opère sur* L . *Alors l'ensemble*

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid w \text{ n'est pas pôle de } f_i \text{ , et } f_i(w) \in K \text{ pour tout } i = 1 ,\dots, m\}$$

est fini.

Pour démontrer les théorèmes 1, 2 et 4, on a besoin d'un critère analogue, mais dans lequel on ne suppose plus que les fonctions satisfont des équations différentielles ; on en déduit de nouveau le théorème de Gel'fond-Schneider (mais en considérant maintenant les fonctions t et $\exp \ell t = a^t$), ainsi que le corollaire de la proposition 2 (avec $\exp x_1 t$ et $\exp x_2 t$).

Introduisons d'abord la notion de taille pour un nombre algébrique. Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, on note $d(\alpha)$ le plus petit entier rationnel positif tel que $d(\alpha).\alpha$ soit entier algébrique ; soit $|\overline{\alpha}| = \max_v |\alpha|_v$, où v décrit l'ensemble des valeurs absolues archimédiennes de $\mathbb{Q}(\alpha)$. La taille $s(\alpha)$ de α est définie par

$$s(\alpha) = \max(\log|\overline{\alpha}| \ , \ \log d(\alpha)) \ .$$

CRITÈRE 2 [7], [9]. - Soient K un corps de nombres, $f_1 , \dots , f_d$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1 , \dots , \rho_d$ respectivement. Soit (S_n) une suite de sous-ensembles de $\mathbb{C}$, tels que

$$\operatorname{Card} S_n \gg n^{\ell} \ , \ \text{avec} \ \ell > 0 \ ; \ \max_{t\in S_n} |t| \ll n \ ;$$

$$f_i(S_n) \subset K \ , \ \text{et} \ \max_{t\in S_n} s(f_i(t)) \ll n^{\rho_i} \ , \quad 1 \leq i \leq d \ .$$

Soient $h_1 , \dots , h_d$ des fonctions entières, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1 , \dots , \rho_d$ respectivement, telles que les fonctions $h_i \ f_i$ $(1 \leq i \leq d)$ soient entières, h_i n'ayant pas de zéros dans $\bigcup_{n\geq 0} S_n$. On suppose

$$\max_{t\in S_n} \log\left|\frac{1}{h_i(t)}\right| \ll n^{\rho_i} \ , \quad 1 \leq i \leq d \ .$$

Alors

$$\ell \leq \frac{\rho_1 + \dots + \rho_d}{d - 1} \ .$$

Les propositions 1, 2 et 3 sont donc des conséquences faciles de ces deux critères ; pour obtenir les théorèmes 1, 2 et 3 (et, par conséquent, le théorème 5), on considère les fonctions $\varphi_1/\varphi_0 , \dots , \varphi_d/\varphi_0$, définies par (1). Le théorème 3 se déduit du critère 1 en considérant les ensembles $\mathbb{Z}\alpha$ et $\mathbb{Z}u$ qui sont infinis (donc ne peuvent être contenus dans S). La démonstration des théorèmes 1 et 2 à partir du critère 2 est plus délicate ; on construit une suite (S_n) de sous-ensembles de $\mathbb{C}$, en choisissant pour chaque entier n un sous-ensemble de

$$\{k_1 \ t_1 + \dots + k_m \ t_m \mid k_j \in \mathbb{Z} \ , \ -n \leq k_j \leq n \ , \ 1 \leq j \leq m\}$$

(avec t_j remplacé par α_j , et m par 3 , pour le théorème 1). Mais on impose de plus aux points de S_n d'être suffisamment loin des zéros de la fonction φ_0 , pour pouvoir vérifier la condition

$$\max_{t\in S_n} \log\left|\frac{1}{\varphi_0(t)}\right| \ll n^{\rho_i} \ , \quad 1 \leq i \leq d \ .$$

Les relations (2) et (3) du § 3 permettent de construire une telle suite (S_n) , avec $\operatorname{Card} S_n \gg n^m$.

Cette construction est explicitée dans [9]. La dernière condition restant à vérifier concerne la taille des nombres $f_i(t)$, pour $t \in S_n$. On utilise pour cela la forme quadratique de Néron-Tate (voir [3]).

Enfin, pour effectuer la démonstration du théorème 4, on vérifie directement, sur les fonctions

$$t \longmapsto ut + v\zeta(t) \text{ , pour } (u , v) \in \mathbb{C}^2 \text{ ,}$$

les hypothèses du critère 2 (voir [9]).

6. Compléments.

Les variétés de groupe considérées jusqu'à maintenant étaient toujours définies sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. On peut généraliser certains de ces résultats à des variétés définies sur un sous-corps de $\mathbb{C}$, ayant un degré de transcendance supérieur ou égal à 1 . La principale difficulté pour cela consiste à établir un critère (analogue aux critères 1 et 2) valable dans ce cadre plus général. Voici deux exemples des résultats que l'on peut obtenir ainsi.

PROPOSITION 4 [9]. - *Soient* Ω *un sous-corps algébriquement clos de* $\mathbb{C}$, *de degré de transcendance* 1 *sur* $\mathbb{Q}$. *Soit* G *un groupe linéaire sur* Ω , *et soit* $\varphi : \mathbb{C} \to G_{\mathbb{C}}$ *un sous-groupe à un paramètre*, *de dimension algébrique* d . *Soient* $t_1 , \ldots , t_m$ *des nombres complexes*, *$\mathbb{Q}$-linéairement indépendants*, *tels que*

$$\varphi(t_j) \in G_{\Omega} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq m \text{ .}$$

Alors

1° *On a* $md < 2(m + d)$;

2° *Si* $t_j \in \Omega$ *pour* $1 \leq j \leq m$, *alors* $md < 2(m + d - 1)$;

3° *Si* $\varphi'(0)$ *est algébrique sur* Ω (*c'est-à-dire appartient à* $M_n(\Omega)$), *alors* $md < 2m + d$.

On peut obtenir un résultat analogue pour des variétés abéliennes, à condition de considérer un type de transcendance pour Ω ([3], [9]). Par exemple, on peut démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 6 [10]. - *Soit* A *une variété abélienne définie sur la clôture algébrique* Ω *de* $\mathbb{Q}(\pi)$ *dans* $\mathbb{C}$. *Soit* $\varphi : \mathbb{C} \to A_{\mathbb{C}}$ *un sous-groupe à un paramètre de* A , *de dimension algébrique* d . *Soient* $t_1 , \ldots , t_m$ *des nombres complexes*, *$\mathbb{Q}$-linéairement indépendants*, *tels que*

$$\varphi(t_j) \in A_{\Omega} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq m \text{ .}$$

Alors

1° $md \leq 2(m + 2d)$;

2° *Si* $t_j \in \Omega$ *pour* $1 \leq j \leq m$, *alors* $md \leq 2(m + 2d - 2)$;

3° *Supposons maintenant* $\varphi'(0)$ *algébrique sur* Ω . *Alors on a* $md \leq 2(m+2d-2)$, *et, de plus, si* $t_j \in \Omega$ *pour* $1 \leq j \leq m$, *alors* $md \leq 2(m + 2d - 3)$.

Enfin on connaît quelques résultats analogues concernant les sous-groupes à plusieurs paramètres, et obtenus à partir de critères valables pour des fonctions de plusieurs variables complexes. Lorsqu'on suppose que la dérivée à l'origine d'un sous-groupe à n paramètres est algébrique, on considère des points de $\mathbb{C}^n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, et les énoncés que l'on obtient ainsi ([3], [4], [6]) permettent de retrouver un résultat de SCHNEIDER sur la transcendance des périodes d'intégrales abéliennes de première ou de seconde espèce.

Lorsqu'on ne suppose plus la dérivée à l'origine algébrique, on considère un sous-groupe de type fini de $\mathbb{C}^n$, dont les points satisfont une condition de répartition ([1], [9], [10]) (cette condition technique intervient dans la démonstration de l'analogue du critère 2 pour plusieurs variables).

Terminons en mentionnant la possibilité de remplacer, dans ces énoncés, le corps $\mathbb{C}$ par un corps $\mathbb{C}_p$ complet, algébriquement clos, de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle p ([3] appendice, et [9]). On utilise dans ce cas des critères locaux, les fonctions considérées n'étant définies qu'au voisinage de l'origine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI (Enrico) and LANG (Serge). - Analytic subgroups of group varieties, Invent. Math., Berlin, t. 11 , 1970, p. 1-14.

[2] FEL'DMAN (N. I.). - Estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers, Math. USSR-Sbornik, t. 5, 1968, p. 291-307 ; [en Russe] Mat. Sbornik, N. S., t. 76, 1968, p. 304-319.

[3] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[4] LANG (Serge). - Transcendental numbers and diophantine approximations, Bull. Amer. math. Soc., t. 77, 1971, p. 635-677.

[5] LANG (Serge). - Introduction to algebraic and abelian functions. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1972 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[6] MORITA (Yasuo). - On transcendency of special values of arithmetic automorphic functions, J. Math. Soc. Japan, t. 24, 1972, p. 268-274 ; et Seminar on modern methods in number theory [1971, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo].

[7] RAMACHANDRA (K.). - Contributions to the theory of transcendental numbers, I and II, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 65-88.

[8] SCHNEIDER (Theodor). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften... , 81) ; et Introduction aux nombres transcendants. - Paris, Gauthier-Villars, 1959).

[9] WALDSCHMIDT (Michel). - Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, Acta Arithm., Warszawa, t. 23, 1973, p. 19-88.

[10] WALDSCHMIDT (Michel). - Dimension algébrique de sous-groupes analytiques de variétés abéliennes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 1681-1683.

(Texte reçu le 27 juin 1973)

Michel WALDSCHMIDT
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY