

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BARSKY

Théorie de Baire p -adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1972-1973),
exp. n° 19, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A3_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DE BAIRE p -ADIQUE

par Daniel BARSKY

1. Rappels et notations.

On désire caractériser les limites simples de fonctions continues de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p .

\mathbb{Z}_p est le complété de \mathbb{Z} pour la norme p -adique définie par $|a - b| = 1/p^h$ avec $(m, p) = 1$.

\mathbb{Q}_p est le corps des fractions de \mathbb{Z}_p .

Une suite très bien répartie bien ordonnée (en abrégé T. B. R. B. O.) de \mathbb{Z}_p est une suite d'éléments de \mathbb{Z}_p $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|u_i - u_j| = |i - j|$ (par exemple, la suite des entiers naturels.) (voir [1] et [4]).

$$Q_n(x) = \frac{(x - u_0)(x - u_1) \dots (x - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1) \dots (u_n - u_{n-1})} \quad (\text{si } u_n = n, \quad Q_n(x) = \binom{x}{n}).$$

On sait que [1]

$$f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p) \iff f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (a_n \in \mathbb{Q}_p).$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$n = n_0 + n_1 p + \dots + n_{h(n)} p^{h(n)}.$$

$\varphi_n(x)$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n, h(n) + 1)$ de centre u_n et de rayon $1/(p^{h(n)+1})$; $\varphi_{x,h}(y)$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x, h)$ de centre x et de rayon $1/p^h$. On sait [3] que

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p) \iff f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \varphi_n(x)$$

avec $b_n \in \mathbb{Q}_p$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, et en outre on a

$$b_n = f(u_n) - f(u_{n - n_{h(n)} p^{h(n)}}).$$

On note $B^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ l'espace des limites simples de fonctions continues sur \mathbb{Z}_p , donc $f \in B^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p) \iff$ il existe une suite f_n de fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ telle que $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$. L'oscillation de f au point x par rapport au sous-ensemble $M \subset \mathbb{Z}_p$ est

$$\omega(f, x, M) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{(y,z) \in (\mathcal{B}(x,h) \cap M)^2} |f(y) - f(z)|.$$

DÉFINITION 1. - Soit $U = (u_0, u_1, \dots)$ une suite T. B. R. B. O. de \mathbb{Z}_p , et soit x un point de \mathbb{Z}_p . La meilleure suite convergeant vers x , extraite de la suite T. B. R. B. O. U , est définie par :

$$h \rightarrow u_{h_x} ; |u_{h_x} - x| \leq \frac{1}{p^h} ; 0 \leq h_x < p^h .$$

DÉFINITION 2. - Soit f une fonction de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p bornée, et soit

$$U = (u_0, u_1, \dots)$$

une suite T. B. R. B. O. de \mathbb{Z}_p . On dit que f est séquentiellement continue au point x (resp. sur \mathbb{Z}_p) si, et seulement si,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} f(u_{h_x}) = f(x) \quad (\text{resp. } \forall x \in \mathbb{Z}_p, \lim_{h \rightarrow +\infty} f(u_{h_x}) = f(x)),$$

où la suite $h \rightarrow u_{h_x}$ est la meilleure suite convergeant vers x .

2. Résultat.

THÉORÈME. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in B^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$;

(ii) Quel que soit l'ensemble parfait $M \subset \mathbb{Z}_p$, l'ensemble

$$P_i(M) = \{x \in M ; \omega(f, x, M) \geq \frac{1}{p^i}\}$$

est rare dans M pour tout entier $i < +\infty$;

(iii) Il existe une suite T. B. R. B. O. de \mathbb{Z}_p telle que f soit séquentiellement continue par rapport à cette suite.

Ce résultat transpose donc, au cas p -adique, le théorème de Baire [2].

On démontrera que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).

La démonstration de (i) \Rightarrow (ii) est identique à celle de [2].

LEMME 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$

$$f_h(x) = \sum_{n=0}^{h-1} (f(u_n) - f(u_{n-n_{h(n)}p^{h(n)}})) \varphi_n(x)$$

converge pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$ vers f est que f soit séquentiellement continue par rapport à la suite T. B. R. B. O. $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$

En effet, on a $f_h(x) = f(u_{h_x})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$. Le lemme 1 montre donc que (iii) \Rightarrow (i).

Pour montrer que (ii) \Rightarrow (iii), nous allons construire une suite T. B. R. B. O. $U = (u_0, u_1, \dots)$ associée à f telle que f soit séquentiellement continue par rapport à cette suite. Dans la suite, α désignera un ordinal dénombrable (pour la théorie, voir [2]) qui sera accessible si $\alpha - 1$ existe, et inaccessible sinon. Ω désigne le premier ordinal non dénombrable.

On rappelle le résultat suivant qui se démontre comme dans [2].

PROPOSITION. - Soient $P_0, P_1, P_2, \dots, P_\alpha, \dots$ des ensembles fermés indexés par les ordinaux dénombrables, tels que $\alpha' > \alpha \Rightarrow P_{\alpha'} \subseteq P_\alpha$, alors il existe un ordinal dénombrable β tel que $P_\beta = P_{\beta+1} = \dots = P_\Omega$. En outre,

(i) Si pour tout ordinal inaccessible α , $P_\alpha = \bigcap_{\alpha' < \alpha} P_{\alpha'}$ alors

$$P_0 = \sum_{\gamma < \beta} (P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega;$$

(ii) Si, en plus de (i), on a $P_\Omega = \emptyset$, et si P_0 est borné, alors le plus petit ordinal γ , tel que $P_\gamma = \emptyset$, est accessible;

(iii) Si les ensembles P_i sont tels qu'un point isolé de l'un d'eux n'appartient pas au suivant, alors P_Ω est nul ou parfait.

On notera, comme dans [2], P^1 le premier dérivé de P , P^2 le dérivé de P^1 , puis, pour tout ordinal dénombrable accessible, P^α le dérivé de $P^{\alpha-1}$, et pour tout ordinal inaccessible, $P^\alpha = \bigcap_{\alpha' < \alpha} P^{\alpha'}$.

Soit $i_1, i_2, \dots, i_\alpha, \dots$ une suite d'entier indexée sur les ordinaux dénombrable et telle que si α est accessible, i_α est fini, et si i_α est inaccessible, $i_\alpha = \sup_{\alpha' < \alpha} i_{\alpha'}$ (éventuellement $+\infty$). On associe à cette suite des ensembles fermés grâce à la fonction f vérifiant (ii).

$$P_{i_1} = \{x \in \mathbb{Z}_p; \omega(f, x, \mathbb{Z}_p) \geq \frac{1}{i_1}\}$$

d'après (ii), P_{i_1} est rare dans \mathbb{Z}_p . On décompose P_{i_1} , à la manière du (ii), de la proposition.

$$P_{i_1} = \sum (P_{i_1}^\nu - P_{i_1}^{\nu+1}) + P_{i_1}^\Omega,$$

et $P_{i_1}^\Omega$ est nul ou parfait. Puis, par récurrence transfinie, on définit

$$P_{i_1, \dots, i_\alpha} = \{x \in P_{i_1, \dots, i_{\alpha-1}}^\Omega; \omega(f, x, P_{i_1, \dots, i_{\alpha-1}}^\Omega) > \frac{1}{i_\alpha}\}$$
 si α est accessible,

et

$$P_{i_1, \dots, i_\alpha} = \bigcap_{\alpha' < \alpha} P_{i_1, \dots, i_{\alpha'}} \text{ si } \alpha \text{ est inaccessible.}$$

D'après la proposition, il existe nécessairement β accessible tel que

$$P_{i_1, \dots, i_\beta} = \emptyset,$$

et donc aussi, $\forall \beta' > \beta$, $P_{i_1, \dots, i_{\beta'}} = \emptyset$, car f possède la propriété (ii).

LEMME 2. - A toute boule $\mathcal{B}(x, h)$, on associe un ensemble $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^\nu(x, h)$ tel que :

(i) $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^\nu(x, h) \cap \mathcal{B}(x, h) \neq \emptyset$ et

$$P_{i_1, \dots, i_\alpha}^{\nu+1}(x, h) \cap \mathcal{B}(x, h) = \emptyset \text{ si } \nu \neq \Omega;$$

si $v = \Omega$, $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^\Omega(x, h) \cap \mathcal{B}(x, h) \neq \emptyset$, et

$$P_{i_1, \dots, i_\alpha, i_{\alpha+1}} \cap \mathcal{B}(x, h) = \emptyset , \quad \forall i_{\alpha+1}$$

(ii) $\forall \alpha' < \alpha$, si α' accessible,

$$P_{i_1, \dots, i_{\alpha'}}(x, h) \cap \mathcal{B}(x, h) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad P_{i_1, \dots, i_{\alpha'-1}}(x, h) \cap \mathcal{B}(x, h) = \emptyset$$

si α' inaccessible

$$P_{i_1, \dots, i_{\alpha'}}(x, h) = \bigcap_{\alpha'' < \alpha'} P_{i_1, \dots, i_{\alpha''}}(x, h) .$$

On constate aisément que les conditions (i) et (ii) définissent de manière unique une suite d'entiers $i_1, \dots, i_\alpha, \dots$ et d'ensembles P_{i_1, \dots, i_α} , et le processus de construction s'arrête nécessairement d'après la proposition.

LEMME 3. - A tout point x , on associe un ensemble $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^v(x)$ tel que

(i) $x \in P_{i_1, \dots, i_\alpha}^v(x)$, mais $x \notin P_{i_1, \dots, i_\alpha}^{v+1}(x)$ si $v \neq \Omega$;

si $\Omega = v$, alors $x \in P_{i_1, \dots, i_\alpha}^\Omega(x)$, mais $x \notin P_{i_1, \dots, i_\alpha, i_{\alpha+1}}^\Omega(x)$, $\forall i_{\alpha+1}$.

(ii) $\forall \alpha'$ accessible, $\alpha' < \alpha$, $x \in P_{i_1, \dots, i_{\alpha'}}(x)$, mais $x \notin P_{i_1, \dots, i_{\alpha'-1}}(x)$;
si α' est inaccessible,

$$P_{i_1, \dots, i_{\alpha'}}(x) = \bigcap_{\alpha'' < \alpha'} P_{i_1, \dots, i_{\alpha''}}(x) .$$

On constate, comme au lemme 2, que les conditions (i) et (ii) définissent univoquement l'ensemble $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^v(x)$.

On construit une suite T. B. R. B. O. de la manière suivante :

On choisit u_0 dans $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^v(0, 0)$ (ensemble associé à $\mathcal{B}(0, 0)$) de manière arbitraire. Supposons la suite construite jusqu'à $u_{\frac{h}{p-1}}$, et construisons-la jusqu'à l'indice $p^{h+1}-1$.

$Z_p^h = \bigcup_{n=0}^{p^h-1} \mathcal{B}(u_n, h+1)$ est réunion de $p^{h+1} - p^h$ boules disjointes de rayons $1/p^{h+1}$. Soient $\alpha_{p^h}, \dots, \alpha_{p^{h+1}-p^h}$ les centres de ces boules ; on supposera que

$|\alpha_n - u_{n-n_h(n)p^{h(n)}}| = \frac{1}{p}$. On choisira u_n pour $p^h \leq n < p^{h+1}$ arbitrairement

dans $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^v(\alpha_n, h+1) \cap \mathcal{B}(\alpha_n, h+1)$. La suite ainsi construite est

T. B. R. B. O., appelons-la U . Il reste à montrer que f est séquentiellement continue par rapport à la suite U , ceci résultera du lemme suivant.

LEMME 4. - Soient $P_{i_1, \dots, i_\alpha}^v(x)$ l'ensemble associé à x par le lemme 3, et

$P_{j_1, \dots, j_\gamma}^v(x, h)$ l'ensemble associé à $\mathcal{B}(x, h)$ par le lemme 2, alors l'une des

deux affirmations suivantes est vraie

(i) il existe h_0 tel que, pour tout $h \geq h_0$ on a $\alpha = \gamma$, $\nu = \nu'$ et

$$i_1 = j_1, \dots, j_\alpha = i_\alpha.$$

(ii) $\lim_{h \rightarrow \infty} f(y) = f(x)$, $y \in P_{j_1, \dots, j_\gamma}^{\nu'}(x, h)$.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce lemme qui est longue, mais ne présente pas de difficultés particulières compte tenu des définitions de

$$P_{i_1, \dots, i_\alpha}^\nu(x) \text{ et } P_{j_1, \dots, j_\gamma}^{\nu'}(x, h).$$

Le théorème est démontré.

COROLLAIRE. - Soit $U = (u_0, u_1, \dots)$ la suite construite ci-dessus, alors f est limite d'une suite de polynômes, de degré p^{2h} , f_h tels que l'on ait

$$f_h(u_n) = f(u_n) \text{ si } 0 \leq n < p^h$$

$$f_h(u_n) = f_h(u_{n+rp^h}) \text{ si } 0 \leq n < p^h, 1 \leq r < p^h.$$

Ceci se démontre aisément en remarquant que φ_n est une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $1/(p^{h(n)+1})$ (voir [3]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math., Paris 1963).
- [2] BAIRE (René). - Leçon sur les fonctions discontinues. - Paris, Gauthier-Villard, 1930.
- [3] BARSKY (Daniel). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes dont les dérivées sont à valeurs entières, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris-7, 1972.
- [4] HELSMOORTEL (Eve). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. A. S., t. 271, 1970, p. 546-548.

(Texte reçu le 8 mai 1973)

Daniel BARSKY
10 avenue Stéphane Mallarmé
75017 PARIS