

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTINE PATHIAUX

## Les nombres de Pisot et leurs généralisations

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 14, n° 2 (1972-1973),  
exp. n° G10, p. G1-G2

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1972-1973\\_\\_14\\_2\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A17_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LES NOMBRES DE PISOT ET LEURS GÉNÉRALISATIONS

par Martine PATHIAUX

C. PISOT a étudié l'ensemble  $S$  des nombres algébriques  $> 1$ , entiers sur  $\mathbb{Q}$  dont les conjugués ont une valeur absolue  $< 1$ . Ces nombres ont été généralisés dans différentes directions.

### 1. Généralisations.

Voir les textes ci-après :

- [1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, 104 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).
- [2] CANTOR (David G.). - On sets of algebraic integers whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.
- [3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites  $p$ -adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.
- [4] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Généralisation des nombres de Salem aux adèles, Acta Arithm. Warszawa, t. 16, 1970, p. 265-314 (Thèse Sc. math. Paris, 1968).
- [5] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3<sup>e</sup> série, t. 82, 1965, p. 1-35 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [6] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Eléments algébriques remarquables dans un corps de séries formelles, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, p. 177-184.
- [7] GRANDET-HUGOT (Marthe). - P.-V. éléments dans un corps de nombres algébriques, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 203-214.
- [8] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., série 3, t. 81, 1964, p. 165-188.
- [9] SALEM (Raphael). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.
- [10] SENGE (H. G.). - Closed sets of algebraic numbers, Duke math. J., t. 34, 1967, p. 307-323.

### 2. Propriétés.

L'ensemble  $S$  est fermé. SALEM [14] l'a démontré en associant à tout nombre de  $S$  une fraction rationnelle bornée par 1 en module sur la circonférence unité.

Il est remarquable que, dans les généralisations, le problème des points limites des ensembles, analogues à  $S$ , n'est résolu entièrement que dans l'article de Marthe GRANDET [7], où elle montre que dans ce cas l'ensemble considéré n'est pas fermé, à l'aide d'une caractérisation des coefficients du polynôme minimal associé à ces nombres, et dans [8] et [10], où les ensembles sont fermés, car on a restreint l'ensemble des nombres, qui est une généralisation exacte des nombres de  $S$ , au

sous-ensemble des nombres auxquels on peut associer une fraction rationnelle bornée sur la circonférence unité.

Par exemple, on ne sait pas si l'ensemble  $S_q^*$  des nombres, dont l'inverse est le seul zéro de module  $\leq 1$ , d'un polynôme  $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$  vérifiant  $Q(0) = q$ , est fermé ou non.

Or trois résultats permettent de mieux "situer" les polynômes associés aux nombres de Pisot-Salem.

THÉORÈME [12]. - Tout nombre de Pisot-Salem est zéro d'un polynôme de  $\mathbb{Z}[x]$  dont les coefficients sont majorés par  $[\theta]$ .

THÉORÈME [11]. - L'inverse d'un nombre de Pisot est zéro d'un polynôme de  $\mathbb{Z}[x]$  dont le coefficient du terme en  $x$  est supérieur strictement à la somme des autres.

THÉORÈME [15]. - Si  $\alpha$  est entier algébrique sur  $\mathbb{Q}$ , si  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sont les conjugués de module  $> 1$ , et si  $\prod_{i=1, \dots, k} |\alpha_i| < \theta_0$ , où  $\theta_0$  est le plus petit nombre de  $S$ , alors le polynôme est réciproque.

Les deux premiers théorèmes peuvent se généraliser [13] aux nombres définis dans [2] et [8].

Mais il semble que la description des polynômes associés aux nombres de  $S$  ne soit pas encore suffisante, et qu'il devrait être possible de mieux les caractériser de façon à lever l'indétermination sur les points limites.

#### Références.

- [11] CONNES (Alain). - Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.
- [12] HUGOT (Marthe GRANDET-) et PISOT (Charles). - Sur certains entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2831-2833.
- [13] PATHIAUX (Martine). - Sur les multiples de polynômes irréductibles associés à certains nombres algébriques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 13, 9 p.
- [14] SALEM (Raphael). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, Heath and Company, 1963 (Heath mathematical Monographs).
- [15] SMYTH (C. J.). - On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, Bull. London math. Soc., t. 3, 1971, p. 169-175.

(Texte reçu le 21 septembre 1973)

Martine PATHIAUX  
Avenue de Paris  
78470 SAINT REMY LES CHEVREUSE