Daniel Bertrand

Application de la logique à un problème de dimension diophantienne sur les corps $\mathbb{Q}_p$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1972-1973), exp. n° 14, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 14, 15 p.

29 janvier 1973

APPLICATION DE LA LOGIQUE À UN PROBLÈME DE DIMENSION DIOPHANTIENNE SUR LES CORPS $\underset{\sim}{Q}_p$

par Daniel BERTRAND

I. La conjecture d'Artin

Nous rappelons ici quelques résultats de la théorie des dimensions diophantiennes des corps.

Soient K un corps, i un entier positif ou nul, d un entier supérieur ou égal à 1. On dit que K satisfait la propriété $C_i(d)$ (notation : $K \quad C_i(d)$) lorsque tout polynôme homogène à coefficients dans K, de degré d, à $n > d^i$ variables, a un zéro non trivial dans K.

On dit que K est C_i si K vérifie $C_i(d)$ pour tout $d \geqslant 1$.

Si $i < j$, $C_i(d)$ entraîne $C_j(d)$, donc C_i entraîne C_j.

La d-dimension diophantienne de K est l'entier

$$dd_d(K) = \inf \{i \mid K \quad C_i(d)\} ,$$

et la dimension diophantienne de K est

$$dd(K) = \inf \{i \mid K \quad C_i\} = \sup_d dd_d(K) .$$

<u>Exemples</u>.

Si K est ordonnable, $dd(K) = +\infty$,

si K est algébriquement clos, K est C_0,

si K est C_1, le groupe de Brauer de toute extension finie de K est nul (cf. SERRE [11], X, § 7).

THÉORÈME de Chevalley-Warning. - <u>Si</u> K <u>est un corps fini, toute forme de degré</u> d, <u>à</u> $n > d$ <u>variables, a un zéro non trivial, autrement dit, tout corps fini est</u> C_1.

Si L est une extension transcendante finie de K, le théorème de Tsen et Lang énonce

$$dd(L) = dd(K) + \deg \operatorname{Tr} (L/K) .$$

En particulier, $dd(K(T)) = dd(K) + 1$ (cf. LANG [7]).

Le corps des séries formelles sur K vérifie encore

$$dd(K((T))) = dd(K) + 1 .$$

Démonstration. - $K[[T]]$ étant un anneau de valuation discrète de corps résiduel K (pour la valuation définie par $v(T) = 1$), on a (cf. RIBENBOIM [9], XI, h) :

$$dd(K((T))) \geqslant dd(K) + 1 .$$

Par ailleurs, K , complet, est hensélien. Or, si Z est un préschéma de type fini sur un anneau R de valuation discrète hensélien, d'uniformisante T , GREENBERG, dans [4], a montré le lemme de Hensel suivant :

$$Z \text{ a un point dans } R \Longleftrightarrow Z \text{ a un point dans } R/T^{\nu} , \quad \forall \nu \in \mathbb{N} .$$

Soit donc f une forme de $K[[T]][X_1, \ldots, X_n]$, $n \geqslant dd(K) + 1$, f définit une hypersurface projective Z de $\mathbb{P}^{n-1}$. D'après l'égalité

$$dd(K(T)) = dd(K) + 1 ,$$

Z a un point dans $K[[T]]/T^{\nu}$, ce quotient étant isomorphe à $K[T]$. Donc Z a un point projectif dans $K[[T]]$, c'est-à-dire, f a un zéro non trivial dans $K[[T]]$. D'où :

$$dd(K((T))) \leqslant dd(K) + 1 .$$

Considérons en particulier les corps $\mathbb{S}_p = \mathbb{F}_p((T))$ des séries formelles sur les corps finis $\mathbb{F}_p$. On obtient, par application des théorèmes de Greenberg et de Chevalley-Warning,

$$dd(\mathbb{S}_p) = dd(\mathbb{F}_p) + 1 = 1 + 1 = 2 .$$

Or, les corps $\mathbb{S}_p$ et les corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$ présentent, excepté leurs caractéristiques, des propriétés similaires (nous précisons le sens de cette phrase dans le § III). Ceci a conduit ARTIN à poser la conjecture : Pour tout entier premier, $\mathbb{Q}_p \in C_2(d)$, $\forall d \geqslant 1$ (c'est-à-dire : $dd(\mathbb{Q}_p) = 2$).

La conjecture a été vérifiée pour $d = 2$ (HASSE), et pour $d = 3$ (LEWIS). Mais TERJANIAN a montré, pour $d = 4$, $\mathbb{Q}_2 \notin C_2(4)$, d'où $dd(\mathbb{Q}_2) > 2$.

Le théorème d'Ax et Kochen énonce que, pour d donné, l'ensemble des nombres premiers p tels que $\mathbb{Q}_p \notin C_2(d)$ est fini.

II. La théorie des ultra-produits

1. Définitions. - Soit $\{F_i\}$ une famille d'objets indexée par un ensemble infini I . Une famille non vide $\mathcal{D}$ de parties de I est appelée un filtre si elle ne contient pas $\{\emptyset\}$, si elle est stable par intersection et extension.

Un filtre $\mathcal{D}$ est dit principal s'il existe une partie R de I telle que

$$\mathcal{D} = \{\underset{\sim}{S} \mid R \subseteq \underset{\sim}{S} \subseteq I\} .$$

On définit sur les filtres une relation d'ordre par $\mathcal{D} < \mathcal{D}'$ si, et seulement si, $S \in \mathcal{D} \Rightarrow S \in \mathcal{D}'$.

DÉFINITION 1. - Les ultrafiltres sont les filtres maximaux par cette relation d'ordre. Ils sont caractérisés par la propriété ensembliste suivante :

$$\forall\ S \in Q(I)\ , \qquad S \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow I - S \notin \mathbb{U}\ .$$

Un ultrafiltre définit donc une mesure additive μ sur I, si l'on pose, pour toute partie S de I, $\mu(S) = 1 \Longleftrightarrow S \in \mathbb{U}$.

Si $\mathbb{U}$ est un ultrafiltre principal, il existe un élément j de I tel que :

$$\mathbb{U} = \{S \mid j \in S \subseteq I\}\ .$$

D'après le lemme de Zorn, toute partie infinie S de I appartient à un ultrafiltre. Si S est cofinie (c'est-à-dire si $I - S$ est finie), S appartient à tous les ultrafiltres non principaux sur I.

DÉFINITION 2. - Dans le produit cartésien $\prod_{i\in I} F_i$, considérons la relation d'équivalence :

$$q \equiv r \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \{i \mid q(i) = r(i)\} \in \mathbb{U}$$

(c'est-à-dire $q(i) = r(i)$ p. p. au sens de la mesure μ), où $q(j)$ désigne la projection de $q \in \prod F_i$ sur F_j. Les classes d'équivalence (notées q^*) forment l'ultraproduit $\prod F_i/\mathbb{U}$ de la famille $\{F_i\}_{i\in I}$ par l'ultrafiltre $\mathbb{U}$ sur I.

Si $\mathbb{U}$ est l'ultrafiltre principal engendré par l'élément j de I, $\prod F_i/\mathbb{U}$ est isomorphe à F_j. Nous écarterons dorénavant ce type d'ultraproduit trivial.

2. La catégorie $(\mathcal{C})$.

Pour fixer les idées, nous nous plaçons dans le cas où les F_i sont des objets de la catégorie $(\mathcal{C})$ suivante :

Les objets de $(\mathcal{C})$ sont les corps valués possédant une section, c'est-à-dire les triplets (K, v, π) où K est un corps, $v : K^\bullet \dashrightarrow v(K^\bullet)$ une valuation, et $\pi : v(K^\bullet) \dashrightarrow K^\bullet$ un homomorphisme de groupe, tel que $\forall\ t \in v(K^\bullet)$, $v(\pi(t)) = t$.

Les morphismes de $(\mathcal{C})$ sont les couples

$$\Phi = (\varphi, f) : (K_1, v_1, \pi_1) \dashrightarrow (K_2, v_2, \pi_2)\ ,$$

où φ est un isomorphisme de corps $K_1 \dashrightarrow K_2$, et f est un isomorphisme de groupe : $v_1(K_1^\bullet) \dashrightarrow v_2(K_2^\bullet)$ tels que :

$$\forall\ x \in K_1\ , \qquad v_2(\varphi(x)) = f(v_1(x))$$
$$\forall\ t \in v_1(K_1^\bullet)\ , \qquad \varphi(\pi_1(t)) = \pi_2(f(t))\ .$$

Un sous-objet (K', v', π') de (K, v, π) est un sous-corps K' de K, valué par $v' = v|_K$, possédant une section $\pi' = \pi|_{v(K'^\bullet)}$, et tel que

$$\pi'(v'(K'^\bullet)) \subset K'^\bullet\ .$$

PROPOSITION 1. - Soit $\{F_i, v_i, \pi_i\}_{i\in I}$ une famille d'objets de $(\mathcal{C})$, $\mathbb{U}$ un

<u>ultrafiltre sur</u> I . <u>Alors</u>, $\prod F_i/\mathcal{U}$ <u>est un objet de</u> $(\mathcal{C})$.

<u>Démonstration</u>.

(α) $\prod F_i/\mathcal{U}$ est un corps : c'est un anneau en tant que quotient de l'anneau $\prod F_i$. Soient alors q^* un élément non nul de $\prod F_i/\mathcal{U}$, et q un représentant de q^* dans $\prod F_i$, $S = \{i \mid q(i) \neq 0\} \in \mathcal{U}$. L'élément de

$$\prod F_i : \quad r = \{\{\frac{1}{q(i)}\}_{i\in S} , \{1\}_{i\notin S}\}$$

définit un élément r^* de l'ultraproduit tel que $r^* q^* = 1$, puisque $r(i)\, q(i)=1$ p. p. En même temps, on voit que

$$(\prod F_i/\mathcal{U})^\bullet = \prod F_i^\bullet/\mathcal{U} .$$

(β) $\prod F_i/\mathcal{U}$ est valué : soit $G_i = v_i(F_i^\bullet)$ le groupe des valeurs de (F_i , v_i) . Munissons le groupe $\prod G_i/\mathcal{U}$, ultraproduit des G_i par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, de la relation d'ordre :

$$t^* > s^* \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} t(i) \geqslant h(i) \quad \text{p. p.}$$

L'application de $\prod F_i^\bullet$ dans $\prod G_i$, $v : q \dashrightarrow \{v_i(q(i))\}_{i\in I}$, définit par passage au quotient une application v^* de groupe multiplicatif $(\prod F_i/\mathcal{U})^\bullet$ dans $\prod G_i/\mathcal{U}$. v^* est en effet bien définie, puisque si q désigne un représentant de l'unité de $\prod F_i/\mathcal{U}$, l'ensemble $\{i \mid q(i) = 1\}$, donc aussi l'ensemble

$$\{i \mid v_i(q(i)) = 0\}$$

appartiennent à $\mathcal{U}$, et $v^*(1^*) = 0$ dans $\prod G_i/\mathcal{U}$. On vérifie que v^* est un homomorphisme de groupe tel que :

$$v^*(q^* + n^*) \geqslant \inf\ (v^*(q^*) , v^*(n^*)) .$$

$\prod F_i/\mathcal{U}$ est donc un corps valué, et son groupe de valeurs est $\prod v_i(F_i^\bullet)/\mathcal{U}$.

Soit $\mathcal{O}_i$ (resp. $\overline{F}_i$) l'anneau des entiers (resp. le corps résiduel) de F_i , et soient q^* un entier de $(\prod F_i/\mathcal{U} , v^*)$, q un de ses représentants dans $\prod F_i$. De $v^*(q^*) \geqslant 0$, on tire $v_i(q(i)) \geqslant 0$ p. p. Il existe donc $r \in \prod \mathcal{O}_i$ tel que $r^* = q^*$, et cette démarche ne dépend pas du choix de représentant de q . L'anneau des entiers de $\prod F_i/\mathcal{U}$ est ainsi isomorphe à $\prod \mathcal{O}_i/\mathcal{U}$. On montrerait de même que son corps résiduel est isomorphe à $\prod \overline{F}_i/\mathcal{U}$.

(γ) $\prod F_i/\mathcal{U}$ admet une section : par un raisonnement similaire au précédent, on voit que l'application $\pi^* : \prod G_i/\mathcal{U} \dashrightarrow (\prod F_i/\mathcal{U})^\bullet$, définie par

$$\pi^*(t^*) = (\{\pi_i(t(i))\})^* ,$$

est bien définie, et est une section du groupe des valeurs de $\prod F_i/\mathcal{U}$.

3. <u>Les propositions élémentaires dans la catégorie</u> $(\mathcal{C})$

Nous en donnons une définition inductive à partir des termes et des formules dans le langage de la catégorie $(\mathcal{C})$.

	Corps	Valuations
termes atomiques	$0 , 1 , x , y$	0 et le terme " $\infty = v(0)$ "
termes généraux	$x + y , xy$	$v(x)$
formules atomiques	$x = y$	$s = t , s < t$

Si $\{R_\alpha(q_i)\}$ est une famille de formules, la négation $(\sim R)$, la conjonction finie $(R_1 \wedge R_2)$, et par conséquent la disjonction

$$(R_1 \vee R_2 \text{ , qui est } \sim (\sim R_1 \wedge \sim R_2)) ,$$

le quantificateur existensiel $(\exists\, q\, R(q , q_i))$ et par conséquent le quantificateur universel $(\forall\, q\, R(q , q_i))$, qui est $\sim \exists\, q , \sim R(q , q_i)$, conduisent à de nouvelles formules.

DÉFINITION 3. - Une proposition élémentaire est une formule dont toutes les variables sont liées (par des quantificateurs). Comme interpréter une formule dans un objet (K , v , π) signifie simplement substituer à ses variables libres des éléments de K , on conclut en vertu de la règle du tiers exclu qu'une propriété élémentaire est, dans K , soit vraie, soit fausse.

<u>Exemple</u> : la propriété $K \in C_i(d)$ est une propriété élémentaire.

<u>Démonstration</u>. - Fixons d , et considérons les formules :

$$R_n(x_1 ,\dots, x_n) = \{\forall\, a_1 ,\dots, a_{m(n)} \sum_{i_1+\dots+i_n=d} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} ,\dots, x_n^{i_n} = 0\}$$

$$P_n(x_1 ,\dots, x_n) = \{x_1 = \dots = x_n = 0\} ,$$

où la première formule est la donnée d'une forme de degré d à n variables, $m(n)$ étant le nombre de coefficients ne dépendants que de n (et de d fixé) nécessaire.

La formule $Q_n = \{\exists\, \xi_1 , \dots , \xi_n(R_n(\xi_1 , \dots , \xi_n) \wedge \sim P_n(\xi_1 , \dots , \xi_n))\}$ ayant toutes ses variables liées, est une propriété élémentaire.

$$Q_n \text{ entraîne } Q_m \text{ par } m \geqslant n .$$

$K \in C_i(d)$, s'écrivant $Q_{[d^i]+1}$, est donc une propriété élémentaire.

La propriété $dd_d(K) = i$ est encore élémentaire : elle s'écrit

$$Q_{[d^i]+1} \wedge (\sim Q_1) \wedge \dots \wedge (\sim Q_{[d^i]}) .$$

Soit (F_i) une famille d'objets de la catégorie $(\mathcal{C})$. $\prod F_i/\mathfrak{D}$ est encore un objet de $(\mathcal{C})$ d'après la proposition 1. Si q^* désigne une famille finie d'éléments de $\prod F_i/\mathfrak{D}$, soit q une famille de leurs représentants dans $\prod F_i$. Alors, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - <u>Pour toute formule</u> R <u>sur la catégorie</u> $(\mathcal{C})$, $\prod F_i/\mathfrak{D}$ <u>vérifie</u> R <u>interprété en</u> $q^* \Longleftrightarrow E_R(q) = \{i \mid F_i$ <u>vérifie</u> R <u>interprété en</u> $q(i)\} \in \mathfrak{D}$.

Démontrons l'implication $\Rightarrow$ par induction sur la compléxité des formules :

(α) <u>Formules atomiques</u> : le théorème ne fait que traduire la définition de l'ultraproduit.

(β) <u>Négation</u> : supposons le théorème vrai pour R , et soit $R' = \sim R$. Si $\prod F_i/\mathfrak{D}$ vérifie R' en q^* , désignons par $E'_{R'}(q)$ le complémentaire de $E_{R'}(q)$ dans I . Supposons $E_{R'}(q) \notin \mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}$ étant un ultrafiltre, $E'_{R'}(q) \in \mathfrak{D}$. Mais $E'_{R'}(q) = E_R(q)$ d'après la règle du tiers exclu, et l'hypothèse d'induction entraîne alors : $\prod F_i/\mathfrak{D}$ vérifie R en q^* , en contradiction avec l'hypothèse.

(γ) <u>Conjonction finie</u> : supposons le théorème vrai pour R_1 et R_2 , et soit $R = R_1 \wedge R_2$. Si $\prod F_i/\mathfrak{D}$ vérifie R en q^* , $F_i/\mathfrak{D}$ vérifie R_1 et R_2 en q^* donc, d'après l'hypothèse d'induction : $E_{R_1}(q)$ et $E_{R_2}(q)$ sont des éléments de $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}$ étant un filtre, $E_{R_1}(q) \cap E_{R_2}(q) = E_R(q)$ appartient encore à $\mathfrak{D}$.

(δ) <u>Quantificateur existensiel</u> : supposons le théorème vrai pour $R(x , y)$, et soit S la formule : $\exists\, x\, R(x , y)$. Soit ξ^* un élément de $\prod F_i/\mathfrak{D}$, où S est vérifiée lorsqu'on interprète y en q^* , et soit ξ un représentant de ξ^* dans $\prod F_i$. D'après l'hypothèse d'induction :

$$\{i \mid F_i \text{ vérifie } R(\xi(i) , y) \text{ interprétée en } q(i)\} \in \mathfrak{D} .$$

Or,

$$\{i \mid F_i \text{ vérifie } R(\xi(i) , y) \text{ en } q(i)\} \subset \{i \mid F_i \text{ vérifie } \exists\, \xi_i\, R(\xi_i , y) \text{ en } q(i)\} .$$

$\mathfrak{D}$ étant un filtre, ce dernier ensemble, qui s'écrit encore :

$$\{i \mid F_i \text{ vérifie } S(x , y) \text{ interprété en } (y = q(i))\} ,$$

est donc encore un élément de $\mathfrak{D}$.

On démontre l'implication $\Leftarrow$ par des procédés similaires (cf. KOCHEN [6]).

Une formule élémentaire, étant soit vraie, soit fausse, dans un objet de $(\mathcal{C})$, on en déduit le corollaire suivant :

THEOREME de Łoś. - <u>Pour toute formule élémentaire</u> R <u>dans</u> $(\mathcal{C})$,

$$\prod F_i/\mathfrak{D} \text{ vérifie } R \Longleftrightarrow \{i \mid F_i \text{ vérifie } R\} \in \mathfrak{D} .$$

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> Φ <u>un morphisme</u> $(K_1 , v_1 , \pi_1) \to (K_2 , v_2 , \pi_2)$ <u>de la catégorie</u> $(\mathcal{C})$. <u>Alors, pour toute formule</u> R ,

$$K_1 \text{ vérifie } R \text{ interprétée en } q \Longleftrightarrow K_2 \text{ vérifie } R \text{ interprétée en } \Phi(q) .$$

Démonstration. - Si $\theta(x_1, \dots, x_n)$ est un terme de corps, la définition du morphisme Φ entraîne :

$$\varphi(\theta(q_1, \dots, q_n)) = \theta(\varphi(q_1), \dots, \varphi(q_n)),$$

où l'on interprète $\theta(q_1, \dots, q_n)$ dans K_1 et $\theta(\varphi(q_1), \dots, \varphi(q_n))$ dans K_2. De même, si $\theta(t_1, \dots, t_n)$ est un terme de valuation, alors :

$$f(\theta(q_1, \dots, q_n)) = \theta(\psi(q_1), \dots, \psi(q_n)),$$

où l'interprétation est effectuée dans les groupes de valeurs.

La proposition se démontre alors trivialement par induction sur la complexité des formules.

COROLLAIRE. - Si R est une formule élémentaire, et si K_1 et K_2 sont isomorphes dans $(\mathcal{C})$, " K_1 vérifie R " $\Longleftrightarrow$ " K_2 vérifie R ".

4. Schéma de la démonstration du théorème d'Ax et Kochen.

Pour tout ultrafiltre non principal $\mathcal{D}$, sur l'ensemble P des nombres premiers, posons

$$K_1 = \prod_P \underset{\sim}{S}_p/\mathcal{D} \text{ valué par } v_1, \text{ ayant } \pi_1 \text{ pour section,}$$

$$K_2 = \prod_P \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{D} \text{ valué par } v_2, \text{ ayant } \pi_2 \text{ pour section.}$$

$\underset{\sim}{S}_p$ et $\underset{\sim}{Q}_p$ sont des objets de la catégorie $(\mathcal{C})$, leur groupe de valeurs est $\underset{\sim}{Z}$, leur corps résiduel $\underset{\sim}{F}_p$. D'après la proposition 1, (K_1, v_1, π_1) et (K_2, v_2, π_2) sont des objets de la catégorie $(\mathcal{C})$, leurs groupes de valeurs sont tous deux isomorphes à $G = \prod_P \underset{\sim}{Z}/\mathcal{D}$, leurs corps résiduels tous deux isomorphes à $k = \prod_P \underset{\sim}{F}_p/\mathcal{D}$. Nous démontrerons, dans le § III. 2, qu'il existe un isomorphisme de la catégorie $(\mathcal{C})$, $\Phi : K_1 \dashrightarrow K_2$.

La propriété $C_2(d)$ étant élémentaire, et vérifiée par tous les $\underset{\sim}{S}_p$ (cf. § I), elle l'est par leur ultraproduit K_1 en vertu du théorème de Łoś, donc par K_2 d'après le corollaire de la proposition 2. Par nouvelle application du théorème de Łoś, on déduit :

$$(*) \qquad \{p \mid \underset{\sim}{Q}_p \in C_2(d)\} = Y(d) \in \mathcal{D}$$

et ceci pour tout ultrafiltre non principal $\mathcal{D}$. Soit $A(d)$ le complémentaire de $Y(d)$ dans P. Si $A(d)$ était infini, il existerait un filtre non principal ayant pour base $A(d)$ et toutes les parties cofinies de P. Désignons par $\mathcal{D}_0$ un ultrafiltre au-dessus de ce filtre. $\mathcal{D}_0$ étant non principal, devrait contenir $Y(d)$ d'après (*), en contradiction avec le fait qu'il contient $A(d)$ par construction. Autrement dit, l'ensemble $A(d)$ des corps $\underset{\sim}{Q}_p$ qui ne vérifient pas la propriété $C_2(d)$ est fini.

Remarque. - On démontre (cf. AX et KOCHEN [3], 2, théorème 9) que la fonction $d \dashrightarrow A(d)$ est récursive, mais on n'en connaît pas d'expression explicite.

III. Le théorème d'isomorphisme

1. Quelques propriétés des ultraproduits.

LEMME 1. - *Si la famille* $\{F_i\}_{i\in I}$ *est composée de corps henséliens,* $\prod F_i/\mathcal{U}$ *est hensélien.*

D'après le théorème de Łoś, il suffit de montrer que la propriété "le corps (K , v) est hensélien" est élémentaire. Elle s'écrit en effet : si $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers de K , et $\overline{K}$ son corps résiduel,

$$\forall\ P , G , H \in \mathcal{O}[X] \text{ tels que } \overline{P} = \overline{G}\,\overline{H} \text{ dans } \overline{K}[X] , \quad \exists\ G' , H' \in \mathcal{O}[X]$$

tels que H' et G' sont premiers entre eux, $\overline{G'} = \overline{G}$, $\overline{H'} = \overline{H}$, $\deg G' = \deg G$, et $P = G'H'$.

(Se donner des polynômes P , G , H , revient à se donner des éléments de $\mathcal{O}$ en nombre fini, et trouver les polynômes G' et H' , revient à trouver des éléments de $\mathcal{O}$, en nombre fini majoré par le degré de P ; la condition de primalité de G' et H' revient à énoncer l'existence des coefficients, en nombre fini majoré par les degrés de G' et de H' , des deux polynômes U et V tels que $UP'+VG'=1$.)

Nous supposerons désormais que I est dénombrable : $I \simeq \mathbb{N}$.

LEMME 2 (On admet l'hypothèse du continu). - *Si* $2^i \leqslant \# F_i \leqslant 2^{\aleph_0}$, *alors* $\# \prod F_i/\mathcal{U} = 2^{\aleph_0}$.

De $\# \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \# \mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$, *on tire* : $\# \prod F_i/\mathcal{U} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Posons : $I_i = \{i$ "premiers" éléments de $I\} \simeq \{1 , \dots , i\}$. Par hypothèse, il existe une application injective de $\mathcal{P}(I_i)$ dans F_i , soit φ_i . Considérons l'application $\varphi : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \prod F_i/\mathcal{U}$, définie par $\varphi(S) = g_S^*$, où g_S^* est la classe de $g_S = (g_S(i) = \varphi_i(S \cap I_i))_{i\in I}$, φ est injective, car si S et I sont deux parties distinctes de I , $S \cap I_i \neq T \cap I_i$ sauf pour un nombre fini de i , d'où

$$g_S(i) \neq g_T(i) \quad \text{p. p. (au sens de l'ultrafiltre } \mathcal{U}\text{),}$$

et $g_S^* \neq g_T^*$. Donc

$$\# \prod F_i/\mathcal{U} \geqslant 2^{\aleph_0} .$$

LEMME 3. - *Si la caractéristique de* F_i *croît vers l'infini avec* i , *la caractéristique de l'ultraproduit* $\prod F_i/\mathcal{U}$ *est nulle.*

Soit e_i l'unité de F_i . Pour d donné, la proposition élémentaire $d.e_i \neq 0$ est vraie preque partout, donc dans l'ultraproduit. Ainsi : $\forall\ d$, caractéristique $(\prod F_i/\mathcal{U}) > d$.

Remarquons que nous détruisons ainsi l'asymétrie existant entre les $\mathbb{Q}_p$ et les $\mathbb{S}_p$ au sujet de leurs caractéristiques.

Nous donnons maintenant une propriété générale des ultraproduits dans $(\mathcal{C})$ (avec toujours l'hypothèse : $I \simeq \underset{\sim}{N}$). Soit λ un ordinal limite, c'est-à-dire un ordinal qui n'admet pas de prédécesseur immédiat (il s'écrit : $\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \alpha$; s'il n'est pas ordinal limite, il s'écrit : $\lambda = \gamma + 1$). Notons ω le premier ordinal limite de cardinal $\aleph_0$.

DÉFINITION 4. - Une famille d'éléments d'un corps valué $\{a_\rho\}$, indexée par des ordinaux, est dite λ-pseudo-complète si :

$$\exists\ \rho_0 \mid v(a_\sigma - a_\rho) < v(a_\tau - a_\sigma) \ , \ \forall\ \rho_0 \leqslant \rho < \sigma < \tau < \lambda \ .$$

Alors, $v(a_\tau - a_\rho) = \inf \{v(a_{\rho+i+1} - a_{\rho+i})\}$ (puisqu'ils sont tous différents), soit $v(a_\tau - a_\rho) = v(a_{\rho+1} - a_\rho)$.

Posons : $v(a_{\rho+1} - a_\rho) = \gamma_\rho$. γ_ρ croît avec ρ , et l'on dit que a est λ-pseudo-limite de $\{a_\rho\}$ si $v(a - a_\rho) = \gamma_\rho$. Si a est λ-pseudo-limite de $\{a_\rho\}$, l'ensemble $\{a + x \mid v(x) > \gamma_\rho\}$ est l'ensemble de toutes les λ-pseudo-limites de $\{a_\rho\}$.

K est dit λ-pseudo-complet si toute famille λ-pseudo-complète admet au moins une λ-pseudo-limite. K est dit pseudo-complet si cette propriété est réalisée pour tout ordinal limite λ .

PROPOSITION 3. - Si le groupe des valeurs est dénombrable, la ω-pseudo-complétude entraîne la pseudo-complétude. Les seules familles λ-pseudo-complètes sont en effet alors les familles ω-pseudo-complètes.

Remarque. - Si K est pseudo-complet, K est complet (une suite de Cauchy contient une famille ω-pseudo-complète), mais la réciproque n'est vraie que pour les valuations de rang 1 . D'après la proposition 3, il suffit en effet d'étudier les familles ω-pseudo-complètes. Ce sont des suites de Cauchy car la condition de croissance de γ_ρ dans $\underset{\sim}{Z}$ entraîne : $\gamma_\rho \dashrightarrow +\infty$.

LEMME 4. - $(\# I = \aleph_0)$ Tout ultraproduit $(\prod F_i/\mathfrak{U} \ , v^*)$ est ω-pseudo-complet.

Démonstration. - Soit $(q_k^*)_{k<\omega}$ une famille ω-pseudo-complète : nous pouvons supposer que $\{q_k(i)\}$ est ω-pseudo-complète dans F_i pour tout $i \in I$. Posons en effet

$$\gamma_k(i) = v_i(q_{k+1}(i) - q_k(i)) \ ; \quad \delta_0(i) = \gamma_0(i) \ ; \quad \delta_{k+1}(i) = \max(\delta_k(i) + 1 \ , \gamma_{k+1}(i)) \ .$$

Donc $\delta_k(i) < \delta_{k+1}(i)$. De $\gamma_k^* < \gamma_{k+1}^*$, on tire $\delta_k(i) = \gamma_k(i)$ p. p.

Définissons maintenant la suite $t_0(i) = q_0(i)$:

$$t_{k+1}(i) = \begin{cases} q_{k+1}(i) & \text{si } v_i(q_{k+1}(i) - t_k(i)) = \delta_k(i) \\ t_k(i) + \omega_k(i) \ , & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\omega_k(i)$ est un élément de F_i tel que $v_i(\omega_k(i)) = \delta_k(i)$.

Par récurrence, on obtient $t_k(i) = q_k(i)$ p. p., et

$$v_i(t_{k+1}(i) - t_k(i) = \delta_k(i) .$$

t_k est donc un représentant convenable de q_k^*. Considérons alors

$$f = \{t_i(i) \text{ dans } F_i\} ,$$

et soit f^* sa classe dans $\prod F_i/\mathfrak{D}$. On a

$$v_i(f(i) - t_k(i)) = v_i(t_i(i) - t_k(i)) = v_i(t_{k+1}(i) - t_k(i)) \quad \text{pour} \quad i > k ,$$

$\{t_k(i)\}_k$ étant ω-pseudo-complet.

Ainsi, $v_i(f(i) - t_k(i)) = v_i(t_{k+1}(i))$ p. p. pour k fixé, soit

$$v^*(f^* - q_k^*) = v^*(q_{k+1}^*(i) - q_k^*(i)) ,$$

et f^* est ω-pseudo-limite de la famille $\{q_k^*\}_{k<\omega}$.

DÉFINITION 5. - Une extension immédiate d'un corps valué (E , v) est un corps valué (F , ω) tel que $E \overset{\subset}{\dashrightarrow} F$, $v(E^\bullet) = \omega(F^\bullet)$, et $\overline{E} = \overline{F}$ (corps résiduels). Un corps est dit maximal s'il n'a pas d'extension immédiate. Un sous-corps F d'un corps K est dit relativement maximal (dans K) s'il n'a pas d'extension immédiate dans K.

Dans le cas d'une valuation de rang 1, on sait que le complété d'un corps hensélien en est l'extension immédiate maximale. KAPLANSKY (cf. [5]) a généralisé cet énoncé sous la forme suivante.

THÉORÈME 2. - Un corps (E , v) est maximal si, et seulement s'il est pseudo-complet (dans sa terminologie, E est dit "maximalement complet").

THÉORÈME 2 bis. - Si la caractéristique de E est nulle, toutes les extensions immédiates maximales de (E , v) sont E-isomorphes.

2. Le théorème d'Ax et Kochen.

THÉORÈME 3. - Soient (K_1 , v_1 , π_1) et (K_2 , v_2 , π_2) deux objets de la catégorie $(\mathcal{C})$, de même cardinal γ, et Λ un ensemble non vide de morphismes de sous-objets de (K_1 , v_1 , π_1) dans des sous-objets de (K_2 , v_2 , π_2) tel que :

(i) $\forall \varphi \in \Lambda , \ \forall a \in K_1 , \ \exists \psi \in \Lambda \mid \psi$ étend φ et $a \in \operatorname{dom} \psi$,

(ii) $\forall \varphi \in \Lambda , \ \forall b \in K_2 , \ \exists \psi \in \Lambda \mid \psi$ étend φ et $b \in \operatorname{dom} \psi$,

(iii) toute chaîne Γ de Λ, de cardinal inférieur à γ, a une extension commune dans Λ.

Alors, (K_1 , v_1 , π_1) et (K_2 , v_2 , π_2) sont isomorphes.

Démonstration. - Interprétant γ comme un ordinal initial, nous pouvons arranger les éléments de K_1 et de K_2 en suite $(a_\eta)_{\eta<\gamma}$ et $(b_\eta)_{\eta<\gamma}$. Par induction sur

η , nous construisons une suite $(\varphi_\eta)_{\eta<\gamma}$ d'isomorphismes $\varphi_\eta \in \Lambda$ tels que :

$$a_\eta \in \operatorname{dom} \varphi_\eta \ , \quad b_\eta \in \operatorname{im} \varphi_\eta \quad \text{et} \quad \varphi_{\eta_2} \quad \text{étend} \quad \varphi_{\eta_1} \quad \text{si} \quad \eta_1 \leqslant \eta_2 \ .$$

Soient en effet $\varphi \in \Lambda$ un morphisme arbitraire, et $\varphi_0 \in \Lambda$ une extension de φ telle que $a_0 \in \operatorname{dom} \varphi_0$, $b_0 \in \operatorname{im} \varphi_0$. Si $\eta = \delta + 1$, soit φ_η une extension de φ_δ telle que $a_\eta \in \operatorname{dom} \varphi_\eta$, $b_\eta \in \operatorname{im} \varphi_\eta$. Si η est un ordinal limite, la chaîne $\{\varphi_\delta\}_{\delta<\eta}$ admet une extension commune dans Λ en vertu de la condition (iii) puisque $\# \eta < \# \gamma$. L'application $\psi : K_1 \to K_2$ où ψ est définie par $\psi(a_\eta) = \varphi_\eta(a_\eta)$, est alors un isomorphisme, encore compatible avec les valuations et les sections.

Nous allons chercher à nous ramener aux conditions de ce théorème. Nous aurons besoin de trois lemmes.

LEMME 5. - <u>Si</u> (K , v , π) <u>est un objet de</u> $(\mathcal{C})$, <u>hensélien de caractéristique</u> 0 , <u>et si son corps résiduel</u> $\overline{K}$ <u>est de caractéristique</u> 0 , $(\overline{K} , 0 , 1)$ <u>est isomorphe à un sous-objet de</u> (K , v , π) .

Il s'agit là d'un théorème classique "d'égale caractéristique" (cf. SERRE [11], II, § 4) : $\overline{K}$ est isomorphe au sous-corps maximal de K , où la valuation est triviale. Nous identifierons $\overline{K}$ à ce sous-objet.

DÉFINITION 6. - Soit G un groupe abélien noté additivement. Un sous-groupe H de G est dit pur dans G , si G/H est sans torsion. Autrement dit :

$$\forall\ s \in G\ ,\quad \exists\ n \mid \ ns \in H \Rightarrow s \in H\ .$$

Soit H un sous-groupe de G . Le plus petit sous-groupe pur dans G , contenant H , est appelé son enveloppe pure $(H|G)$ dans G . On a :

$$(H|G) = \bigcup_n H_n \quad \text{où} \quad H_n = \{s \mid \ \exists\ h \in H\ ,\ \ h = ns\}\ .$$

LEMME 6. - <u>Soient</u> (K , v , π) <u>un objet hensélien de</u> $(\mathcal{C})$, F <u>un sous-objet de</u> K <u>contenant son corps résiduel</u> $\overline{K}$ <u>(alors</u> $\overline{F} = \overline{K}$). <u>Si</u> F' <u>est une extension algébrique maximale de</u> F <u>dans</u> K , $v(F')$ <u>est l'enveloppe pure de</u> $v(F)$ <u>dans</u> $v(K)$. <u>Réciproquement, si</u> $v(F)$ <u>est pur dans</u> $v(K)$ <u>et si</u> F <u>est relativement maximale dans</u> K , F <u>est relativement algébriquement fermé dans</u> K .

<u>Démonstration</u>. - La première partie du lemme découle immédiatement de la méthode du polygone de Newton, qui montre que les éléments de F' ont une valuation du type $-\frac{m}{n}$, où $m \in v(F)$, $n \in \underset{\sim}{N}$ et $\frac{m}{n} \in v(K)$. Réciproquement, si $x \in K$ est algébrique sur F , il existe un entier n tel que $nv(x) \in v(F)$, $v(F)$ étant pur dans $v(K)$, $v(x) \in v(F)$. Mais alors, le corps $F(x)$ a même corps résiduel $\overline{K}$ que F , et vérifie $v(F(x)) = v(F)$. C'est une extension immédiate de F . Celui-ci étant relativement maximal dans K , on a $F(x) = F$ et $x \in F$.

LEMME 7. - Dans les hypothèses du lemme 6, supposons de plus F relativement algébriquement fermé dans K. Alors :

- F est hensélien (et sa valuation s'étend donc de façon unique à sa clôture algébrique F^*, soit encore v),

- on a le lemme d'approximation suivant : $\forall \alpha \in F^*$, $\forall c \in K$,

$$\exists a \in F \mid v(c - a) \geqslant v(c - \alpha) .$$

Esquisse de démonstration.

(α) Soit $h \in F[X]$ tel que, dans $\overline{F}[X] = \overline{K}[X]$, $h = h_1 h_2$. K étant hensélien, h s'écrit $g_1 g_2$ dans $K[X]$. Mais les coefficients de g_1 et g_2 sont des polynômes en les racines de h, donc des éléments de $K \cap F^*$, qui est égal à F, car F est relativement algébriquement fermé dans K.

(β) Les corps $F(\alpha)/F$ et $K(\alpha)/K$ admettent une base commune du type

$$\{\beta_i \gamma_j\}_{i=1,\dots f;j=1,\dots,e}$$

où les β_i sont tels que $\{\overline{\beta_i}\}$ est base de $\overline{F(\alpha)}/\overline{F}$ et les γ_j tels que $v(\gamma_j)$ est un système de représentants de $v(K(\alpha))/v(K)$ dans $v(K)$. On obtient alors le résultat en écrivant $c - \alpha$ dans cette base (cf. RIBENBOIM [8]).

Considérons les objets

$$(K_1 = \prod \underset{\sim}{S}_p/\mathcal{U} , v_1 , \pi_1) \quad \text{et} \quad (K_2 = \prod \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U} , v_2 , \pi_2)$$

de la catégorie $(\mathcal{C})$. Soit φ_0 l'isomorphisme identité de leur corps résiduel commun $k = \prod F_p/\mathcal{U}$. D'après le lemme 1, K_1 et K_2 sont henséliens. Leurs corps résiduels en sont donc des sous-objets, en vertu des lemmes 3 et 5. Dorénavant, nous ne considèrerons que des sous-objets de K_1 et K_2 contenant k. Nous sommes alors dans les hypothèses des lemmes 6 et 7.

K_1 et K_2 ayant même groupe de valeurs $G = \prod \underset{\sim}{Z}/\mathcal{U}$, un morphisme de la catégorie $(\mathcal{C})$ se ramène à un isomorphisme de corps compatible avec les valuations et les sections. Soit alors Λ l'ensemble des extensions isomorphes $F_1 \dashrightarrow F_2$ de φ_0 telles que F_1 (resp. F_2) est un sous-objet (contenant par construction k) de K_1 (resp. K_2) et que $v(F_1^\bullet) = v(F_2^\bullet)$ est un sous-groupe pur dénombrable de G. Comme $\varphi_0 \in \Lambda$, Λ est non vide. Nous allons montrer qu'il satisfait les trois conditions du théorème 3.

(iii) D'après le lemme 2, $\# K_1 = \# K_2 = 2^{\aleph_0}$. Soit Γ une chaîne de Λ de cardinal inférieur à $2^{\aleph_0}$ (autrement dit, finie ou dénombrable, en vertu de l'hypothèse du continu). Une union dénombrable de sous-objets, ayant un groupe de valeurs dénombrable et pur dans G, est encore un sous-objet de ce type. La condition (iii) en résulte.

Du fait de la symétrie des données K_1 et K_2, il suffira de vérifier la condition (i) et le théorème d'isomorphisme en résultera.

PROPOSITION 4. - Soit φ un isomorphisme d'un sous-objet E_1 de (K_1, v_1, π_1) dans un sous-objet E_2 de (K_2, v_2, π_2). Soit J un sous-groupe de G contenant $H = v_1(E_1^\bullet) = v_2(E_2^\bullet)$. Alors, il existe une extension isomorphe

$$\psi : F_1 \to F_2$$

de φ telle que $v_1(F_1^\bullet) = v_2(F_2^\bullet) = J$.

Démonstration. - Posons

$$F_i = E_i(\{\pi_i(\delta)\}_{\delta\in J}, \quad R = E_1[\{\pi_1(\delta)\}_{\delta\in J}],$$

$\{\pi_1(\delta)\}_{\delta\in J}$ étant une partie multiplicative de K, R est un E_1-espace vectoriel, engendré par $\{\pi_1(\delta)\}_{\delta\in J}$.

Soit $x \in R$. $x = \sum_{\delta\in S \text{ fini } \subset J} f(\delta)\,\pi_1(\delta)$, et soient $\delta_1, \dots, \delta_s$ des représentants dans des classes de J/H.

$$x = \sum_{i=1}^{s} \pi_1(\delta_i)\left(\sum_{\delta\in S, \delta-\delta_i\in H} f(\delta)\,\pi_1(\delta-\delta_i)\right) = \sum_{i=1}^{s} \pi_1(\delta_i)\, f_i$$

où les f_i sont des éléments de E_1.

$$v_1(x) \geqslant \inf\,(v_1(\pi(\delta_i)) + v_1(f_i)).$$

Si deux expressions de ce type étaient égales, soit

$$\exists\, j, k \mid \delta_j + v_1(f_j) = \delta_k + v_1(f_k),$$

on obtiendrait $\delta_j - \delta_k \in H$, en contradiction avec le choix des $\{\delta_i\}$. Donc

$$v(x) = \inf\,(\delta_i + v(f_i)) \in J.$$

Ainsi $v(F_1) \subset J$. La réciproque est triviale.

Considérons alors l'application $\psi : F_1 \to F_2$ définie par

$$\psi|_{E_1} = \varphi \quad \text{et pour} \quad x = \sum_S f(\delta)\,\pi_1(\delta) = \sum_{i=1}^{s} \pi_1(\delta_i)\, f_i,$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s} \pi_2(\delta_i)\,\varphi(f_i).$$

Si elle est bien définie, c'est un isomorphisme de corps compatible avec v_i et π_i. Or, si 0 s'écrit, dans K_1, $\sum_{i=1}^{s} \pi_1(\delta_i)\, f_i$, les f_i sont tous nuls, car les $\{\pi_1(\delta_i)\}_{i=1,\dots,s}$ sont linéairement indépendants dans R. Donc $\psi(0) = 0$. $\psi : F_1 \to F_2$ répond donc aux conditions imposées.

Soient alors $\varphi : E_1 \to E_2$ un élément de l'ensemble Λ, et a un élément de K_1. La proposition précédente permet de construire une extension isomorphe de φ : $\psi_0 : F_1 \to F_2$ telle que $v_1(F_1^\bullet) = v_2(F_2^\bullet) = v_1(F_1(a)^\bullet) = J$ soit pur dans G et dénombrable. Pour cela, on construit par récurrence une chaîne $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Λ telle que $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_{n+1} : F_{1n} \to F_{2n}$ étend φ_n, $v_1(F_{1n}(a)^\bullet) \subset v_1(\widetilde{F}_{1n+1}^\bullet)$, et $v_1(F_{1n+1}^\bullet)$ est pur dans G, en appliquant la proposition 4 à φ_n et J_n, enveloppe pure de $v_1(F_{1n}(a)^\bullet)$ dans G. Montrons que J_n est aussi dénombrable, J_{n-1} est pur et dénombrable par hypothèse de récurrence. Si $v_1(F_{1n}(a)^\bullet) \neq v_1(F_{1n})$, soit x un élément de $v_1(F_{1n}(a))$ tel que $\delta = v_1(x) \notin v_1(F_{1n}^\bullet)$. J_{n-1} étant pur, $k\delta \notin v_1(F_{1n})$ pour tout entier non nul, d'où :

$$v_1(F_{1n}(x)^{\bullet}) = v_1(F_{1n}) \oplus \underset{\sim}{Z}\,\delta \ .$$

Ce groupe est dénombrable en vertu de l'hypothèse de récurrence. La définition de l'enveloppe pure, comme union dénombrable de sous-groupe, entraîne alors que son enveloppe pure est dénombrable. Mais $F_{1n}(a)$ étant algébrique sur $F_{1n}(x)$, son groupe de valeurs est, d'après le lemme 6, contenu dans cette enveloppe, donc dénombrable. J_n, enveloppe pure de $v_1(F_{1n}(a)^{\bullet})$ dans G, est ainsi dénombrable. Ainsi :

La condition (iii) du théorème 3 étant réalisée par Λ, la chaîne (φ_n) admet une extension commune ψ_0 :

$$F_1 = \bigcup_n F_{1n} \dashrightarrow F_2 = \bigcup_n F_{2n}$$

définie par $\psi_0|_{F_{1n}} = \varphi_n$. Leur groupe de valeurs (pur et dénombrable) commun est $J = \bigcup_n J_n$.

Vérifions que $v_1(F_1(a)^{\bullet}) = J$. Si $x \in F_1(a)$, $x \in F_{1n}(a)$ pour un certain n, et $v_1(x) \in v_1(F_{1n+1}) = J_n \subset J$.

Soit enfin L_1 une extension immédiate de $F_1(a)$ (donc aussi de F_1) relativement maximale dans K_1, L_2 une extension immédiate de F_2 relativement maximale dans K_2.

L_1 étant relativement maximale dans K_1 hensélien (lemme 1), ayant pour corps résiduel k et pour groupe de valeurs $v(L_1) = v(F_1) = J$, pur dans G, est, d'après le lemme 6, relativement algébriquement fermé dans K_1. Il vérifie donc les conditions du lemme 7. Montrons qu'il est ω-pseudo-complet.

Soit $(q_k)_{k<\omega}$ une famille ω-pseudo-Cauchy dans L_1. K_1 étant ω-pseudo-complet (lemme 4), (q_k) admet une ω-pseudo-limite (q) dans K_1. Si un élément f de L_1 vérifie $v(f - q) > v(f - q_k)$, $\forall\, k$, f est ω-pseudo-limite de (q_k) dans L_1. Sinon, il existe k_c tel qu'on a

(**) $$\forall\, c \in L_1 \ , \quad v(c - q) < v(c - q_{k_c}) \ .$$

Montrons alors que $L_1(q)$ est une extension immédiate de L_1 dans K, ce qui entraîne, d'après la relative maximalité de L_1, $q \in L_1$.

(α) $k = \overline{L}_1$; $\overline{L_1(q)} \subset \overline{K_1} = k \Rightarrow \overline{L_1(q)} = k$.

(β) $v(L_1(q)^{\bullet}) = v(L_1^{\bullet})$. Il suffit de monter $\forall\, h \in L_1[X]$, $v(h(q)) = v(h(q_k))$ pour k assez grand, ce que l'on ramène au cas de facteurs linéaires $X - \alpha$ dans la clôture algébrique L_1^* de L_1. D'après le lemme 7, il existe $c \in L_1$ tel que, pour tout $b \in K_1$, $v(c - b) \geqslant v(b - \alpha)$. En comparant à (**) $v(q - \alpha) < v(c - q_k)$ pour $b = q \in K$, $k = k_c$. Donc :

$$v(q_k - \alpha) = \inf\,(v(q_k - c)\ ,\ v(c - q)\ ,\ v(q - \alpha)) = v(q - \alpha)\ .$$

L_1 étant ω-pseudo-complet, et son groupe de valeurs J dénombrable, L_1 est pseudo-complet (proposition 3), donc absolument maximal, en vertu du théorème 2 de Kaplansky.

On montrerait de même que L_2 est absolument maximal. L_1 et L_2 sont deux extensions maximales de deux corps isomorphes F_1 et F_2 de caractéristique 0. Elles sont donc F_i-isomorphes (théorème 2 bis). L'isomorphisme $\psi : L_1 \dashrightarrow L_2$ ainsi construit étend $\varphi : E_1 \dashrightarrow E_2$ à $a \in K_1$, et appartient à l'ensemble Λ qui vérifie donc la condition (i) du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARMBRUST (M.). - On the theorem of Ax and Kochen, Archiv der Mathematik, t. 22, 1971, p. 55-58.

[2] AX (J.) and KOCHEN (S.). - Diophantine problems over local fields, Amer. J. of Math., t. 87, 1965, p. 605-630.

[3] AX (J.) and KOCHEN (S.). - Decidable fields, Annals of Math., t. 83, 1966, p. 437-456.

[4] GREENBERG (M. J.). - Rational points in henselian discret valuation rings. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 31, p. 59-64).

[5] KAPLANSKY (I.). - Maximal fields with valuations, Duke math. J., t. 9, 1942, p. 313-321.

[6] KOCHEN (S.). - Ultraproducts in the theory of models, Annals of Math., Series 2, t. 74, 1961, p. 221-261.

[7] LANG (S.). - On quasi algebraic closure, Annals of Math., Series 2, t. 55, 1952, p. 378-391.

[8] RIBENBOIM (P.). - La conjecture d'Artin sur les équations diophantiennes. - Kingston, Queen's University, 1968 (Queens Papers on pure and applied Mathematics, 14).

[9] RIBENBOIM (P.). - L'arithmétique des corps. - Paris, Hermann, 1972.

[10] SCHILLING (O. F. G.). - The theory of valuations. - New York, American mathematical Society, 1950 (Mathematical Surveys, 4).

(Texte reçu le 8 mai 1973)

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75230 PARIS CEDEX 05