Marie-Claude Sarmant

Forme de certaines fonctions automorphes ayant une infinité dénombrable de pôles dans une couronne

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1972-1973), exp. nº 8, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 8, 7 p.

4 décembre 1972

FORME DE CERTAINES FONCTIONS AUTOMORPHES AYANT UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE PÔLES DANS UNE COURONNE

par Marie-Claude SARMANT

1. Introduction.

Nous nous plaçons dans le corps $k = \hat{\Omega}_p$. Soit $\lambda \in k$, $|\lambda| \neq 1$. Nous savons ([2] et [3]) que toute fonction f analytique uniforme automorphe de période λ , n'ayant qu'un nombre fini de pôles dans toute couronne de k centrée en 0 , peut se mettre sous la forme d'un produit infini :

$$f(x) = C \prod_{n=-\infty}^{+\infty} (\prod_{i=0}^{I} \frac{\lambda^n x - a_i}{\lambda^n x - b_i}) ,$$

où C est une constante, où les a_i sont les zéros, et les b_i sont les pôles de f (modulo multiplicativement λ), et ceux-ci sont tels que :

$$\prod_{i=1}^{I} (a_i/b_i) = 1 .$$

Il existe des fonctions automorphes de forme un peu analogue possédant une infinité de pôles dans une couronne $r \leqslant |x| \leqslant |\lambda| r$:

Soient $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ deux suites infinies d'éléments de k , telles que :

$$\lim_{i \to \infty} (a_i/b_i) = 1 \quad \text{et} \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} (a_i/b_i) = 1 .$$

Soit $C \in k$ une constante $\neq 0$. Alors la fonction :

$$G(x) = C \prod_{n=-\infty}^{+\infty} [\prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n x - a_i}{\lambda^n x - b_i}]$$

est automorphe.

Réciproquement, nous allons chercher si certaines conditions permettent à une fonction automorphe de se mettre sous cette forme. Pour cela, on va utiliser un théorème qui ne concerne pas seulement les fonctions automorphes :

2. Théorème de décomposition en produit.

Hypothèses ($\mathcal{H}$). - Soient r_1 , $r_2 \in \mathbb{R}$, tels que $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Posons :

$$C_{r_1}^{r_2} = \{x \mid x \in k \mid r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2\} .$$

Soit $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'éléments de $C_{r_1}^{r_2}$ telle que :

$$D = C_{r_1}^{r_2} -- \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

soit quasi-connexe [1] (la notation $--$ désignant une différence ensembliste) et que :

$$\inf_{i \neq j, i, j \in \mathbb{N}} |b_i - b_j| = \rho_0 > 0 .$$

Posons, pour $r \in \underset{\sim}{R}$, $r < r_1$:

$$D_r = C_{r_1}^{r_2} - - \bigcup_{i \in \underset{\sim}{N}} C(b_i , r)$$

Alors $D = D_0$, et si $r < \rho_0$, tous les trous de D_r sont isolés.

On supposera ici, au besoin en faisant une homothétie, que $\rho_0 > 1$.

Soit $F(x)$ une fonction analytique uniforme de support D [1] telle que $F|D_r$ soit élément analytique pour tout $r < \rho_0$.

<u>Conclusion</u>. - Pour tout $\alpha \in k$, sauf peut-être pour un ensemble $\mathfrak{A}$ dénombrable, fini ou infini, d'éléments de k , à tout b_i correspond un ensemble fini ou dénombrable $\{a_\gamma^i\}_{\gamma \in A_i}$ de zéros de $F(x) + \alpha$ tels que :

$$\prod_{\gamma \in A_i} (b_i / a_\gamma^i)$$

existe et tende vers 1 quand i devient infini.

De plus, $F(x) + \alpha$ peut être mis sous la forme :

$$F(x) + \alpha = H(x) \times \prod_{i \in \underset{\sim}{N}} \prod_{\gamma \in A_i} \frac{x - a_\gamma^i}{x - b_i} ,$$

où $H(x)$ est une fonction analytique uniforme sur $C_{r_1}^{r_2}$, n'ayant qu'un nombre fini de pôles dans $C_{r_1}^{r_2}$.

<u>Démonstration</u>. - Prenons $r \in \underset{\sim}{R}$, $r < \rho_0$.

D'après le 1er théorème Mittag-Löfflerien [1] appliqué à $F|D_r$:

$$F(x) = f_{r_1}^r(x) + f_{r_2}^r(x) + \sum_{i=1}^\infty f_i^r(x - b_i)$$

sur D_r avec :

$f_{r_1}^r(x)$: série de Laurent en x , sans terme de degré $\geqslant 0$, convergente si $|x| \geqslant r_1$,

$f_{r_2}^r(x)$: série de Taylor en x , convergente si $|x| \leqslant r_2$,

$f_i^r(x - b_i)$: série de Laurent en $x - b_i$, sans terme de degré $\geqslant 0$, convergente si $|x - b_i| \geqslant r$.

$\sum_{i=1}^\infty f_i^r(x - b_i)$ converge uniformément sur D_r , <u>mais pas sur</u> D .

Ce développement est unique.

$$f_i^{r'} = f_i^r \quad \text{si} \quad |x - b_i| \geqslant \sup (r' , r)$$

Donc $f_i^{r'}$ et f_i^r ont les même coefficients.

$f_i^r = f_i$ ne dépend pas de r et converge si $|x - b_i| > 0$. (Il en est de même pour $f_{r_1}^r$ et $f_{r_2}^r$, puisque tous les trous sont isolés.)

$$F(x) = f_{r_1}(x) + f_{r_2}(x) + \sum_{i=1}^\infty f_i(x - b_i) .$$

$$F(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^\infty f_i(x - b_i) .$$

$\Phi(x)$: série de Laurent en x , donc sans pôle et avec un nombre fini de zéros dans $C_{r_1}^{r_2}$.

Etude de $f_i(x - b_i)$. - $\forall\, r < \rho_0$, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x - b_i)$ converge uniformément sur D_r , donc :

$$\sup_{x\in D_r} |f_i(x - b_i)| \to 0 \quad \text{si} \quad i \to +\infty$$

$f_i(x - b_i)$ est une série de Laurent en $x - b_i$, sans terme de degré $\geqslant 0$:

$$\sup_{|x-b_i|\geqslant r} |f_i(x - b_i)| = \sup_{x\in D_r} |f_i(x - b_i)|$$

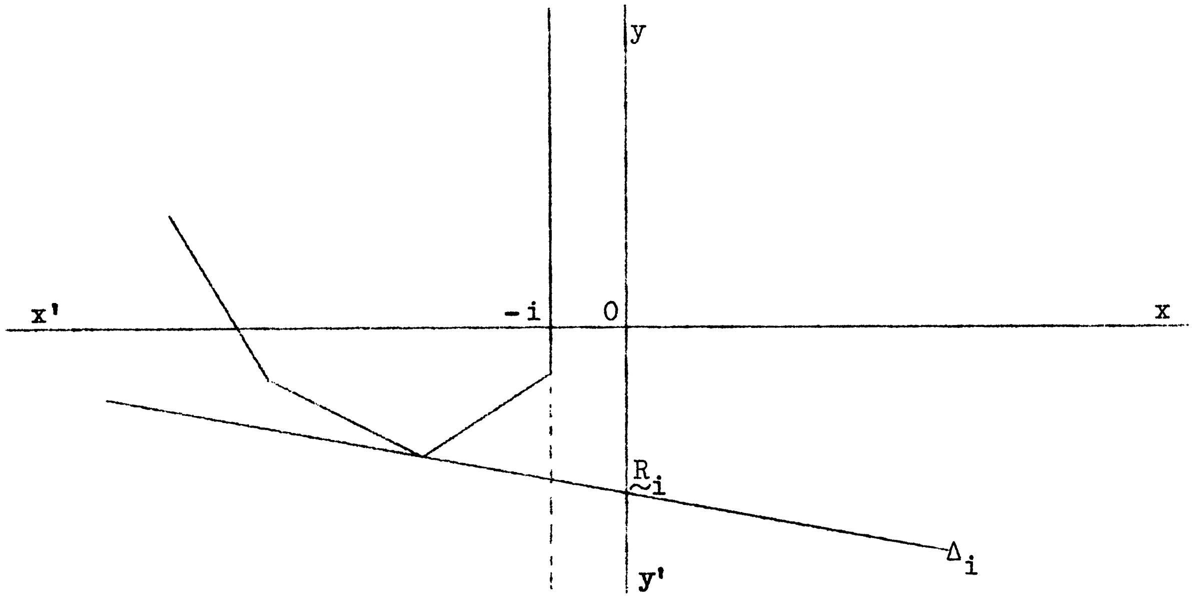
$$\sup_{|x-b_i|\geqslant r} |f_i(x - b_i)| \to 0 \quad \text{si} \quad i \to +\infty$$

$$\inf_{v(x-b_i)\leqslant -\log_p r} v[f_i(x - b_i)] \to +\infty \quad \text{si} \quad i \to +\infty$$

Si $v(x - b_i) \leqslant -\log_p r$: $-v(x - b_i) \geqslant \log_p r$

Posons $x - b_i = t$, $f_i(x - b_i) = \varphi_i(t)$

Polygone de Newton de $\varphi_i(t)$:



pente de Δ_i : $\tau(r) = \log_p r$

$$\overline{O\underset{\sim}{R}_i} = \inf_{v(x-b_i)\leqslant -\log_p r} v[f_i(x - b_i)]$$

Quand $i \to +\infty$, $\overline{O\underset{\sim}{R}_i} \to +\infty$: $\underset{\sim}{R}_i$ tend vers le point à l'infini sur OY .

$\forall\, r$ fixé , $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, I$ tel que :

$$i > I \Rightarrow \inf_{v(x-b_i)\leqslant -\log_p r} v[f(x - b_i)] > \varepsilon$$

ou quel que soit A_0 sur $Y'Y$, il existe I tel que $i > I$ entraîne $\overline{OA_i} > \overline{OA_0}$.

<u>Etude de</u> $F(b_I + t)$.

$$F(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x - b_i)$$

$$\sup_{x\in D_r} |F(x)| = M_r \text{ fini}$$

Etudions le développement en série de Laurent de $F(x)$ autour d'un b_I , pour un I fixé :

$$x - b_I = t$$

$$F^{(I)}(t) = F(b_I + t) = \Phi(b_I + t) + \sum_{i\neq I, i\in \underset{\sim}{N}} f_i(b_I - b_i + t) + f_I(t)$$

$$R_I(t) = \Phi(b_I + t) + \sum_{i\neq I, i\in \underset{\sim}{N}} f_i - (b_I - b_i + t)$$

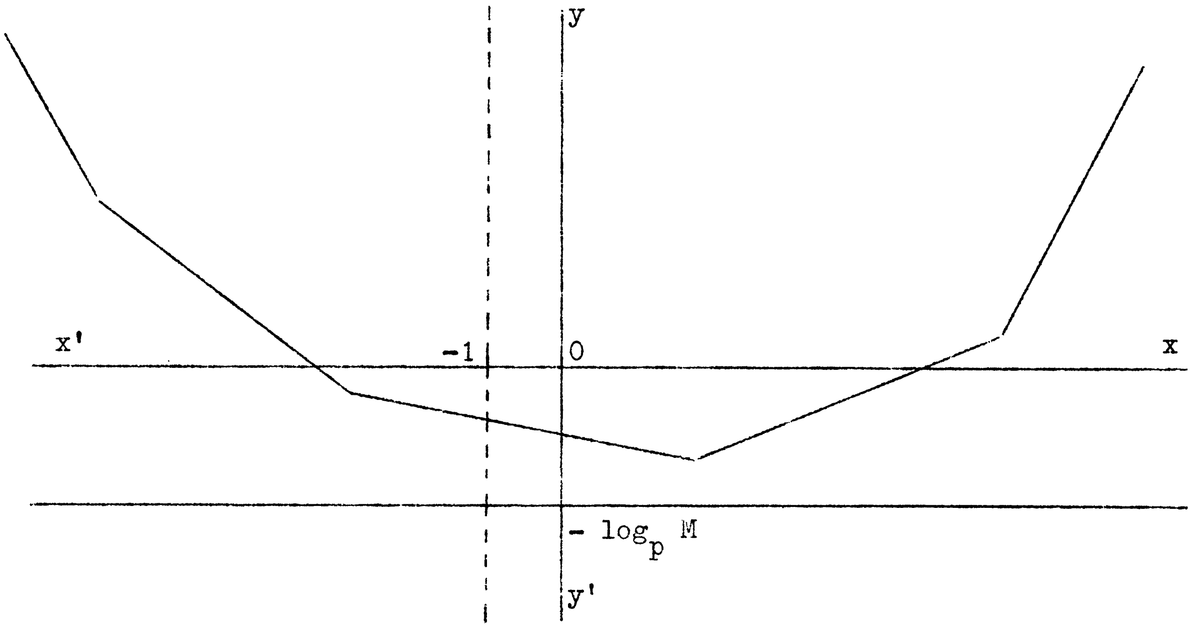
$R_I(t)$ est développable en série de Taylor, convergente au moins pour $|t| < \rho_0$.

Si $r = 1$, $\sup_{x\in D_1} |F(x)| = M$ est fini

Le polygone de Newton du développement en série de Laurent de $F(b_I + t)$ est donc situé au-dessus de la droite :

$$Y = - \log_p M$$

et M ne dépend pas de I .



A gauche de OY , nous avons soit, si b_I est d'ordre fini, un nombre fini de côtés finis, puis un côté vertical ; soit, si b_I est point singulier essentiel, un nombre infini de côtés finis dont la pente tend vers $-\infty$: ces côtés proviennent du polygone de Newton de $f_I(t)$. A droite de OY , nous avons des côtés qui proviennent du polygone de $R_I(t)$.

Soit S_I le terme constant du développement de $F^{(I)}$. Soit α un élément quelconque de k . Le terme constant de $F^{(I)}(t) + \alpha$ est $S_I + \alpha$.

Nous allons utiliser dans la suite l'hypothèse que $|S_I + \alpha|$ est inférieurement bornée quelque soit I ; dans le cas contraire, si $\{|S_I + \alpha|\}_{i\in N}$ a pour point d'accumulation 0 , $\{S_I\}_{I\in \underset{\sim}{N}}$ a pour point d'accumulation $-\alpha$. Ceci exige que la suite S_I ait un ou plusieurs points d'accumulation ; ainsi apparaît l'ensemble exceptionnel $\mathfrak{A}$ de l'énoncé, ensemble (éventuellement vide) des points d'accumulation de S_I . Nous supposerons pour la suite que $\alpha \notin \mathfrak{A}$.

Le terme constant de $F^{(I)}(t) + \alpha$ est borné inférieurement :

$$|S_I + \alpha| \geqslant N \quad N \text{ constante réelle } \not\geqslant 0$$

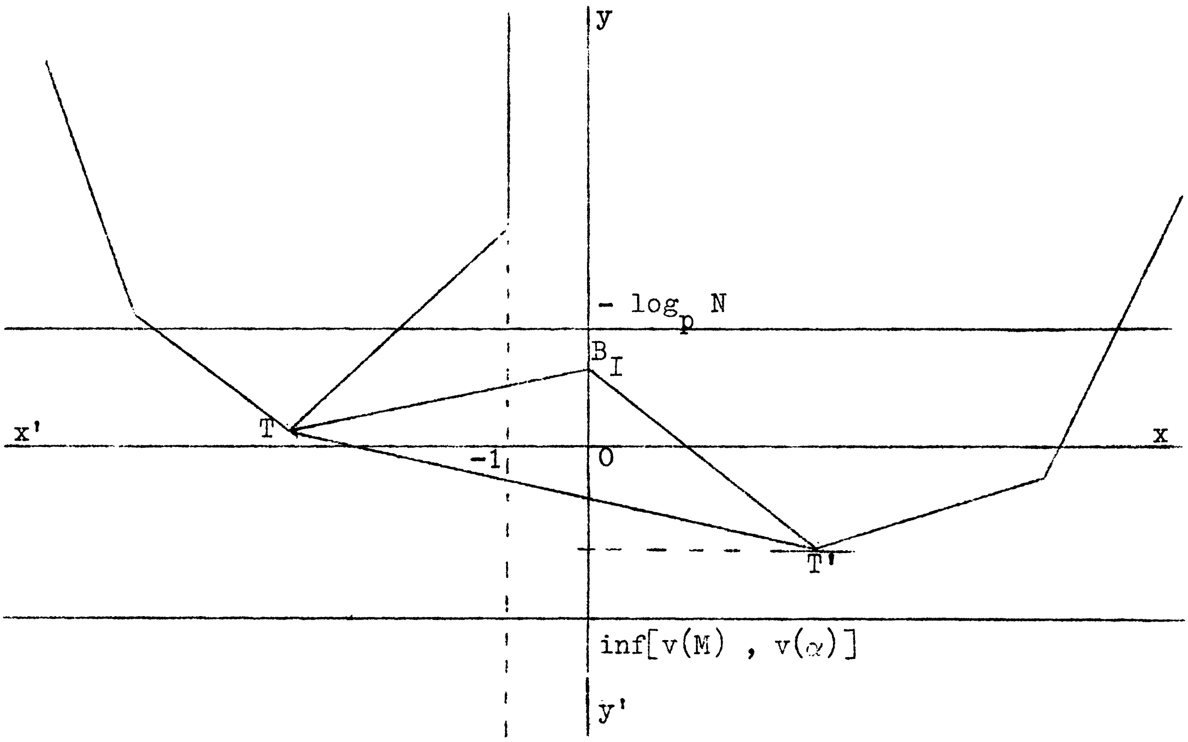
$$v(S_I + \alpha) < -\log_p N$$

D'autre part,

$$\sup_{x \in D_1} |F(x) + \alpha| \leqslant \sup[\sup_{x \in D_1} |F(x)| \ , \ |\alpha|] \leqslant \sup [M \ , \ |\alpha|]$$

On appelle B_I le point de coordonnées $(0 \ , \ v(S_I))$, premier sommet du polygone de $R_I(t) + \alpha$.

Le polygone de $F(b_I + t) + \alpha$ aura donc la forme suivante :



Etudions l'ensemble des côtés du polygone de Newton de $F^{(I)}(t) + \alpha$ qui se trouvent à gauche de OY : tous ces côtés ont une pente inférieure à celle de la tangente commune TT' au polygone de $f_I(t)$ et à celui de $R_I(t) + \alpha$, donc à celle de la tangente $B_I T$ au polygone de $f_I(t)$ issue de B_I : nous allons montrer que ces pentes tendent vers $-\infty$ quand I devient infini.

$f_I(t) \to 0$ uniformément en t dans $1 > |t| > r$ quand $I \to +\infty$, donc :

$\forall r \in \underset{\sim}{R}$ fixé, $\forall \lambda > 0$, $\exists I(r)$ tel que $I > I(r) \Rightarrow \inf_{v(t) < -\log_p r} v[f_I(t)] > \lambda$

Prenons $\lambda = -\log_p N$,

$\forall r$ fixé, $\exists I'(r)$ tel que $I > I'(r) \Rightarrow \inf_{v(t) \leqslant -\log_p r} v[f_I(t)] > -\log_p N$

Les tangentes au polygone de $f_I(t)$ issues d'un point de Y'OY situé au-dessous du point d'ordonnée $-\log_p N$ seront alors de pente inférieure à $\log_p r$:

$$\forall \mu \in \underset{\sim}{R}\ ,\quad \exists J \text{ tel que } I > J \Rightarrow \text{pente de } B_I T < \mu$$

Pour $F^{(I)}(t) + \alpha$, nous avons l'inégalité :

$$v[F^{(I)}(t) + \alpha] \geqslant \inf[v[f_I(t)]\ ,\ v[\alpha + R_I(t)]] \geqslant \inf[v(M)\ ,\ v(\alpha)]$$

si $|t| = r$.

Soient alors $\{\varepsilon_\gamma^I\}_{\gamma\in A_I}$ les zéros de $F^{(I)}(t) + \alpha$ correspondant aux côtés du polygone qui se trouvent à gauche de Y'OY (y compris la tangente TT').

A_I est un ensemble fini si b_I est un pôle d'ordre fini, et $\underset{\sim}{N}$ si b_I est un point singulier essentiel.

$$\forall \mu \in \underset{\sim}{R}\ ,\quad \exists J(\mu) \text{ tel que } I > J \Rightarrow \begin{array}{l} -v(\varepsilon_\gamma^I) < \mu\ ,\quad \forall \gamma \in A_I \\ v(\varepsilon_\gamma^I) > -\mu\ ,\quad \forall \gamma \in A_I \end{array}$$

Soient $a_\nu^I = b_I + \varepsilon_\nu^I$ les zéros correspondants de $F(x) + \alpha$:

$$\forall \mu \in \underset{\sim}{R}\ ,\quad \exists J(\mu) \text{ tel que } I > J = v(a_\nu^I - b_I) - \mu\ ,\quad \forall \nu \in A_I$$

$$\text{ou } |a_\nu^I - b_I| < p^\mu$$

$$\text{ou } \left|\frac{a_\nu^I}{b_I} - 1\right| < \frac{p^\mu}{r_1}$$

Donc :

$$\forall \varepsilon \in \underset{\sim}{R}^+\ ,\quad \exists J \text{ tel que } I > J \Rightarrow \left|\frac{a_\nu^I}{b_I} - 1\right| < \varepsilon\ ,\quad \forall \nu \in A_I\ .$$

Et par conséquent

$$\left|\prod_{\nu\in A_I} (a_\nu^I/b_I) - 1\right| < \varepsilon$$

($\prod_{\nu\in A_I} (a_\nu^I/b_I)$ est défini même si A_I est infini : les zéros de $\varepsilon_\gamma^I = a_\gamma^I - b_I$ de $F_I(t)$ tendent vers 0 lorsque ν devient infini, car le développement en série de Laurent de $F_I(t)$ converge pour tout $t \neq 0$) .

$\prod_{\nu\in A_I} (a_\nu^I/b_I)$ converge donc vers 1 quand I devient infini.

Nous savons donc que le produit infini :

$$\prod_{I\in \underset{\sim}{N}} \prod_{\nu\in A_I} ((x - a_\nu^I)/(x - b_I))$$

existe pour $x \notin \{b_I\}_{I\in \underset{\sim}{N}}$

Etudions la fonction :

$$H(x) = [F(x) + \alpha][\prod_{i\in \underset{\sim}{N}} \prod_{\nu\in A_I} ((x - b_I)/(x - a_\nu^I))]$$

Elle n'a aucun zéro dans les cercles $C(b_I\ ,\ R)$ où

$$-\log_p R = \log_p N - \inf[v(M)\ ,\ v(\alpha)]$$

(Cette valeur correspond à la plus petite pente possible pour une tangente TT' ne passant pas par B_I).

Par conséquent aucun b_I ne peut être point singulier essentiel pour $H(x)$.

Supposons que $H(x)$ ait une infinité de pôles dans $C_{r_1}^{r_2}$. Nous pourrions alors réappliquer le procédé précédent : la pente de la tangente TT' devrait tendre vers 0 , ce qui donnerait des zéros dans une infinité de cercles $C(b_I , R)$, ce qui est impossible.

$H(x)$ n'a donc qu'un nombre fini de pôles dans $C_{r_1}^{r_2}$, et c'est une fonction analytique uniforme dans $C_{r_1}^{r_2}$ ($H(x)$ n'aura aussi, bien sûr, qu'un nombre fini de zéros dans $C_{r_1}^{r_2}$).

3. Application aux fonctions automorphes.

Soit $F(x)$ une fonction automorphe de période λ vérifiant les hypothèses $(\mathcal{H})$ pour $r_2 = |\lambda| r_1$.

Posons

$$K(x) = \prod_{n\in \underset{\sim}{Z}} \prod_{I\in \underset{\sim}{N}} \prod_{\nu\in A_I} ((\lambda^n x - a_\nu^I)/(\lambda^n x - b_I))$$

$K(\lambda x) = K(x)$: K est automorphe de période λ . $(F(x) + \alpha)/K(x))$ est donc une fonction automorphe qui n'a qu'un nombre fini de pôles dans chaque couronne $C_r^{|\lambda| r}$, et elle peut être mise sous la forme [3] :

$$K(x) = C \prod_{n\in \underset{\sim}{Z}} \prod_{i\in\Lambda} (\lambda^n x - a'i)/(\lambda^n x - b_i)$$

C constante appartenant à k , Λ ensemble fini d'indices, et $\prod_{i\in\Lambda} (a'_i/b_i)=1$. D'où :

$$F(x) + \alpha = C\, K(x) \prod_{n\in \underset{\sim}{Z}} \prod_{i\in\Lambda} (\lambda^n x - a'_i)/(\lambda^n x - b_i)$$

Soit encore, en réunissant Λ avec les A_i ,

$$F(x) + \alpha = C \prod_{n\in \underset{\sim}{Z}} \prod_{I\in \underset{\sim}{N}} \prod_{\nu\in A'_I} (\lambda^n x - a'^I_\nu)/(\lambda^n x - b_I) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche Scientifique, 1966.

[2] ROQUETTE (Peter). - Analytic theory of elliptic functions over local fields. - Göttingen, Vandenhoech und Ruprecht, 1970.(Hamburger mathematische Einzelschriften, 1).

[3] SARMANT (Marie-Claude). - Fonctions automorphes dans un corps valué non archimédien, Séminaire Delange-Pisot-Poitou ; Théorie des nombres, 11e année, 1969/70, 8 p.

(Texte reçu le 5 mars 1973)

Marie-Claude SARMANT
36 rue des plantes
75014 PARIS