Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Gramain

Spectre de certaines fonctions presque périodiques (au sens de Bohr)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº 21, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 21, 5 p.
9 avril 1973

SPECTRE DE CERTAINES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES
(au sens de BOHR)

par François GRAMAIN

1. Introduction et résultats.

Un problème classique est la détermination d'ensembles fermés dénombrables Λ de nombres réels tels que toute fonction continue bornée de variable réelle à valeurs complexes, dont le spectre (support de la transformée de Fourier au sens des distributions) est contenu dans Λ, soit presque périodique. L. H. LOOMIS a montré, en 1950, que les compacts dénombrables ont cette propriété. Les autres exemples connus utilisent en général des propriétés arithmétiques. C'est en particulier le cas du suivant [1].

THÉORÈME. - *Soit* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite tendant vers* $+\infty$ *de nombres réels linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$. *Toute fonction continue bornée à spectre contenu dans* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathbb{Z}$ *est presque périodique*.

On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - *Soit* $n \geqslant 2$ *un entier naturel. Toute fonction continue bornée, à spectre contenu dans l'ensemble des racines* n-*ièmes des entiers naturels, est presque périodique*.

En effet, il suffit pour obtenir ce corollaire de montrer que l'unité et les racines n-ièmes des nombres "n-free" sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Cela résulte du lemme suivant [3].

LEMME. - *Soit* $n \geqslant 2$ *un entier naturel. Soit* $\{t_i\}$ *un ensemble de réels non nuls. On suppose que, pour tout* i, $t_i^n \in \mathbb{Q}$ *et que les* t_i^n *ont des images distinctes dans le groupe* $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times n}$, *où* $\mathbb{Q}^{\times n}$ *désigne le groupe multiplicatif des puissances* n *des rationnels non nuls. Alors les* t_i *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$.

Pour démontrer ce lemme, on peut, sans perte de généralité, supposer les t_i positifs. Soit $\sum \lambda_i t_i = 0$ une relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ liant un nombre fini de t_i. Supposons que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a $\lambda_{i_0} + \sum_{i\neq i_0} \lambda_i (t_i/t_{i_0}) = 0$ avec t_i/t_{i_0} irrationnel, puisque $(t_i/t_{i_0})^n \notin \mathbb{Q}^{\times n}$. Soient $k_i = \mathbb{Q}(t_i/t_{i_0})$ et K une extension finie de $\mathbb{Q}$ contenant tous les t_i/t_{i_0} intervenant dans la relation de dépendance considérée. Alors

$$\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(t_i/t_{i_0}) = \operatorname{Tr}_{k_i/\mathbb{Q}}[\operatorname{Tr}_{K/k_i}(t_i/t_{i_0})] = [K:k_i] \operatorname{Tr}_{k_i/\mathbb{Q}}(t_i/t_{i_0}) .$$

Si on a $\mathrm{Tr}_{k_i/\mathbb{Q}}(t_i/t_{i_0}) = 0$, on aura $\mathrm{Tr}\, K/\mathbb{Q}(\lambda_{i_0}) = 0$, ce qui est absurde. Il suffit donc de prouver que, si θ est un réel positif tel que $\theta^n \in \mathbb{Q}^\times$ et $\theta^n \notin \mathbb{Q}^{\times n}$, on a $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = 0$.

Soit m le plus petit entier positif tel que $\theta^m \in \mathbb{Q}$. On a $m \geqslant 2$, puisque $\theta \notin \mathbb{Q}$. Soit $b = \theta^m > 0$. Montrons que le polynôme $X^m - b$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, ce qui prouvera que $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = 0$.

D'après le critère de Capelli ([2], p. 221), le polynôme $X^m - b$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si, pour tout nombre premier p divisant m , le nombre b n'est pas dans $\mathbb{Q}^{\times p}$ et si, lorsque 4 divise m , le nombre b n'est pas dans $-4Q^{\times 4}$.

Soit p un nombre premier divisant m . Si on avait $b = c^p$ avec $c \in \mathbb{Q}^\times$, on aurait $\theta^{m/p} = |c|$, ce qui contredirait la minimalité de m . De plus, on ne peut avoir $b = -4c^4$ avec $c \in \mathbb{Q}^\times$ car b est positif. Le lemme est donc démontré.

2. Démonstration du théorème.

Dans ce qui suit, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et toutes les fonctions utilisées sont de variable réelle. Le théorème est une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION. - Soit φ une fonction continue à valeurs complexes telle que $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ et $\mathrm{Spec}\, f_n \subset \alpha_n \mathbb{Z}$. Alors, pour tout n , f_n est égale presque partout à une fonction continue (et, par suite, φ est presque périodique).

Pour démontrer cette proposition, on utilise les lemmes suivants :

LEMME 1. - Soit $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues, périodiques de période 1 , à valeurs réelles, telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\|_\infty < +\infty$. Alors

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big[\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(\beta_n t)\Big] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} s_n(t) .$$

C'est une conséquence directe du théorème de Kronecker.

LEMME 2. - Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles de $L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ et $\mathrm{Spec}\, f_n \subset \alpha_n \mathbb{Z}$. Si on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \geqslant 0$ presque partout, alors on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \inf\,\mathrm{ess}\, f_n \geqslant 0$.

Ce résultat est obtenu à partir du lemme 1 après régularisation des fonctions f_n par un noyau de sommation.

Pour prouver la proposition, on se ramène au cas où les f_n et φ sont réelles en séparant leurs parties réelles et imaginaires (ce qui ne change pas le spectre puisqu'il est symétrique par rapport à l'origine). On montre qu'alors, l'oscillation essentielle de chacune des fonctions f_n

$$\Omega(f_n , x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\underset{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}{\sup \text{ess}} f_n - \underset{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}{\inf \text{ess}} f_n\right]$$

est partout nulle (ce qui montre que f_n est presque partout égale à une fonction continue). Pour cela, on verra qu'il suffit qu'elle soit nulle en point, et nous allons montrer qu'elle l'est presque partout.

On peut supposer que f_n est une fonction borélienne bornée $(\frac{2\pi}{\alpha_n})$-périodique et que $\varphi = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$ presque partout. Soit

$$\omega_d'(f_n , x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\underset{[x,x+\varepsilon]}{\sup \text{ess}} f_n(t) - f_n(x)\right] \geqslant 0 \quad \text{presque partout,}$$

$$\omega_d''(f_n , x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[f(x) - \underset{[x,x+\varepsilon]}{\inf \text{ess}} f_n(t)\right] \geqslant 0 \quad \text{presque partout.}$$

On définit de manière analogue ω_g' et ω_g'' en changeant ε en $-\varepsilon$, et l'on a $\Omega(f_n , x) \leqslant \omega_d'(f_n , x) + \omega_d''(f_n , x) + \omega_g'(f_n , x) + \omega_g''(f_n , x)$ presque partout.

De $\varphi = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$, on déduit

$$\underset{[x-\varepsilon,x]}{\inf \text{ess}} f_i + \sum_{j\neq i} \underset{[x-\varepsilon,x]}{\sup \text{ess}} f_j \geqslant \underset{[x-\varepsilon,x]}{\inf \text{ess}} \varphi .$$

Comme φ est continue, son oscillation partielle $\omega_g''(\varphi , x)$ est nulle. On a donc

(1) $$- \omega_g''(f_i , x) + \sum_{j\neq i} \omega_g'(f_j , x) \geqslant 0 \quad \text{presque partout.}$$

Si on avait $\omega_g'(f_i , x) \geqslant a > 0$ presque partout, la fonction f_j ne serait pas bornée. On a donc $\inf \text{ess}\, \omega_g'(f_i , x) = 0$. De plus, comme les fonctions f_n sont $(\frac{2\pi}{\alpha_n})$-périodiques, il en est de même de $\omega_g''(f_n , x)$ et de $\omega_g'(f_n , x)$. Le lemme 2, appliqué à l'expression (1), fournit donc

$$\inf \text{ess}\left[- \omega_g''(f_i , x)\right] \geqslant 0$$

et, par suite,

$$\omega_g''(f_i , x) = 0 \quad \text{presque partout.}$$

On montre de la même manière que

$$\omega_d'(f_i , x) = \omega_d''(f_i , x) = \omega_g'(f_i , x) = 0 \quad \text{presque partout,}$$

donc que $\Omega(f_i , x) = 0$ presque partout.

Il reste à montrer que $\Omega(f_i , x) = 0$ pour tout x. Soit, par exemple $i = 0$. Pour $j \neq 0$, il existe x_j tel que $\Omega(f_j , x_j) = 0$. Si $\Omega(f_0 , x)$ n'est pas identiquement nulle, il existe x_0 tel que $\Omega(f_0 , x_0) = 4a > 0$. Alors, il existe un entier N tel que $\sum_{n\geqslant N+1} \|f_n\|_\infty < a$, donc $\sum_{n\geqslant N+1} \Omega(f_n , x) < 2a$ pour tout x.

Par hypothèse, les α_j/α_0 et 1 sont linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$. Le théorème de Kronecker montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des entiers $p_0 , \ldots , p_N$ tels que

$$\left|p_0 \frac{\alpha_j}{\alpha_0} - (x_j - x_0) \frac{\alpha_j}{2\pi} - p_j\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } j = 1 , \ldots , N .$$

Soit $\xi = x_0 + p_0\,(2\pi/\alpha_0) = x_j + p_j\,(2\pi/\alpha_j) + t_j$. On a $|t_j| \leqslant \varepsilon\,(2\pi/(|\alpha_j|))$. La périodicité de f_0 entraîne que $\Omega(f_0\,,\,\xi) = 4a$.

D'autre part, l'oscillation essentielle d'une fonction bornée est semi-continue supérieurement, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Omega(f_j\,,\,t_j + x_j) < \frac{a}{N} \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant N \text{ et } |t_j| \leqslant \varepsilon\,\frac{2\pi}{|\alpha_j|} .$$

Alors, la périodicité des f_j entraîne que $\Omega(f_j\,,\,\xi) < a/N$. Or

$$f_0 = \varphi - \sum_{j=1}^{N} f_j - \sum_{n\geqslant N+1} f_n ,$$

donc

$$\Omega(f_0\,,\,\xi) \leqslant N.\frac{a}{N} + 2a < 4a$$

ce qui contredit le fait que $\Omega(f_0\,,\,\xi) = 4a$. On a bien $\Omega(f_i\,,\,x) = 0$ pour tout i et pour tout x , et la proposition est démontrée.

La démonstration du théorème nécessite un dernier lemme :

LEMME 3. - Soit $\varphi = a + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$, où $\{f_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est une suite de fonctions complexes continues telles que $\sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ et $a \in \underset{\sim}{C}$. Si $\operatorname{Spec} f_n \subset \alpha_n \underset{\sim}{Z}^*$, alors

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant 1/5(|a| + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty) .$$

En effet, soient $a = \alpha + i\beta$ avec α et β réels, et $f_n(t) = s_n(\beta_n\,t)$ avec $\beta_n = \alpha_n/2\pi$. Soit $s_n(t) = \sigma_n(t) + i\tau_n(t)$, les fonctions σ_n et τ_n étant à valeurs réelles. Comme 0 n'est pas dans le spectre de f_n , on a

$$\int_0^1 \sigma_n = \int_0^1 \tau_n = 0 ,$$

donc

$$\text{(2)} \qquad \sup \sigma_n \geqslant 0 \geqslant \inf \sigma_n \quad \text{et} \quad \sup \tau_n \geqslant 0 \geqslant \inf \tau_n .$$

Soit $\mu = \sup_{t\in\underset{\sim}{R}} |\alpha + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \sigma_n(t)|$ et $\nu = \sup_{t\in\underset{\sim}{R}} |\beta + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \tau_n(t)|$. D'après le lemme 1, on a

$$\mu \geqslant \alpha + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \sup \sigma_n \quad \text{et} \quad \mu \geqslant -\alpha + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \sup(-\sigma_n)$$

soit $\mu \geqslant -\alpha - \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \inf \sigma_n$, d'où

$$\mu \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} (\sup \sigma_n - \inf \sigma_n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|\sigma_n\|_\infty$$

d'après l'inégalité 2. On a un résultat analogue pour ν , donc

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}(\mu + \nu) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} (\|\sigma_n\|_\infty + \|\tau_n\|_\infty) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|s_n\|_\infty = \frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty .$$

D'autre part, comme φ est presque périodique de moyenne a , on a $\|\varphi\|_\infty \geqslant |a|$, donc

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant \frac{1}{5}|a| + \frac{4}{5}\,\frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty = \frac{1}{5}(|a| + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty) .$$

Le théorème s'obtient alors facilement : Soit K_j le noyau de Fejer d'ordre j .

On a $\varphi * K_j = \varphi_j = a_j + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} P_{j,n}$ avec $a_j \in \underset{\sim}{C}$ et $P_{j,n}$ est un polynôme trigonométrique à spectre dans $\alpha_n \underset{\sim}{Z}^*$, la somme étant en fait finie puisque α_n tend vers l'infini. Comme l'intégrale de K_j est l'unité, on a $\|a_j + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} P_{j,n}\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty$, et le lemme 3 fournit

$$|a_j| + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|P_{j,n}\|_\infty \leqslant 5\|\varphi\|_\infty .$$

Par compacité, en prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer que a_j tend vers a , et que $P_{j,n}$ tend faiblement vers un élément f_n de $L^\infty(\underset{\sim}{R})$ dont le spectre est contenu dans $\alpha_n \underset{\sim}{Z}$. On a alors $|a| + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty \leqslant 5\|\varphi\|_\infty$. Comme les séries considérées convergent normalement, φ_j converge faiblement vers $a + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$. Or φ_j converge vers φ uniformément sur tout compact, donc $\varphi = a + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$ presque partout, et la proposition donne le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GRAMAIN (F.) et MEYER (Y.). - Ensembles de fréquences et fonctions presque périodiques, Colloquium Mathematicum (à paraître).

[2] LANG (S.). - Algebra, 2nd edition. - Reading, Addison-Wesley, 1967.

[3] POURCHET (Y.). - Communication orale.

(Texte reçu le 7 mai 1973)

François GRAMAIN
28 avenue du Panorama
92340 BOURG-LA-REINE