Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

PAUL GÉRARDIN

Groupes d'Heisenberg et groupes diamants sur un corps fini

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº G9, p. G1-G14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A16_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G9, 14 p.
8 janvier 1973

GROUPES D'HEISENBERG ET GROUPES DIAMANTS SUR UN CORPS FINI

par Paul GÉRARDIN

A. WEIL a mis en évidence le rôle que jouait en arithmétique une extension, dite groupe métaplectique, d'un groupe nilpotent à deux pas, le groupe d'Heisenberg [3]. Pour le corps des réels, ces groupes sont bien connus, et étudiés dans [1] ; le groupe d'Heisenberg réel provient de l'étude des relations de commutation d'Hermann WEYL :

$$(p(u)\ ,\ q(v)) = \tau(uv)\ , \quad u\ ,\ v \in \underset{\sim}{R}\ ,$$

où $p(u)$ et $q(v)$ sont deux sous-groupes à un paramètre d'opérateurs sur un espace de Hilbert, et τ un caractère non trivial de $\underset{\sim}{R}$: $\tau(x) = \exp 2\pi iax$, $a \in \underset{\sim}{R}^*$. Si $H(\underset{\sim}{R})$ est le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & u & z \\ & 1 & v \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad u\ ,\ v\ ,\ z \in \underset{\sim}{R}\ ,$$

on définit une représentation unitaire irréductible de $H(\underset{\sim}{R})$ dans l'espace $L^2(\underset{\sim}{R})$, en associant à cette matrice l'opérateur $f \longmapsto \tau(z + xv)\ f(x + u)$, et, en posant pour $p(u)$ l'opérateur dû à $v = z = 0$, pour $q(v)$ l'opérateur dû à $u = z = 0$, on a bien la relation de commutation précédente. Pour un corps fini, voir les propositions 2, 4 et 5 ci-dessous.

En faisant opérer $\underset{\sim}{R}^*$ par homothéties :

$$\begin{pmatrix} 1 & tu & z \\ & 1 & t^{-1}\,v \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

on définit une extension dite déployée, étudiée ici au n° 3 ; par contre si on fait opérer le groupe $\underset{\sim}{T}$ des nombres complexes de norme 1 par rotations sur $(u\ ,\ v)$, on obtient le groupe diamant, dont les représentations sont étudiées dans [1], chapitre IX, au moyen des polarisations complexes, ce qu'on ne peut faire dans le cas des corps finis. C'est l'objet du n° 4 qui décrit les représentations des groupes diamants sur un corps fini au moyen des techniques de Weil (elles fonctionnent également pour un corps non fini, localement compact).

Ce travail sert de base pour la construction de représentations supercuspidales du groupe linéaire général sur un corps $\mathfrak{p}$-adique associées à des caractères suffisamment réguliers d'un sous-groupe isomorphe au groupe multiplicatif de l'extension non ramifiée de degré l'ordre des matrices [2].

1. Transformation de Fourier sur un corps fini.

1.1. On désigne par k un corps fini, d'ordre $q = p^n$. On appelle caractère de k un homomorphisme du groupe additif de k dans le groupe multiplicatif $\underset{\sim}{T}$ des nombres complexes de module 1.

LEMME 1. - Caractères des corps finis : Soit k un corps fini de caractéristique p ; on note Tr la forme linéaire de k sur son sous-corps premier $\underset{\sim}{F}_p \simeq \underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$. Alors,

(i) on définit un caractère non trivial de k en posant

$$\tau_1(x) = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}\ x/p)\ , \quad x \in k\ ; \tag{1}$$

(ii) soit τ un caractère non trivial de k ; l'application qui, à $y \in k$, associe le caractère $x \longmapsto \tau(xy)$ est un isomorphisme du groupe additif de k sur le groupe de ses caractères, noté $X_1(k)$.

Preuve. - Elle est immédiate.

Remarque. - En caractéristique 2, tous les éléments sont des carrés, et $x \longmapsto \tau(x^2)$ est un caractère si τ en est un ; si τ n'est pas trivial, il y a donc un unique $c \neq 0$ tel que $\tau(x) = \tau(cx^2)$.

1.2. Soit $E(k)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes sur k ; il est de dimension q. Si $f \in E(k)$, on définit sa moyenne normalisée par la formule :

$$\int_k f(x)\,dx = q^{-1/2} \sum_k f(x)\ . \tag{2}$$

La forme hermitienne $\int_k f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ munit $E(k)$ d'une structure d'espace de Hilbert.

LEMME 2. - Transformation de Fourier sur un corps fini : Soit τ un caractère non trivial de k. On appelle transformation de Fourier sur k, relative au caractère τ, l'opération qui à $f \in E(k)$ associe $\hat{f} \in E(k)$ définie par

$$\hat{f}(y) = \int_k f(x)\,\overline{\tau(xy)}\,dy\ . \tag{3}$$

C'est un opérateur unitaire sur $E(k)$, dont l'inverse est donné par

$$f(x) = \int_k \hat{f}(y)\,\tau(xy)\,dy\ , \quad f \in E(k)\ . \tag{4}$$

Si f et $g \in E(k)$, on a les identités

$$\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}\ , \quad \widehat{f.g} = \hat{f} * \hat{g}\ , \text{ où } f * g(x) = \int_k f(x-y)\,g(y)\,dy\ . \tag{5}$$

Preuve. - Elle résulte du lemme 1, sans difficulté.

2. Caractères quadratiques sur un corps fini.

2.1. Une fonction $q : k \to \underset{\sim}{T}$ sera appelée caractère quadratique de k si, pour tout $y \in k$, l'application $x \longmapsto q(x+y)\,q(x)^{-1}\,q(y)^{-1}$ est un caractère de

k. L'ensemble des carctères quadratiques forme un groupe $X_2(k)$, dont $X_1(k)$ est un sous-groupe.

Si $q \in X_2(k)$ et si τ est un caractère non trivial de k, on a donc

(6) $$q(x+y)\,q(x)^{-1}\,q(y)^{-1} = \tau(uxy)\ ,$$

pour un élément $u \in k$, dit <u>associé à</u> q <u>relativement au caractère</u> τ. On dit que q est un caractère quadratique <u>non dégénéré</u> si son élément associé est inversible (condition qui ne dépend pas du choix de $\tau \neq 1$). Le noyau de l'homomorphisme $X_2(k) \to k$, qui envoie q sur son élément associé u, est le groupe $X_1(k)$ des caractères de k. Cette application est en fait surjective.

2.2. LEMME 3. - <u>Caractères quadratiques en caractéristique différente de</u> 2 : <u>Soit</u> τ <u>un caractère non trivial de</u> k. <u>Si la caractéristique de</u> k <u>est différente de</u> 2, <u>les caractères quadratiques de</u> k <u>correspondent aux couples</u> (a, b) <u>d'éléments de</u> k <u>par la formule</u>

(7) $$q_{a,b}(x) = \tau(ax^2 + bx)\ ,$$ <u>qui a pour élément associé</u> $2a$.

<u>Preuve</u>. - C'est clair.

2.3. <u>Caractères quadratiques en caractéristique</u> 2. - Dans ce cas, tout élément du corps est un carré ; comme l'élément associé au caractère quadratique $q(vx)$ est le produit de v^2 par l'élément associé à q, on décrira tous les caractères quadratiques de k en donnant ceux qui ont un associé donné. Prenons donc $\tau = \tau_1$ de (1), et cherchons un caractère quadratique dont l'élément associé soit 1 (les autres s'en déduisent par le produit par un caractère). On doit avoir :

(8) $$q(x+y) = q(x)\,q(y)\,\tau_1(xy)\ ,\quad x, y \in k\ .$$

On en déduit $q(0) = 1$, $q(x^2) = \tau_1(x^2) = \tau_1(x)$ par définition de τ_1, et donc

(9) $$q(x) = f_*(x)\,g(x) \quad \text{où} \quad f_*(x) = i^{(\tau_1(x)-1)/2}\ , \text{ et } \ g(x) \in \{\pm 1\}\ ,$$

avec la condition suivante pour g, tirée de (8) :

(10) $$g(x+y)\,g(x)\,g(y) = \tau_1(xy)\,f_*(x)\,f_*(y)\,f_*(x+y)^{-1}\ .$$

Or, si s est le caractère signe sur le groupe multiplicatif de $\mathbb{R}$, on a $(u, v) = i^{(s(u)-1)/2}\, i^{(s(v)-1)/2}\, i^{-(s(uv)-1)/2} = 1$ si u ou $v > 0$, -1 si u et $v < 0$, ce qui permet de transformer le second membre de (10) :

$$f_*(x)\,f_*(y)\,f_*(x+y)^{-1} = (\tau_1(x)\ ,\ \tau_1(y)) = (-1)^{\mathrm{Tr}x\mathrm{Tr}y}\ ,$$

car $\tau_1(x) = (-1)^{\mathrm{Tr}x}$, et

(11) $$g(x+y)\,g(x)\,g(y) = (-1)^{\mathrm{Tr}xy+\mathrm{Tr}x\mathrm{Tr}y}\ .$$

Si k est de dimension n sur $\mathbb{F}_2$, on a

(12) $$\mathrm{Tr}\,xy + \mathrm{Tr}\,x\,\mathrm{Tr}\,y = \sum_{0\leq i\neq j<n} x^{2^i}\,y^{2^j} = \sum_{0\leq i<j<n}(x^{2^i}\,y^{2^j} + x^{2^j}\,y^{2^i})\ .$$

Or, on a le résultat suivant :

Soit p premier ; les coefficients du binôme $\binom{m}{n}$, $m \geqslant n \geqslant 1$, qui sont premiers à p, correspondent aux couples (m, n) dont les développements en base p,

$$m = \sum m_i\, p^i \quad \text{et} \quad n = \sum n_i\, p^i$$

vérifient $n_i \leqslant m_i$ pour tout i.

On écrit en effet

$$(1 + x)^m = \prod_i (1 + x^{p^i})^{m_i}\ , \text{ etc.}$$

Ici, avec $p = 2$, (12) s'écrit $\sum_{0 \leqslant i<j<n} f_{ij}(x)$ avec $f_{ij}(x) = x^{2^i+2^j}$; soit a un élément de k dont la trace soit égale à 1, et posons

$$(13) \qquad g_*(x) = \prod_{0 \leqslant i<j<n} \tau_1(af_{ij}(x))\ , \quad f_{ij}(x) = x^{2^i+2^j}\ .$$

Cette fonction vérifie l'identité (11). Si l'on pose alors

$$(14) \qquad q_*(x) = f_*(x)\ g_*(x)\ , \quad f_*(x) = i^{(\tau_1(x)-1)/2}\ ,$$

on définit un caractère quadratique d'élément associé 1 relativement à τ_1. En conséquence, on a le lemme suivant.

2.4. LEMME 4. - Caractères quadratiques en caractéristique 2 : Soit k un corps fini de caractéristique 2. Fixons un caractère non trivial τ de k. Soit $c \in k$ défini par $\tau(x) = \tau(c^2\, x^2)$. Posons

$$(15) \qquad q_1(x) = q_*(cx)\ , \text{ où } q_* \text{ est donné par (14)}\ .$$

Alors q_1 est un caractère quadratique de k dont l'élément associé relativement à τ est 1. Les caractères quadratiques de k sont les applications

$$(16) \qquad q_{a,b}(x) = q_1(ax)\ \tau(bx)\ , \quad a\ , b \in k\ ,$$

d'élément associé a^2.

Preuve. - Il suffit de remarquer que $\tau(x) = \tau(c^2\, x^2)$ équivaut à $\tau(x) = \tau_1(c^2\, x)$ et d'appliquer ce qui précède.

2.5. Soient q un caractère quadratique non dégénéré de k, et $u \in k^*$ son élément associé relativement à τ (6). La transformée de Fourier (3) de q est donc

$$\hat{q}(y) = \int_k q(x)\ \overline{\tau(xy)}\ dx = \int_k q(x - u^{-1}\, y)\ q(- u^{-1}\, y)^{-1}\ dx$$
$$= q(- u^{-1}\, y)^{-1} \int_k q(x)\ dx\ ,$$

c'est donc $\hat{q}(0)\ q(- u^{-1}\, y)^{-1}$. Plus précisément, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Transformée de Fourier d'un caractère quadratique : Soient k un corps fini, et τ un caractère non trivial de k. Soit q un caractère quadratique non dégénéré de k d'élément associé $u \in k^*$ relativement à τ. Alors, il y a un nombre $\gamma(q) \in \underset{\sim}{T}$ tel que :

(17) $\hat{q}(x) = \gamma(q)\, q(-\, u^{-1}\, x)^{-1}$, $\gamma(q)$ <u>est indépendant de</u> τ .

<u>Si</u> $q = q_{a,b}$ <u>dans les notations de</u> (7) <u>pour</u> $p \neq 2$, <u>de</u> (16) <u>pour</u> $p = 2$, $a \neq 0$ <u>on pose</u> :

$$\gamma_\tau(a\,,\, b) = \gamma(q_{a,b}) \ \underline{\text{et}}\ \ q_a = q_{a,0}\ ,\quad \gamma_\tau(a) = \gamma(q_a)\ .$$

<u>Alors</u> :

(18) $\gamma_\tau(a\,,\, b) = \gamma_\tau(a)\; q_a(u_a^{-1}\, b)^{-1}$ <u>où</u> $u_a = 2a$ <u>si</u> $p \neq 2$, $u_a = a^2$ <u>si</u> $p = 2$

(19) $\gamma_\tau(a) = (\frac{a}{q})\ \gamma_\tau(1)$ <u>où</u> $(-)$ <u>est le symbole de Legendre</u> ;

(20^1) $\gamma_\tau(1)^2 = (\frac{-1}{q})$ <u>si</u> $p \neq 2$;

(20^2) $\gamma_\tau(1)^2 = q_1(1)$, $\gamma_\tau(1)^4 = \tau(1)$, $\gamma_\tau(1)^8 = 1$ <u>si</u> $p = 2$.

<u>Preuve</u>. - On a déjà vu (17), $\gamma(q)$ est de module 1 , puisque la transformation de Fourier est unitaire ; (18) est immédiat.

Pour (19), si $p = 2$, on a

$$\hat{q}_a(0) = \int_k q_1(ax)\ dx = \int_k q_1(x)\ dx\ ;$$

si $p \neq 2$, on a

$$\gamma_\tau(a) = \int_k \tau(ax^2)\ dx$$

si a est un carré, la multiplication par a permute les carrés, et $\gamma_\tau(a) = \gamma_\tau(1)$; sinon,

$$\gamma_\tau(a) + \gamma_\tau(1) = \int_k \tau(ax^2)\ dx + \int_k \tau(x^2)\ dx\ ,$$

et comme les carrés dans k forment deux classes, représentées par 1 et a , cette somme est $2\int_k \tau(x)\ dx = 0$, et

$$\gamma_\tau(a) = -\ \gamma_\tau(1) = (\tfrac{a}{q})\ \gamma_\tau(1)\ .$$

Pour (20^1) et (20^2) , on applique (19) à $\overline{q}_1$: si $p \neq 2$, $\overline{q}_1 = q_{-1}$, d'où

$$\gamma_\tau(-\ 1) = \hat{\overline{q}}_1(0) = \overline{\hat{q}}_1(0) = \overline{\gamma_\tau(1)} = (\tfrac{-1}{q})\ \gamma_\tau(1)\ .$$

Si $p = 2$, $\overline{q}_1 = q_{1,1}$, et donc

$$\overline{\gamma_\tau(1)} = \gamma_\tau(1\ ,\ 1) = \gamma_\tau(1)\ q_1(1) \quad \text{par (18)},$$

donc $\gamma_\tau(1)^2 = q_1(1)$, puis $\gamma_\tau(1)^4 = \tau(1)$ et $\gamma_\tau(1)^8 = 1$.

3. Le groupe d'Heisenberg et son extension déployée.

3.1. Soit $L = k \times k$ l'algèbre déployée de rang 2 sur k , corps fini. La base canonique de L est notée $a = (1\ ,\ 0)$, $b = (0\ ,\ 1)$. On définit une forme bilinéaire sur L en posant

(21) $\langle w\ ,\ w' \rangle = uv'$ si $w = ua + vb$ et $w' = u'a + v'b \in L$.

Elle définit une extension centrale non triviale de L par k, dite groupe d'Heisenberg de k relativement à L :

(22) $$0 \to k \to H(L/k) \to L \to 0 ,$$

et la loi de groupe est donnée par

(23) $$(z , w)(z' , w') = (z + z' + \langle w , w' \rangle , w + w') , \quad z,z' \in k , \quad w,w' \in L .$$

On écrira l'élément $(z , w) \in H(L/k)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & u & z \\ & 1 & v \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{si} \quad w = ua + vb ,$$

pour que l'opération soit celle du produit des matrices.

3.2. PROPOSITION 2. - <u>Représentations des groupes d'Heisenberg</u> $H(L/k)$: <u>Soit</u> τ <u>un caractère non trivial de</u> k . <u>Les opérateurs</u>

(24) $$\eta_\tau \begin{pmatrix} 1 & u & z \\ & 1 & v \\ & & 1 \end{pmatrix} f(x) = \tau(z + xv)\, f(x + u) , \quad f \in E(k) ,$$

<u>l'espace des fonctions complexes sur</u> k , <u>définissent une représentation unitaire irréductible de</u> $H(L/k)$. <u>Toute représentation irréductible de</u> $H(L/k)$ <u>non triviale sur le centre est équivalente à une représentation</u> η_τ ; <u>les autres représentations irréductibles proviennent des caractères de</u> L <u>par la projection</u> (22).

<u>Preuve</u>. - On commence par vérifier la composition des $\eta_\tau(z , w)$. Ensuite, si un opérateur sur $E(k)$ commute aux $\eta_\tau(z , w)$, en prenant $w \in kb$, il commute aux multiplications par les fonctions $\tau(xv)$, $v \in k$, qui parcourent tous les caractères de k , donc aux multiplications par toute fonction sur k : cet opérateur est lui-même la multiplication par une fonction sur k . Si maintenant on exprime qu'il commute aux opérateurs $\eta_\tau(0 , ua)$, $u \in k$, i. e. aux translations, cette fonction, devant être invariante par translations, est constante. Ceci montre que les représentations η_τ sont irréductibles de degré q ; comme la trace de l'opérateur $\eta_\tau(z , 0)$ est $q\tau(z)$, elles sont inéquivalentes ; elles sont donc au nombre de $q - 1$.

Si maintenant une représentation irréductible de $H(L/k)$ est triviale sur le centre, c'est une représentation du groupe quotient, L , irréductible : c'est donc un caractère de L ; ces caractères sont au nombre de q^2 , et donnent des représentations inéquivalentes de $H(L/k)$.

Comme la somme des carrés des degrés des représentations irréductibles obtenues est $(q - 1)\, q^2 + q^2 = q^3$, l'ordre de $H(L/k)$, on a obtenu toutes les représentations irréductibles de $H(L/k)$.

3.3. Soit $r \in \underset{\sim}{Z}$ un entier relatif. Soit $A(k)$ l' "hyperbole" formée des $w = ua + vb$ tels que $uv = 1$; $A(k)$ s'identifie à k^* par $t \in k \longmapsto (t,t^{-1}) \in A(k)$.

On définit l'<u>extension déployée</u> $D(L/k , r)$ comme le produit semi-direct de $H(L/k)$ par le groupe $A(k)$ opérant ainsi :

(25) $$n(z , w) n^{-1} = (z , n^r w) , \quad (z , w) \in H(L/k) , \quad n \in A(k) .$$

Le résultat suivant est une conséquence rapide de la proposition précédente.

PROPOSITION 3. - <u>Représentation de l'extension déployée</u> $D(L/k , r)$: <u>Soit</u> τ <u>un caractère non trivial de</u> k . <u>Pour chaque caractère</u> α <u>de</u> k^* , <u>on définit l'opérateur suivant sur</u> $E(k)$:

(26) $$\delta_\alpha(n) = \alpha(t) R(t) \quad \text{où} \quad R(t) f(x) = f(t^{-r} x) \quad \text{si} \quad n = ta + t^{-1} b \in A(k) .$$

<u>Alors on définit une représentation irréductible</u> δ_α <u>du groupe</u> $D(L/k , r)$ <u>dans l'espace</u> $E(k)$ <u>par les opérateurs</u> (24) <u>et</u> (26). <u>Ces représentations sont deux à deux non équivalentes. Les autres classes de représentations irréductibles de</u> $D(L/k ,r)$ <u>sont les suivantes</u> :

(i) <u>les caractères de</u> $A(k)$ <u>prolongés à</u> $D(L/k , r)$ <u>par la projection de noyau</u> $H(L/k)$;

(ii) <u>pour chaque caractère non trivial</u> λ <u>de</u> L , <u>on définit une représentation irréductible</u> δ_λ <u>de</u> $D(L/k , r)$ <u>dans l'espace</u> $E(k^{*r})$ <u>des fonctions complexes sur</u> k^{*r} <u>par la formule</u> :

$$\delta_\lambda(n_1(z , w)) f(t^r) = \lambda(n^{-r} w) f(t_1^r t^r)$$

si $(z , w) \in H(L/k)$, $n = (t , t^{-1})$, $n_1 = (t_1 , t_1^{-1})$.

4. Groupes diamants associés à une extension quadratique.

4.1. Soit K l'extension quadratique du corps fini k , munie de l'involution $z \longmapsto \bar{z}$ due à l'élément non trivial du groupe de Galois : $\bar{z} = z^q$ si k est d'ordre q . La forme linéaire trace Tr est surjective de K sur k , son noyau est un espace vectoriel de dimension 1 sur k , dont on fixe une base b ; si la caractéristique est 2 , on prend $b = 1$; soit $a \in K$ un élément de trace 1 ; si la caractéristique est $\neq 2$, on prend $a = 1/2$. On a donc la décomposition :

(27) $$K = ka + kb , \quad a + \bar{a} = 1 \quad (a = 1/2 \text{ si } p \neq 2) ,$$
$$b + \bar{b} = 0 , \quad b \neq 0 \quad (b = 1 \text{ si } p = 2) .$$

4.2. On définit une forme bilinéaire sur K en posant :

(28) $$\langle w , w' \rangle = (a\bar{w}w' - \bar{a}w\bar{w}') b^{-1} , \quad w , w' \in K .$$

Elle est non dégénérée et antisymétrique ; elle ne peut s'écrire sous la forme $\langle w , w' \rangle = f(w + w') - f(w) - f(w')$. Elle fournit donc une extension centrale non triviale $H(K/k)$ de K par k :

(29) $$0 \to k \to H(K/k) \to K \to 0 ,$$

dont la loi de groupe est donnée par

(30) $(z\ ,\ w)(z'\ ,\ w') = (z + z' + \langle w\ ,\ w'\rangle\ ,\ w + w')\ ,\qquad z,z' \in k\ ,\quad w,w' \in K\ .$

LEMME 5. - Structure du groupe d'Heisenberg relatif à une extension quadratique : Ajoutons aux notations précédentes, les suivantes :

(31) $c(z) = (z,0)$ si $z \in k$; $p(u) = (0,ua)$, $q(v) = (0,vb)$ si $u,v \in k$.

Alors, c est un prolongement de k sur le centre de $H(K/k)$. On a :

(32) $(p(u)\ ,\ q(v)) = c(uv)$; $c(a^2 + \bar{a}^2))\, uv\,)\ q(v)\ p(u) = (0,w)$ si $w = ua + vb$.

Si la caractéristique est différente de 2 , p et q sont des monomorphismes de k dans $H(K/k)$. Si la caractéristique est 2 , on a

$$(33)\qquad \begin{aligned} p(u + u') &= c(a\bar{a}uu')\ p(u)\ p(u') \quad \text{si } u \text{ et } u' \in k\ ;\\ q(v + v') &= c(vv')\ q(v)\ q(v') \quad \text{si } v \text{ et } v' \in k\ . \end{aligned}$$

Preuve. - C'est une simple vérification à partir de (28).

4.3. Lorsque k est de caractéristique différente de 2 , ce groupe d'Heisenberg est isomorphe à celui du n° 2. Transcrivons la proposition 2 dans $H(K/k)$.

PROPOSITION 4. - Représentations des groupes $H(K/k)$, caractéristique différente de 2 : Soit k un corps fini de caractéristique différente de 2 . A chaque caractère non trivial τ de k correspond une représentation unitaire irréductible de $H(K/k)$ donnée par la formule suivante, sur l'espace $E(k)$:

(34) $$\Pi_\tau(c(z)\ q(v)\ p(u))\ f(x) = \tau(z + xv)\ f(x + u)\ ,\quad f \in E(k)\ .$$

Avec les représentations de degré 1 , qui proviennent des caractères de K par (29), on a ainsi, à équivalence près, toutes les représentations irréductibles.

4.4. En caractéristique 2 , on modifie l'action précédente de $p(u)$ et $q(v)$ par un cocycle, de façon à satisfaire à (33).

PROPOSITION 5. - Représentations des groupes $H(K/k)$, caractéristique 2 : Soit k un corps fini de caractéristique 2 . A chaque caractère non trivial τ de k , on associe deux caractères quadratiques φ_τ et φ'_τ de k dont l'élément associé relativement à τ est respectivement 1 et $a\bar{a}$. Alors, les opérateurs suivants sur $E(k)$:

(35) $$\Pi_\tau(c(z)\ q(v)\ p(u))\ f(x) = \tau(z + xy)\ \varphi'_\tau(u)\ \varphi_\tau(v)\ f(x + u)\ ,\quad f \in E(k)\ ,$$

définissent une représentation unitaire irréductible du groupe $H(K/k)$. Avec les représentations de degré 1 , qui proviennent des caractères de K par (29) on a ainsi toutes les représentations irréductibles de $H(K/k)$, à équivalence près.

Preuve. - C'est la même que pour la proposition 2.

4.5. Désignons par $T(k)$ le "cercle" de K formé des éléments de norme 1 ; la multiplication par $t \in T(k)$ laisse invariante la forme bilinéaire (28). Soit r un entier relatif. On définit le groupe diamant $D(K/k\ ,\ r)$ comme le produit semi-direct du groupe d'Heisenberg $H(K/k)$ par le groupe $T(k)$ opérant ainsi :

$$(36)\qquad n(z\ ,\ w)\ n^{-1} = (z\ ,\ n^r w)\ ,\quad n \in T(k)\ ,\quad (z\ ,\ w) \in H(K/k)\ .$$

Comme on a la relation (32) $c((a^2 + \bar{a}^2)\ uv)\ q(v)\ p(u) = (0\ ,\ ua + vb)$, cette action se lit sur les composantes u et v en :

$$(37)\qquad n^{-1}\ c((a^2 + \bar{a}^2)\ uv)\ q(v)\ p(u)\ n = c((a^2 + \bar{a}^2)\ u'v')\ q(v')\ p(u')\ ,$$

avec

$$(37')\qquad (u'v') = (uv)\begin{pmatrix} \bar{a}n^r + a\bar{n}^r & a\bar{a}(\bar{n}^r - n^r)\ b^{-1} \\ (\bar{n}^r - n^r)\ b & an^r + \bar{a}\bar{n}^r \end{pmatrix}\ ,$$

4.6. L'action de $T(k)$ sur $H(K/k)$ laissant fixes les éléments du centre, elle conserve la classe de la représentation unitaire irréductible η_τ : chaque $n \in T(k)$ fournit donc un opérateur unitaire sur $E(k)$, qui n'est défini qu'à un scalaire de $\underset{\sim}{T}$ près, et qui envoie l'opérateur $\eta_\tau(z\ ,\ w)$ sur l'opérateur $\eta_\tau(z\ ,\ n^r w)$, ceci pour tout $(z\ ,\ w) \in H(K/k)$. On va montrer que le système de facteurs associé à cette représentation projective de $T(k)$ dans $E(k)$ est trivial, en le calculant explicitement par la méthode de WEIL ([3], I, formule (16) et théorème 3).

LEMME 6. - <u>Relèvement de l'action des éléments de norme</u> 1 , <u>caractéristique différente de</u> 2 : <u>Si</u> k <u>n'est pas de caractéristique</u> 2 , <u>on pose</u>

$$(38)\qquad \omega(n) = (\bar{n}^r - n^r)\ b\ ,\ \text{pour}\ n \in T(k)\ .$$

<u>Soit</u> τ <u>un caractère non trivial de</u> k . <u>On définit les opérateurs suivants, unitaires, sur l'espace</u> $E(k)$, <u>pour chaque</u> $n \in T(k)$:

$$(39)\qquad \underline{\text{si}}\ \ \omega(n) \neq 0\ ,\ \underline{\text{alors}}\ \ n^r \in k\ \ \underline{\text{et}}\ \ R_\tau(n)\ f(x) = f(n^r x)\ ,\quad f \in E(k)\ ,$$

$$(40)\qquad \underline{\text{si}}\ \ \omega(n) \neq 0\ ,\quad R_\tau(n)\ f(n) = \int_k \tau'(u'v' - uv)\ f(u')\ dv\ ,$$

<u>où la moyenne est normalisée par la condition</u> (2), τ' <u>est le caractère</u>

$$\tau'(x) = \tau(x/2)\ ,$$

<u>et</u> $(u'\ v')$ <u>se déduit de</u> $(u\ v)$ <u>par la matrice</u> (37') <u>où</u> $a = 1/2$.

<u>Alors, si</u> τ <u>est la représentation de</u> $H(K/k)$ <u>de la proposition</u> 4 :

$$(41)\qquad R_\tau(n)\ \eta_\tau(z\ ,\ w)\ R(n^{-1}) = \eta_\tau(z\ ,\ n^r w)\ ,\quad n \in T(k)\ ,\quad (z\ ,\ w) \in H(K/k)$$

$$(42)\qquad R_\tau(n_1)\ R_\tau(n_2) = R_\tau(n_1\ n_2)\ \ \underline{\text{si}}\ \ \omega(n_1)\ \omega(n_2) = 0$$

$$(43)\qquad R_\tau(n_1)\ R_\tau(n_2) = \gamma(\varphi)\ R_\tau(n_1\ n_2)\ \ \underline{\text{si}}\ \ \omega(n_1)\ \omega(n_2)\ \omega(n_1\ n_2) \neq 0\ ,$$

<u>où</u> $\gamma(\varphi)$ <u>est le facteur de la proposition</u> 1 <u>pour le caractère quadratique non dégénéré</u>

$$\varphi(u) = \tau'(\omega(n_1\ n_2)/\omega(n_1)\ \omega(n_2).u^2)$$

(44) $$R_\tau(n)^{-1} = R_\tau(n^{-1}) \quad \text{pour tout} \quad n \in T(k) \,.$$

Preuve. – On vérifie (41), (42), (44). Pour (43), on écrit l'opérateur $R_\tau(n)$ avec un noyau, en sommant sur la variable u' au lieu de u :

(45) $$R_\tau(n)\, f(y) = \int_k \tau'(\omega^{-1}(\alpha x^2 - 2xy + xy^2))\, f(x)\, dx$$

où $\omega = \omega(n)$, $\alpha = (n^r + \overline{n}^r)/2$, et le composé de $R_\tau(n_1)$ et $R_\tau(n_2)$ est donné par le noyau composé

$$\int_k \tau'(\omega_1^{-1}(\alpha_1\, z^2 - 2zy + \alpha_1\, y^2) + \omega_2^{-1}(\alpha_2\, y^2 - 2yx + \alpha_2\, x^2))\, dy \,,$$

avec les notations évidentes, qui se calcule par la formule (18) ; en utilisant le fait que l'application qui à $n \in T(k)$ associe la matrice (37') est un homomorphisme, donc que

$$\omega = \alpha_1\, \omega_2 + \omega_1\, \alpha_2 \,, \quad \omega_1 = \alpha_2\, \omega - \alpha\omega_2 \,, \quad \omega_2 = \alpha_1\, \omega - \alpha\omega_2 \,,$$

on en déduit immédiatement (43).

4.6. En appliquant ici la formule (19), on peut prolonger au groupe diamant $D(K/k\,,\, r)$ la représentation η_τ de la proposition 4.

PROPOSITION 6. – *Représentation du groupe diamant en caractéristique différente de* 2 : *Soit* k *un corps fini de caractéristique différente de* 2 . *Soit* $D(K/k\,,r)$ *le groupe diamant défini ci-dessus. Les classes de représentations irréductibles de* $D(K/k\,,\, r)$ *qui ne sont pas triviales sur le centre du sous-groupe* $H(K/k)$ *correspondent bijectivement aux couples* $(\tau\,,\,\theta)$ *formés d'un caractère non trivial de* k *et d'un caractère* θ *de* $T(k)$; *on en a une réalisation unitaire dans l'espace* $E(k)$ *par les formules suivantes, où* $\omega(n) = (\overline{n}^r - n^r)\, b$ *si* $n \in T(k)$, *et où* χ *désigne le caractère d'ordre* 2 *de* $T(k)$ (*i. e.* $\chi(t)$ *vaut* 1 *si* $t \in T(k)^2$ *et* -1 *sinon*) :

(46)
$$\delta_{\tau,\theta}(n) = \varepsilon(n)\, \theta(n)\, R_\tau(n) \,, \ \text{où} \ \varepsilon(n) = 1 \ \text{si} \ n^r = 1 \,,$$
$$\varepsilon(n) = -1 \ \text{si} \ n^r = -1 \,, \ \text{et si} \ \omega(n) \neq 0 \,,$$
$$\varepsilon(n) = \overline{\gamma(1/2)}\, \chi(n^r)(\omega(n)/q) \,, \quad \text{avec} \quad \gamma(1/2) = \int_k \tau(x^2/2)\, dx \,.$$

(46') $\delta_{\tau\theta}|H(K/k)$ *est la représentation* η_τ *de la proposition* 4, *formule* (34).

Pour $n^r \neq 1$, *on a* $\mathrm{Tr}\ \delta_{\tau,\theta}(n) = -\theta(n)$; *pour* $n^r = 1$, *on a* $\mathrm{Tr}\ \delta_{\tau,\theta}(n) = q\theta(n)$.

Les autres représentations irréductibles de $D(K/k\,,\, r)$ *sont les suivantes* :

(i) *les caractères de* $T(k)$ *prolongés à* $D(K/k\,,\, r)$ *par la projection de noyau* $H(K/k)$;

(ii) *pour chaque caractère non trivial de* K , *on définit une représentation irréductible de* $D(K/k\,,\, r)$ *dans l'espace* $E(T(k)^r)$ *des fonctions complexes sur* $T(k)^r$ *par la formule*

$$\delta_\varkappa(n_1(z,w))\, f(n^r) = \varkappa(n^{-r}\, w)\, f(n_1^r\, n^r) \,, \quad n_1 \in T(k) \,, \quad (z,w) \in H(K/k) \,, \quad f \in E(T(k)^r) \,.$$

<u>Preuve</u>. - Les formules (42) à (44) montrent que $\delta_{\tau,\theta}$ est bien une représentation de $T(k)$, et (41) donne la compatibilité avec l'action de $H(K/k)$. Cette représentation du groupe $D(K/k\ ,\ r)$ est irréductible, puisque sa restriction au sous-groupe $H(K/k)$ l'est déjà. La formule sur la trace s'obtient, lorsque $\omega(n) \neq 0$, par (45), $\operatorname{Tr} R_{\tau}(n) = \tau'(2(\alpha - 1)/\omega)\ x^2)\ dx$, qui se calcule par (19), et en complétant par $\varepsilon(n)$, on obtient la trace de $\delta_{\tau,\theta}(n)$:

$$\chi(n^r)((n^r - 2 + \overline{n}^r)/q)\,\theta(n)\ ,$$

valable aussi si $n^r = -1$; il reste à vérifier que c'est égal à $-\chi(n^r) - \theta(n)$, ce qui provient du fait que les éléments de norme 1 dans K sont des carrés. Le reste de la proposition est une simple vérification.

4.7. En caractéristique 2 , il faut faire intervenir un groupe du type de celui qu'utilise WEIL. Soit τ un caractère non trivial de k . Le groupe $H_{\tau}(K/k)$ est défini comme extension centrale de K par le groupe $\underset{\sim}{T}$, par le cocycle

(47) $\qquad (w\ ,\ w') \dashrightarrow \tau(\langle w\ ,\ w'\rangle)$, où $\langle w\ ,\ w'\rangle$ est donné par (28).

On pose alors, avec les notations de la proposition (5) pour φ_{τ} et φ'_{τ} :

(48) $\qquad p(u) = \varphi'_{\tau}(u)\ p_{\tau}(u)\ ,\quad u \in k\ ,\qquad q(v) = \varphi_{\tau}(v)\ q_{\tau}(v)\ ,\quad v \in k$;

on définit ainsi deux monomorphismes p_{τ} et q_{τ} de k dans $H_{\tau}(K/k)$, satisfaisant à la relation de commutation :

(49) $\qquad (p_{\tau}(u)\ ,\ q_{\tau}(v)) = \tau(uv)\ ,\quad u\ ,\ v \in k$.

Et comme $a^2 + \overline{a}^2 = (a + \overline{a})^2 = 1$, la relation (37) s'écrit sous la forme :

(50) $$n^{-1}\ q_{\tau}(v)\ p_{\tau}(u)\ n = \frac{\varphi'_{\tau}(u')\ \varphi_{\tau}(v')}{\varphi'_{\tau}(u)\ \varphi_{\tau}(v)}\ \tau(uv + u'v')\ q_{\tau}(v')\ p_{\tau}(u')$$

où u' et v' se déduisent de u et v par la matrice (37'), où $b = 1$.

Il est clair que la représentation η_{τ} de $H(K/k)$ définit canoniquement une représentation, notée également η_{τ} , de $H_{\tau}(K/k)$, qui est irréductible.

4.8. LEMME 7. - <u>Action des caractères quadratiques sur</u> $H_{\tau}(K/k)$ $(p = 2)$: <u>Soit</u> k <u>un corps fini de caractéristique</u> 2 . <u>Si</u> $\varphi \in X_2(k)$ <u>est un caractère quadratique de</u> k , <u>d'élément associé</u> σ <u>relativement à</u> τ , <u>caractère non trivial de</u> k , <u>on définit un automorphisme</u> $t_{\tau}(\varphi)$ <u>de</u> $H(K/k)$ <u>par</u> :

(51) $\qquad t_{\tau}(\varphi)\ :\ q_{\tau}(v)\ p_{\tau}(u) \longmapsto \varphi(u)\ q_{\tau}(v + u\sigma)\ p_{\tau}(u)\ ,\qquad u\ ,\ v \in k$

<u>et trivial sur le centre</u> $\underset{\sim}{T}$; <u>l'application</u> t_{τ} <u>est un monomorphisme de</u> $X_2(k)$ <u>dans le groupe des automorphismes de</u> $H_{\tau}(K/k)$ <u>qui sont triviaux sur le centre</u>. <u>Soit</u> $T(\varphi)$ <u>l'automorphisme unitaire de</u> $E(k)$ <u>donné par</u> $T(\varphi)\ f = \varphi.f$; <u>alors</u>,

(52) $\qquad T(\varphi)^{-1}\ \eta_{\tau}(h)\ T(\varphi) = \eta_{\tau}(h^{t_{\tau}(\varphi)})$ <u>pour tout</u> $h \in H_{\tau}(K/k)$, $\varphi \in X_2(k)$.

LEMME 8. - <u>Action des éléments de</u> k <u>sur</u> $H_{\tau}(K/k)$: <u>Soit</u> ω <u>un élément non nul de</u> k , <u>corps fini de caractéristique</u> 2 . <u>L'application suivante est un automor-</u>

phisme de $H_\tau(K/k)$ trivial sur son centre :

(53) $$d_\tau(\omega) : q_\tau(v)\, p_\tau(u) \longmapsto \tau(uv)\, q_\tau(u\omega^{-1})\, p_\tau(u\omega) , \quad u , v \in k .$$

Soit $D_\tau(\omega)$ l'automorphisme unitaire de $E(k)$ défini par $D_\tau(\omega)\, f(x) = \hat{f}(\omega^{-1} x)$; alors,

(54) $$D_\tau(\omega)^{-1}\, \eta_\tau(h)\, D_\tau(\omega) = \eta_\tau(h^{d_\tau(\omega)}) , \text{ pour tout } h \in H_\tau(K/k) , \quad \omega \in k^* .$$

Ces deux lemmes se vérifient sans difficulté, comme le suivant.

LEMME 9. - Décomposition de l'action des éléments de norme 1 , caractéristique 2 : Soit $n \in T(k)$. Posons $\omega(n) = n^r + \bar{n}^r$, et soit $r_\tau(n)$ l'automorphisme de $H_\tau(K/k)$ défini par (50). Si $\omega(n) \neq 0$, on a la décomposition :

(55) $$r_\tau(n) = t_\tau(\psi)\, d_\tau(\omega(n))\, t_\tau(\psi')$$

où les caractères quadratiques sont

$$\psi(u) = \varphi_\tau(u\alpha\omega^{-1})\, \varphi'_\tau(u)/\varphi_\tau(u\omega^{-1}) \quad \text{et} \quad \psi'(u) = \varphi_\tau(u\omega^{-1})/\varphi'_\tau(u)\, \varphi_\tau(u\delta\omega^{-1})$$

les deux caractères quadratiques φ_τ et φ'_τ sont définis dans la proposition 5, et on a noté $\omega = \omega(n)$, $\alpha = \bar{a}n^r + a\bar{n}^r$, $\delta = an^r + \overline{an}^r$.

4.9. La décomposition (55) permet de relever $r_\tau(n)$ dans le groupe unitaire de $E(k)$ au moyen des opérateurs (52) et (54). On posera ainsi :

(56) $$R_\tau(n) = T(\psi)\, D_\tau(\omega)\, T(\psi') \quad \text{si} \quad \omega = \omega(n) = n^r + \bar{n}^r \neq 0 , \text{ i. e. } n^r \neq 1 .$$

Par contre si $n^r = 1$, on posera $R_\tau(n) = 1$.

LEMME 10. - Détermination du cocycle fourni par le relèvement de l'action de $T(k)$: Gardons les notations précédentes. On a :

(57) $$R_\tau(n)^{-1} = R_\tau(n^{-1}) \quad \text{pour tout} \quad n \in T(k) .$$

$$R_\tau(n_1)\, R_\tau(n_2) = \gamma(\psi'_1\, \psi_2)\, R_\tau(n_1\, n_2) \quad \text{si} \quad \omega(n_1)\, \omega(n_2)\, \omega(n_1\, n_2) \neq 0 ,$$

où ψ'_1 et ψ_2 sont lès caractères quadratiques donnés par (55).

Preuve. L'automorphisme $r(n)$ étant donné par (55), $r_\tau(n^{-1})$ est alors :

$$r_\tau(n^{-1}) = r_\tau(\bar{n}) = t_\tau(\psi'^{-1})\, d_\tau(\omega)\, t_\tau(\psi^{-1})$$

et t_τ étant un homomorphisme, $d_\tau(\omega)$ une involution, on a bien (57) quand $\omega \neq 0$. Si $n^r = 1$, c'est clair. Pour (58), on part de $r_\tau(n_1)\, r_\tau(n_2) = r_\tau(n_1\, n_2)$, qui montre que les opérateurs $R_\tau(n_1)\, R_\tau(n_2)$ et $R_\tau(n_1\, n_2)$ ont le même effet sur la représentation irréductible η_τ , donc ne diffèrent que par un scalaire λ de $\underset{\sim}{T}$. Si on écrit alors que, pour tout $f \in E(k)$, on a l'identité suivante

$$D_\tau(\omega_1)\, T(\psi'_1\, \psi_2)\, D_\tau(\omega_2)\, f = \lambda\, T(\psi_1^{-1}\, \psi)\, D_\tau(\omega)\, T(\psi'\, \psi_2^{-1})\, f , \quad \lambda \in \underset{\sim}{T}$$

qui est aussi, pour le premier membre

$$\int_{k\times k} (\psi'_1\, \psi_2)(x)\, \tau(xy\omega_1^{-1})\, \tau(xz\omega_2^{-1})\, f(z)\, dz = \gamma(\psi'_1\, \psi_2) \int_k f(z)\, \Phi(z)\, dz$$

avec $\Phi\, X_2(k)$, et pour le second membre $\int_k f(z)\, \Psi(z)\, dz$, $\Psi \in X_2(k)$, ce qui implique $\lambda = \gamma(\psi_1'\, \psi_2)$ (démonstration de WEIL, [3], § 15).

4.10. Il reste à calculer explicitement le système de facteurs (58). Donnons seulement les étapes essentielles ; on pose $\psi_0 = \psi_1'\, \psi_2$ avec les notations ci-dessus :

(i) $\psi_0(u) = \varphi_\tau(\mu u)\, \tau(\nu^2 u^2)$, $\mu^2 = \dfrac{\omega}{\omega_1\, \omega_2}$, $\nu^2/\mu^2 = \mathrm{Tr}\ a\left(\dfrac{1}{1+\overline{n}^r} + \dfrac{1}{1+\overline{n}_1^r} + \dfrac{1}{1+\overline{n}_2^r}\right)$;

(ii) $\gamma(\psi_0) = \hat{\varphi}_\tau(\nu/c\mu)$ si $\tau(u) = \tau(c^2 u^2)$ (Remarque 1.1.) ;

(iii) $\hat{\varphi}_\tau(\nu/c\mu) = \gamma(\varphi_\tau)\, \varphi_\tau(\nu/c\mu)^{-1}$ par (17)

$$\varphi_\tau(\nu/c\mu) = \frac{\varphi_\tau((\mathrm{Tr}(a/(1+\overline{n}_1^r))^{1/2}/c)\, \varphi_\tau((\mathrm{Tr}\ a/1+\overline{n}_2^r))^{1/2}/c)}{\varphi_\tau((\mathrm{Tr}\ a/(1+\overline{n}^r))^{1/2}/c)}\, \tau(1/c^2\omega)\ ;$$

(v) si $y \in K$ et $y + \overline{y} = 1$ alors $\tau(y\overline{y}/c^2) = -1$;

(vi) Posons $\varepsilon(n) = -\gamma(\varphi_\tau)^{-1}\, \varphi_\tau[c^{-1}(\mathrm{Tr}(a/1+\overline{n}^r))^{1/2}]$, alors $\gamma(\psi_0) = \dfrac{\varepsilon(n)}{\varepsilon(n_1)\, \varepsilon(n_2)}$

(vii) $\varepsilon(n)\, \varepsilon(n^{-1}) = 1$, en utilisant (6) et (20^2).

On obtient alors le résultat suivant :

4.11. PROPOSITION 7. - Représentations des groupes diamants, caractéristique 2 : Soit k un corps fini de caractéristique 2 , et soit $D(K/k\ ,\ r)$ le groupe construit ci-dessus (4.5.). Les classes de représentations irréductibles de $D(K/k\ ,\ r)$ qui ne sont pas triviales sur le centre de $H(K/k)$ sont en correspondance bijective avec les couples $(\tau\ ,\ \theta)$ formés d'un caractère non trivial de k et d'un caractère θ de $T(k)$; une réalisation unitaire dans l'espace $E(k)$ est donnée par les formules suivantes :

(59) $\delta_{\tau,\theta}(n) = \varepsilon(n)\, \theta(n)\, R_\tau(n)$ si $n^r \neq 1$ où ε est donné par (vi), R_τ par (56)

(60) $\delta_{\tau,\theta}(n) = \theta(n)$ si $n^r = 1$

(61) $\delta_{\tau,\theta}|H(K/k)$ est la représentation η_τ de la proposition 5, formule (35).

Si $n^r \neq 1$, la trace de l'opérateur $\delta_{\tau,\theta}(n)$ est $-\theta(n)$, sinon, c'est $q\theta(n)$.

Les autres représentations irréductibles de $D(K/k\ ,\ r)$ sont, à équivalence près, les suivantes :

(i) les caractères de $T(k)$, prolongés à $D(K/k\ ,\ r)$ par la projection de noyau $H(K/k)$;

(ii) pour chaque caractère non trivial $\varkappa$ de K , on définit une représentation irréductible $\delta_\varkappa$ de $D(K/k\ ,\ r)$ dans l'espace $E(T(k)^r)$ des fonctions complexes sur $T(k)^r$ par la formule

$$\delta_\varkappa(n_1(z,w))\, f(n) = \varkappa(n^{-r} w)\, f(n_1^r\, n^r)\ ,\quad n_1 \in T(k)\ ,\quad (z,w) \in H(K/k)\ ,\quad f \in T(k)^r\ .$$

Preuve. - Les calculs précédents montrent que $\delta_\varkappa$ est une représentation de $D(K/k\ ,\ r)$, irréductible puisque sa restriction au sous-groupe $H(K/k)$ l'est déjà.

La trace se calcule en écrivant $R_T(n)\ f$ avec un noyau, et, par (55), on a donc

$$R_T(n)\ f(y) = \int_k \psi(y)\ \tau(xy/\omega)\ \psi'(x)\ f(x)\ dx$$

et donc

$$\mathrm{Tr}\ R_T(n) = \int_k \frac{\varphi_T(x\alpha/\omega)}{\varphi(x\delta/\omega)}\ \tau(x^2/\omega)\ dx = \gamma(\varphi_T)\ \varphi_T\Big(\frac{1}{c}\Big(\frac{\delta+1}{\omega}\Big)^{1/2}\Big)^{-1} ,$$

par (17) : c'est $-\varepsilon(n)^{-1}$, d'où le résultat. Le reste de la proposition est facile.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNAT (P.), CONZE (N.), DUFLO (M.), LEVY-NAHAS (M.), RAIS (M.), RENOUARD (P.), VERGNE (M.). - Représentations des groupes de Lie résolubles. - Paris, Dunod, 1972 (Monographies de la Société mathématique de France, 4).

[2] GÉRARDIN (P.). - Sur les représentations du groupe linéaire général sur un corps p-adique, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 12, 24 p.

[3] WEIL (A.). - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math., Uppsala, t. 111, 1964, p. 143-211.

(Texte reçu le 22 janvier 1973)

Paul GÉRARDIN
7 rue Barrault
75013 PARIS