Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Gramain

Fonctions presque périodiques (au sens de Bohr) et fonction zêta de Riemann

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº G17, p. G1-G6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A22_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G17, 6 p.

2 avril 1973

FONCTIONS PRESQUE PERIODIQUES (au sens de BOHR) ET FONCTION ZETA DE RIEMANN

par François GRAMAIN

Introduction.

Nous allons donner quelques notions de base sur les fonctions presque périodiques, et montrer par un exemple simple quels peuvent être leurs liens avec l'arithmétique.

Ces fonctions ont été introduites par les astronomes, et en particulier par E. ESCLANGON (1902) pour généraliser les fonctions périodiques. Un peu plus tard (1922), H. BOHR, s'intéressant aux fonctions L et aux séries de Dirichlet, était amené à les étudier en liaison avec des problèmes de nature arithmétique. La notion de presque-périodicité a été généralisée dans diverses directions, et l'arithmétique y joue toujours un rôle important.

1. Propriétés de périodicité des polynômes trigonométriques.

Le théorème de Kronecker permet de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - *Soit* $\alpha_1 , \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *le système*

$$\|\alpha_i t\| < \varepsilon , \qquad 1 \leqslant i \leqslant k ,$$

(*où* $\|x\|$ *désigne la distance de* x *au plus proche entier*) *admet des solutions en* t *qui forment un ensemble relativement dense*.

DÉFINITION. - *L'ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *est dit relativement dense, s'il existe* $L > 0$ *tel que tout intervalle de longueur* L *contienne au moins un point de* E .

On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - *Soit* $P(t) = \sum_{j=1}^{k} a_j \exp 2\pi i \alpha_j t$ *un polynôme trigonométrique. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'ensemble* $\{\tau \in \mathbb{R} \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |P(t + \tau) - P(t)| \leqslant \varepsilon\}$ *des* ε*-presque-périodes de* P *est relativement dense*.

Cette propriété de périodicité ne caractérise évidemment pas les polynômes trigonométriques :

DÉFINITION. - *Soit* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *une fonction (continue sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs complexes)*; f *est dite presque périodique si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'ensemble de ses* ε*-presque-périodes est relativement dense*.

On voit qu'une fonction presque périodique est bornée et uniformément continue. De plus, toute limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques est une fonction presque périodique. En fait, toutes les fonctions presque périodiques sont de ce type :

THÉORÈME. - Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est presque périodique.

(ii) f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques.

(iii) L'ensemble des translatées de f , c'est-à-dire des fonctions $f_\tau(t)=f(t+\tau)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Ce théorème montre que les fonctions presque périodiques forment une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme.

2. Analyse et synthèse des fonctions presque périodiques.

Une fonction continue périodique étant clairement presque périodique, il s'agit de généraliser la notion de série de Fourier aux fonctions presque périodiques. Pour cela, comme dans le cas périodique, on utilise des moyennes liées à la fonction étudiée :

LEMME. - Soit f une fonction presque périodique. Alors $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$ existe. Cette limite est notée $\mathfrak{M}(f)$.

En effet, cette moyenne existe si f est un polynôme trigonométrique.

Si f et g sont deux fonctions presque périodiques, il en est de même du produit $f.\overline{g}$. On pose $\langle f , g\rangle = \mathfrak{M}(f.\overline{g})$. Cette forme sesquilinéaire donne à l'algèbre des fonctions presque périodiques une structure d'espace préhilbertien (cet espace n'est pas fermé pour la norme $N(f) = \mathfrak{M}(|f|^2)$).

On voit que les exponentielles complexes $\{\exp 2\pi i\lambda t\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ forment un système orthonormal, et on montre qu'il est maximal.

Si f est presque périodique, on a donc un développement "en série de Fourier" unique :

$$f(t) \sim \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \langle f , \exp 2\pi i\lambda t\rangle \exp 2\pi i\lambda t = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) \exp 2\pi i\lambda t$$

et l'identité de Parseval

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\lambda)|^2 = \langle f , f\rangle = \mathfrak{M}(|f|^2) .$$

En particulier, le spectre de f

$$\mathrm{Spec}\, f = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(\lambda) \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

Remarques.

1° Si Spec f est fini, f est un polynôme trigonométrique.

2° Cette définition du spectre de f coïncide avec celle du spectre d'une fonction borélienne bornée comme support de sa transformée de Fourier au sens des distributions. En particulier, si $\operatorname{Spec} f \subset \alpha\mathbb{Z}$, alors f est périodique de période $1/\alpha$.

La synthèse d'une fonction presque périodique consiste à "construire" cette fonction à partir de sa série de Fourier. On a le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit f une fonction presque périodique. Alors f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques à fréquences dans Spec f.

On peut même montrer que si $\operatorname{Spec} f = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors f est limite uniforme de polynômes trigonométriques de la forme

$$P_m(t) = \sum_{k=1}^{n(m)} \rho(k\ ,\ m)\ \hat{f}(\lambda_k) \exp 2\pi i\lambda_k t$$

avec $0 < \rho(k\ ,\ m) \leq 1$, ces coefficients ρ ne dépendant pas des $\hat{f}(\lambda)$ mais seulement du spectre de f, et $\rho(k\ ,\ m) \to 1$ quand $m \to +\infty$, et $n(m) \to +\infty$ quand $m \to +\infty$.

3. Exemples de problèmes sur les fonctions presque périodiques.

1° Étant donnée une fonction, est-elle presque périodique ?

(a) Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty$ et $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Alors $S(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \exp 2\pi i\lambda_n t$ est une fonction presque périodique égale à la somme de sa série de Fourier.

(b) Si la série $S(t) = \sum a_n \exp 2\pi i\lambda_n t$ converge simplement pour tout $t \in \mathbb{R}$ et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = +\infty$. Le problème de savoir si $S(t)$ est la série de Fourier d'une fonction presque périodique est difficile. Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty$, mais on ne connaît pas de condition suffisante simple.

2° Recherche d'ensembles dénombrables $\Lambda \subset \mathbb{R}$, tels que toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et bornée à spectre contenu dans Λ soit presque périodique. On connaît quelques exemples de tels ensembles :

(a) Λ compact dénombrable (démonstration due à LOOMIS),

(b) $\Lambda = \alpha\mathbb{Z}$: φ est alors périodique de période $1/\alpha$,

(c) Λ ensemble cohérent de fréquences (cf. Y. MEYER [4]),

(d) $\Lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathbb{Z}$, $\alpha_n \to +\infty$, et α_n linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (cf. F. GRAMAIN [2]).

Ces derniers exemples montrent l'importance des propriétés arithmétiques du spectre des fonctions presque périodiques.

4. Fonctions presque périodiques analytiques et fonction zêta.

DÉFINITION. - $f(z)$ est dite presque périodique analytique sur la bande

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$$

si

(i) $f(z)$ est holomorphe sur cette bande,

(ii) Pour tout a, b tels que $\alpha < a \leqslant b < \beta$, la fonction $f(x + iy)$ est presque périodique en y, uniformément en $x \in [a , b]$.

DÉFINITION. - La fonction $\varphi : [a , b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite presque périodique en y uniformément par rapport à $x \in [a , b]$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $L(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $L(\varepsilon)$ contienne au moins une ε-presque-période de de la fonction $\varphi(x , y)$ considérée comme fonction de y, et cela pour tout $x \in [a , b]$.

En général, dans le cas des fonctions analytiques, cette condition d'uniformité est vérifiée : Une application du principe du maximum fournit le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soit $\alpha \leqslant a \leqslant b < \beta$, et soit $f(z) = f(x + iy)$ une fonction analytique sur la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$, bornée sur la droite $\operatorname{Re} z = a$, presque périodique en y sur la droite $\operatorname{Re} z = b$. Alors, $f(z)$ est presque périodique analytique sur la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re} z < b\}$.

Appliquons ces résultats à la fonction ζ. On a

$$\zeta(s) = \zeta(\sigma + i\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \exp(- i\tau \log n) .$$

On voit donc que ζ est presque périodique analytique pour $\sigma > 1$.

On prolonge la fonction ζ, pour $\sigma < 1$, par

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \zeta_1(s) \quad \text{avec} \quad \zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} .$$

La fonction ζ_1 est, elle aussi, clairement presque périodique analytique pour $\sigma > 1$.

Mais ζ et ζ_1 ne sont pas presque périodiques analytiques pour $\sigma < 1$.

Si $\zeta(s)$ était presque périodique analytique pour $\sigma < 1$, par unicité de la série de Fourier, on aurait

$$\zeta(s) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \exp(- i\tau \log n) .$$

Alors ζ serait limite uniforme de polynômes trigonométriques de la forme

$$\sum_{k=1}^{n(m)} \rho(k\ ,\ m)\ \frac{1}{k^{\sigma}}\ \exp(-\ i\tau\ \log\ k)\ .$$

D'après le lemme de Fatou, on aurait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\sigma}} \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{n(m)} \frac{\rho(k\ ,\ m)}{k^{\sigma}} = \zeta(\sigma)\ ,$$

ce qui est absurde puisque $\sigma < 1$.

D'autre part, on a

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^{s}}\ ,$$

où $\mu(n)$ est la fonction de Moebius. Ici encore, pour $\sigma > 1$, la fonction $1/\zeta$ est presque périodique analytique. La théorie des fonctions presque périodiques n'a pas permis à BOHR d'étudier précisément l'hypothèse de Riemann, mais fournit des résultats assez faibles.

PROPOSITION. - <u>Supposons que</u> $1/\zeta$ <u>soit analytique sur la bande</u>

$$B = \{s \in \underset{\sim}{C}\ |\ \alpha < \mathrm{Re}\ s < 1\}\ ,$$

<u>alors</u> $1/\zeta$ <u>n'est pas bornée sur la droite</u> $\mathrm{Re}\ s = \alpha$.

En effet, si $1/\zeta$ était bornée sur la droite $\mathrm{Re}\ s = \alpha$, d'après le théorème précédent, elle serait presque périodique analytique sur la bande B . Nous allons montrer que ce n'est pas le cas.

Si $n = \pi\ P_j^{k_j}$, on a $\log n = \sum k_j \log P_j$.

D'après le théorème de Kronecker, les logarithmes des nombres premiers étant linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$, l'application qui, à $P(t) = \sum a_n \exp(-\ it\ \log\ n)$, associe $Q(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m) = \sum a_{k_1,\dots,k_m} \exp(-\ i(k_1\ x_1 + \dots + k_m\ x_m))$ avec $a_n = a_{k_1,\dots,k_m}$ si $n = P_1^{k_1}\ ,\ \dots\ ,\ P_m^{k_m}$, est une isométrie de l'espace des polynômes trigonométriques à fréquences dans $\frac{-1}{2\pi}\log(N^*)$ muni de la norme de la convergence uniforme dans l'espace des sommes finies du type de Q muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit $R(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m) = a_{1,0,\dots,0} \exp(-\ ix_1) + \dots + a_{0,\dots,0,1} \exp(-\ ix_m)$. On a

$$R(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x_1 + t\ ,\ \dots\ ,\ x_m + t)\ \exp\ it\ dt$$

donc

$$\sum_{p\ \text{premier}} |a_p| = \sum_{k_1+\dots+k_m=1,k_j\geqslant 0} |a_{k_1,\dots,k_m}| = \|R\|_\infty \leqslant \|Q\|_\infty\ .$$

En complétant les espaces considérés, ce résultat se prolonge aux fonctions presque périodiques. Si $1/\zeta$ était presque périodique, on aurait donc $\sum \frac{|\mu(P)|}{P^{\sigma}} < +\infty$ soit $\sum \frac{1}{P^{\sigma}} < +\infty$, ce qui est faux pour $\sigma < 1$. Ce qui démontre la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CORDUNEANU (C.). - Almost periodic functions. - New York. Interscience Publishers, 1968 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 22).

[2] GRAMAIN (François). - Spectre de certaines fonctions presque périodiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 21, 5p.

[3] KATZNELSON (Y.). - An introduction to harmonic analysis. - New York, J. Wiley and Sons, 1968.

[4] MEYER (Yves). - Trois problèmes sur les sommes trigonométriques. - Paris, Société mathématique de France, 1973 (Astérisque, 1).

(Texte reçu le 7 mai 1973)

François GRAMAIN
28 avenue du Panorama
92340 BOURG-LA-REINE