SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

GEORGES RHIN

Répartition modulo 1 de $f(p_n)$ quand f est une fonction entière

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº 20, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 20, 3 p.

2 avril 1973

RÉPARTITION modulo 1 DE $f(p_n)$ QUAND f EST UNE FONCTION ENTIÈRE

par Georges RHIN

1. Introduction et résultats.

En utilisant le critère de WEYL [7], il est immédiat de démontrer que la suite $(n\alpha)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 (E. R. (1)) si, et seulement si, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dans son livre [5], I. M. VINOGRADOV démontre que la suite $(p_n\, \alpha)_{n\geqslant 1}$, où p_n désigne le n-ième nombre premier, est E. R. (1) si et seulement si, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. De même, l'inégalité de VAN DER CORPUT permet de démontrer que la suite $(\alpha_1\, n+\dots+\alpha_k\, n^k)_{n\geqslant 1}$ est E. R. (1) si l'un des α_i est irrationnel. En 1948 [6], VINOGRADOV donne des conditions suffisantes sur l'un des coefficients α_i $(2 \leqslant i \leqslant k)$ pour que la suite $(\alpha_1\, p_n + \dots + \alpha_k\, p_n^k)_{n\geqslant 1}$ soit E. R. (1) . En fait, cette suite est E. R. (1) si, et seulement si, l'un des coefficients α_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ est irrationnel [4].

Récemment G. RAUZY ([2] et [3]) a démontré que si f était une fonction entière $f(X) = \sum_{k\geqslant 0} v_k\, X^k$ non réduite à un polynôme, prenant des valeurs réelles sur l'axe réel et telle que

$$(1) \qquad \lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{\log\log \sup_{|z|=r} |f(z)|}{\log\log r}\right\} < \frac{5}{4} ,$$

alors la suite $(\lambda f(n))_{n\geqslant 1}$ était E. R. (1) pour tout $\lambda \neq 0$.

Nous démontrons le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - Soit f une fonction entière qui satisfait aux conditions ci-dessus. Alors la suite $(\lambda f(p_n))_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 pour tout $\lambda \neq 0$.

Nous indiquerons en premier lieu quelques propriétés des fonctions f , puis nous donnerons les étapes de la démonstration du théorème 1.

2. Quelques propriétés de f [3].

Les inégalités de Cauchy entraînent qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \log(1/|v_n|)/n^{5+4\alpha} = +\infty .$$

Nous définissons la suite (n_k) de la façon suivante :

(i) n_0 est le plus petit entier tel que $v_n \neq 0$,

(ii) si n_k est défini, on pose $\ell_k = \log 1/|v_{n_k}|$, et m_k égal à la borne supérieure des nombres réels m tels que

$$\forall\, n \geqslant n_k ,\quad \log 1/|v_n| \geqslant \ell_k + m(n - n_k) .$$

n_{k+1} est alors le plus grand entier n tel que

$$\log 1/|v_n| = \ell_k + m_k(n - n_k) .$$

n_{k+1} existe d'après la condition (2).

En fait, les points (n_k , ℓ_k) sont les sommets du "polygone de Newton" de f, c'est-à-dire de l'enveloppe convexe inférieure des points $(n , \log(1/|v_n|))$.

On pose

$$p_k = \frac{n_k \ell_k}{n_k^2 - 2} , \quad P_k = e^{p_k} , \quad M_k = e^{m_k} \quad \text{et} \quad Q_k = 4^{-(n_k+1)} M_k .$$

Il existe k_1 tel que (d'après [3]),

$$\forall\ k \geqslant k_1 \qquad \frac{\ell_k}{n_k - 3} \leqslant \frac{\ell_{k+1}}{n_{k+1} - 3} \leqslant m_k .$$

Nous supposerons maintenant que $k \geqslant k_1$.

Nous avons, pour $x \in [0 , Q_k]$,

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n + 1)!}\right| \leqslant 2^{n+1} \frac{|v_n|}{M_k} , \text{ où } n = n_k .$$

Si

$$g(x) = \sum_{t=0}^{n} \frac{(x - H)^t}{t!} f^{(t)}(H) \quad \text{et} \quad 0 < P_k - H ,$$

nous avons, pour $P_k - H \leqslant x \leqslant H$,

$$|f(x) - g(x)| \leqslant 2^{n+1} \frac{|v_n|}{M_k} P_k^{n+1}$$

qui tend vers 0 en raison du choix de M_k et P_k . De plus, le coefficient α , le plus haut degré de $g(x)$, vérifie

$$\frac{|v_n|}{2} < |\alpha| < \frac{3}{2}|v_n| .$$

3. Les étapes de la démonstration du théorème 1.

Il est clair que si f vérifie les conditions du paragraphe 1, λf , pour $\lambda \neq 0$, les vérifie aussi. Le théorème sera donc démontré si la somme

$$S = \sum_{p\leqslant N} e(f(p)) \quad \text{où} \quad e(x) = e^{2\pi i x} \tag{3}$$

vérifie $\lim_{N\to\infty} \frac{S}{\pi(N)} \to 0$. Pour N assez grand, il existe k tel que $P_k < N \leqslant Q_k$. De plus, il existe s tel que $s \geqslant k$ et

$$(1 - \frac{1}{n_s^2})p_s < \log N \leqslant (1 - \frac{1}{n_{s+1}^2})p_{s+1} . \tag{4}$$

Nous poserons $r = \log N$.

Pour utiliser les méthodes de VINOGRADOV majorant les sommes doubles, nous examinerons la somme

$$\Sigma = \sum_{x\leqslant N,(x,F)=1} e(f(x)) \quad \text{où} \quad F = \prod_{p\leqslant N^{1/4}} p .$$

au lieu de la somme S , car nous avons $S = \Sigma + \Sigma_1 + O(N^{1/4})$, où les x de la somme Σ_1 sont produits de deux ou trois nombres premiers et

$$\Sigma = \sum_{d/F, dm \leqslant N} \mu(d)\, e(f(dm)) \ .$$

(a) Si $(1 - (1/n_s^2))p_s < r \leqslant (2 - (1/n_s))p_s$, nous découperons l'intervalle $[1,N]$ en intervalles plus petits, et nous approcherons dans chaque intervalle $f(x)$ par un polynôme $g(x)$ de degré n_s dont le coefficient de plus haut degré α vérifiera $\frac{1}{2}|v_n| < \alpha < \frac{3}{2}|v_n|$. On pourra alors utiliser le lemme 9, chapitre I de [5], et le théorème de la valeur moyenne de VINOGRADOV ([1], p. 181).

(b) Si $(2 - (1/n_s))p_s < r \leqslant p_{s+1}/(n_s + 1)$, nous approcherons dans tout l'intervalle de sommation $f(x)$ par $\sum_{t=0}^{n_s} v_t\, x^t$, et nous approcherons v_i par ses réduites $v_i = a_i/q_i + \theta_i/(q_i\, \tau_i)$. Nous serons alors ramenés à des démonstrations de même type que celles utilisées dans [4]. Malheureusement, les démonstrations ne peuvent pas s'utiliser directement car ici le degré du polynôme tend vers l'infini avec N .

(c) Si $p_{s+1}/n_{s+1} < r \leqslant (1 - (1/n_{s+1}^2))p_{s+1}$, on approche $f(x)$ par le polynôme $\sum_{t=0}^{n_{s+1}} v_t\, x^t$, et l'on opère comme ci-dessus.

Remarquons enfin que l'on ne peut pas remplacer la constante $5/4$ de (1) par $c > 2$ d'après [3], et que son remplacement par $4/3$ dépend directement de l'amélioration du théorème de la valeur moyenne de VINOGRADOV ([1], p. 181).

BIBLIOGRAPHIE

[1] HUA (L. K.). - Additive theory of prime numbers. - Providence, American mathematical Society, 1972 (Translations of mathematical Monographs, 30).

[2] RAUZY (G.). - Fonctions entières et répartition modulo 1 , Bull. Soc. math. France, t. 100, 1972, p. 409-415.

[3] RAUZY (G.). - Fonctions entières et répartition modulo 1 , II., Bull. Soc. math. France (à paraître).

[4] RHIN (G.). - Sur la répartition modulo 1 des suites f(p) , Acta Arithmetica, Warszawa, t. 23, 1973, p. 217-248.

[5] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated from Russian. - London, Interscience Publishers, 1954.

[6] VINOGRADOV (I. M.). - Sur l'évaluation de sommes trigonométriques avec des nombres premiers [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat., t. 12, 1948, p. 225-248.

[7] WEYL (H.). - Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Annalen, t. 77, 1916, p. 313-352.

(Texte reçu le 29 mai 1973)

Georges RHIN
44 rue de Touraine
57160 MOULINS LES METZ