Jean Bésineau

Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction « somme des chiffres »

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° 23, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 23, 8 p.
15 mai 1972

INDÉPENDANCE STATISTIQUE D'ENSEMBLES LIÉS À LA FONCTION "SOMME DES CHIFFRES"

par Jean BÉSINEAU

Dans ce qui suit, nombre entier signifiera toujours élément de $\underset{\sim}{N}$ (entiers $\geqslant 0$).

Soit $g \geqslant 2$ un entier ; $n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, g^k$ l'écriture de n en base g, les fonctions e_k prenant leurs valeurs dans l'ensemble des chiffres $\{0, 1, \ldots, g-1\}$. Les valeurs $e_k(n) = e_k$ sont les chiffres de n en base g ; ils sont nuls dès que $k > [\log n/\log g]$. Nous écrirons classiquement $n = \overline{e_\ell\, e_{\ell-1} \ldots e_1\, e_0}$.

La "somme des chiffres en base g" est la fonction s_g qui à l'entier n associe

$$s_g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) = \sum_{k=0}^{\ell} e_k .$$

d désignant la densité des ensembles d'entiers, si deux parties A, B de $\underset{\sim}{N}$ vérifient $d(A \cap B) = d(A).d(B)$, nous dirons qu'elles sont "indépendantes".

<u>Résultats connus sur la somme des chiffres</u>. <u>Un problème de Gel'fond</u>. - Michel MENDÈS FRANCE, dans sa thèse [8], démontre que la suite $(\alpha\, s_g(n))$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, α est irrationnel.

Dans [6], A. O. GEL'FOND démontre trois théorèmes dont le suivant : si m et c sont deux entiers, m premier à $g-1$, et $\underset{\sim}{Q}_r$ $(r \geqslant 2)$ l'ensemble des entiers " r-free",

$$\text{card}\{n \leqslant x \ ; \ n \in \underset{\sim}{Q}_r \ , \ s_g(n) \equiv c \pmod m\} = \frac{x}{m\, \zeta(r)} + O(x^\lambda) \quad (\lambda < 1) .$$

Si $A = \{n \ ; \ s_g(n) \equiv c \pmod m\}$, ce résultat s'exprime sous la forme :

$$A \text{ et } \underset{\sim}{Q}_r \text{ sont indépendants ; } d(A \cap \underset{\sim}{Q}_r) = d(A).d(\underset{\sim}{Q}_r) .$$

A la fin de [6], GEL'FOND pose le problème suivant, que nous exprimons ici en termes d'indépendance : Soient g_1, g_2 deux entiers $\geqslant 2$ premiers entre eux,

$$A_1 = \{n \ ; \ s_{g_1}(n) \equiv c_1 \pmod{m_1}\} , \quad A_2 = \{n \ ; \ s_{g_2}(n) \equiv c_2 \pmod{m_2}\} ,$$

où c_1, c_2, m_1, m_2 sont des entiers avec $(m_1, g_1 - 1) = (m_2, g_2 - 1) = 1$. Montrer que :

$$d(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{m_1\, m_2} = d(A_1).d(A_2) .$$

<u>Certains résultats obtenus</u>. <u>Plan de l'exposé</u>. - Le problème précédent sera, en particulier, résolu ici. Il apparaîtra comme cas particulier d'un théorème d'indépendance (théorème 3) qui contient aussi les trois théorèmes établis par GEL'FOND dans [6].

Nous emploierons des techniques de fonctions pseudo-aléatoires (p. a.) . Déjà dans sa thèse, M. MENDÈS FRANCE avait utilisé des fonctions p. a. liées à la somme des chiffres, qui lui avaient permis plus tard [9] de retrouver certains résultats de GEL'FOND.

Dans le § 1, nous définirons les suites d'entiers à caractère presque périodique dont nous donnerons quelques exemples. Dans le § 2, on démontre (théorèmes 1 et 2) que certaines fonctions liées à la somme des chiffres sont pseudo-aléatoires ou périodiques. Dans le § 3 sera démontré un théorème d'indépendance (théorème 3) qui contient les résultats qui sont ensuite analysés. On termine par un résultat d'équirépartition.

Signalons, avant d'entamer cet exposé, le résultat suivant, récemment établi par H. G. SENGE et E. G. STRAUS : L'ensemble des entiers n vérifiant $s_{g_1}(n) \leq A$ et $s_{g_2}(n) \leq B$ (A , B donnés) est fini, si, et seulement si, $\log g_1/\log g_2$ est irrationnel.

1. Ensembles d'entiers à caractère presque-périodique.

Soit $\mathfrak{M}$ l'espace (de Marcinkiewicz-Besicovitch) des fonctions $f : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}$ de valeurs absolues bornées en moyenne, où la B-norme est définie par

$$\|f\| = \limsup_N \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |f(k)|$$

(De fait il s'agit seulement d'une semi-norme qui devient une norme dans $\mathfrak{M}/\Omega$, où Ω est l'ensemble des f telles que $\|f\| = 0$).

On peut démontrer que $\mathfrak{M}$ est B-complet .

La partie $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{M}$, constituée des fonctions caractéristiques des ensembles d'entiers, $\chi : \underset{\sim}{N} \to \{0 , 1\}$,est un sous-espace B-complet de $\mathfrak{M}$.

Nous dirons que l'ensemble $A \subset \underset{\sim}{N}$ (ou la suite (strictement croissante) A) est à caractère presque périodique (c. p. p.) si sa fonction caractéristique χ est B-presque périodique (B. p. p.) (c'est-à-dire appartient à la B-adhérence de l'ensemble des polynômes trigonométriques (sommes finies $\sum a_\lambda e^{i\lambda n}$, $a_\lambda \in \underset{\sim}{C}$, $\lambda \in \underset{\sim}{R}$)).

Puisqu'une fonction B. p. p. a une moyenne, une suite c. p. p. a une densité (moyenne de sa fonction caractéristique).

Exemples d'ensembles c. p. p.

(a) Citons d'abord les progressions arithmétiques et leurs réunions finies, car leur fonction caractéristique est périodique.

Le fait que $\sup(\chi , \chi')$, $\inf(\chi , \chi')$, $1 - \chi$ sont B. p. p. si χ et χ'

le sont, montre que la réunion et l'intersection de deux ensembles c. p. p. , le complémentaire d'un ensemble c. p. p. sont eux-mêmes c. p. p.

(b) Soit $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ une suite d'entiers telle que $\sum 1/a_n < +\infty$. Soient A l'ensemble des multiples des a_i , A_n l'ensemble des multiples de a_1 , a_2 , ... , a_n , χ et χ_n les fonctions caractéristiques de A et A_n respectivement. On démontre, sans difficultés, que $\|\chi - \chi_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/a_k$; donc $\|\chi - \chi_n\| \to 0$ si $n \to \infty$. Par suite, χ est B. p. p. puisque χ_n est périodique. Donc A est c. p. p. , de densité $d(A) = \lim_n d(A_n)$.

Si $a_n = p_n^r$ $(r \geqslant 2)$, où p_n est le n-ième nombre premier, le complémentaire de A est $\underset{\sim}{Q}_r$, l'ensemble des entiers "r-free", qui par suite est c. p. p.

On peut démontrer qu'un "ensemble de multiples" est c. p. p. si, et seulement si, il a une densité (ce qui n'est pas toujours le cas (BESICOVITCH)).

(c) Signalons enfin que l'ensemble G suivant, utilisé par GEL'FOND, dans son théorème III de [6], est c. p. p. : Soient $r \geqslant 2$, $k \geqslant 1$ deux entiers, G est l'ensemble des entiers n tels que n , $n+1$, ... , $n+k$ soient r-free.

<u>Suites d'entiers c. p. p. et suites réelles pseudo-aléatoires</u>. - On peut démontrer, que si $f : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}$ est pseudo-aléatoire bornée et si φ est B. p. p. , le produit $f\varphi$ est de moyenne nulle.

Soit (u_n) une suite p. a. [3], c'est-à-dire telle que chaque fonction

$$n \longmapsto \exp(2i\pi q u_n) \quad (q \text{ entier} \geqslant 1) \text{ .}$$

soit p. a. (C'est le cas en particulier des suites qui obéissent au critère de VAN DER CORPUT). Si (m_k) est une suite c. p. p. de fonction caractéristique χ , les fonctions $n \mapsto \chi(n) \exp(2i\pi q u_n)$ sont de moyenne nulle. On en déduit, par application du critère de Weil, le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - <u>Si</u> (u_n) <u>est une suite p. a.</u> , (m_k) <u>une suite d'entiers c. p. p. de densité</u> > 0 , <u>la sous-suite</u> $k \longmapsto u_{m_k}$ <u>de</u> (u_n) <u>est équirépartie modulo 1</u> .

2. Des fonctions pseudo-aléatoires ou périodiques liées à la "somme des chiffres".

Soient α , α_1 , ... , α_ν des nombres réels, g , g_1 , ... , g_ν des nombres entiers $\geqslant 2$, f , f_1 , ... , f_ν les fonctions définies par $f(n) = \exp(2i\pi\alpha s(n))$ $f_j(n) = \exp(2i\pi\alpha_j s_j(n))$, où s , s_1 , ... , s_ν sont les sommes des chiffres en base g , g_1 , ... , g_ν respectivement.

THÉORÈME 1. - <u>La fonction</u> $f(n) = e^{2i\pi\alpha s(n)}$ <u>est pseudo-aléatoire si</u> $\alpha(g-1)$

est non entier, périodique dans le cas contraire (et alors de moyenne 1 ou 0 suivant que α est entier ou non).

THÉORÈME 2. - Si g_1 , g_2 , ... , g_ν sont deux à deux premiers entre eux, la fonction $(f_1 f_2 \dots f_\nu)(n) = \prod_{j=1}^{\nu} \exp(2i\pi\alpha_j s_j(n))$ ~~est~~ p. a. si l'un au moins des $\alpha_j(g_j - 1)$ est non entier, périodique dans le cas contraire (et alors de moyenne 1 ou 0 suivant que $\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu$ est entier ou non).

Rappelons qu'une fonction est p. a. si elle a une fonction de corrélation γ_f ($\gamma_f(p) = \lim_N 1/N \sum_{k=1}^{N} \overline{f(k)}\, f(k + p)$) et si γ_f est de moyenne quadratique nulle:

$$M(|\gamma_f|^2) = \lim_N 1/N \sum_{k=1}^{N} |\gamma_f(k)|^2 = 0 .$$

La démonstration du théorème 1 est longue ; elle peut se faire à partir d'une relation de récurrence vérifiée par γ_f : nous renvoyons à [5].

Montrons comment le théorème 2 peut être établi à partir du théorème 1.

LEMME 1. - Soient $g \geqslant 2$ et s la somme des chiffres en base g ; p étant un entier donné, il existe une partition de $\underset{\sim}{N}$ en progressions arithmétiques P_m , $m \geqslant 1$, dont les raisons sont des puissances de g , et telles que $s(k+p)-s(k)=\lambda_m$ reste constant si k décrit P_m .

Le principe de la démonstration de ce lemme se voit bien en prenant le cas simple $p = 1$. Ecrivons en effet $k = \overline{e_\ell \dots e_1 e_0}$. Si $0 \leqslant e_0 \leqslant g - 2$,

$$k + 1 = \overline{e_\ell \dots e_1(e_0 + 1)} ,$$

et par suite $s(k + 1) - s(k) = 1$. Donc si k est dans l'une des progressions $e_0 + g\underset{\sim}{N}$, $0 \leqslant e_0 \leqslant g - 2$, $s(k + 1) - s(k)$ vaut 1 .

On examine le cas où k s'écrit $\overline{e_\ell \dots e_1(g - 1)}$, avec $0 \leqslant e_1 \leqslant g - 2$ et de façon générale $k = \overline{e_\ell \dots e_h(g - 1) \dots (g - 1)}$, $0 \leqslant e_h \leqslant g - 2$. A ce moment, $k + 1 = \overline{e_\ell \dots (e_h + 1)\, 0 \dots 0}$ et $s(k + 1) - s(k) = 1 - h(g - 1)$. Donc si k est dans l'une des progressions $\overline{e_h(g - 1) \dots (g - 1)} + g^{h+1}\underset{\sim}{N}$, $(0 \leqslant e_h \leqslant g - 2)$, $s(k + 1) - s(k) = 1 - h(g - 1)$ est constant.

Il est facile de voir que l'ensemble des progressions mises en évidence constitue une partition de $\underset{\sim}{N}$, ce qui établit le lemme 1 pour $p = 1$.

Si $f(n) = \exp(2i\pi\alpha s(n))$, partant de la formule

$$\gamma_f(p) = \lim_N 1/N \sum_{k=1}^{N} \overline{f(k)}\, f(k + p) = \lim_N 1/N \sum_{k=1}^{N} \exp\big(2i\pi\alpha(s(k+p) - s(k))\big) .$$

On peut à partir du lemme 1 établir le lemme 2.

LEMME 2. - $\{P_m \; ; \; m \geqslant 1\}$ *étant la partition définie par le lemme 1, la corrélation de* f *au point* p *est donnée par*

$$\gamma_f(p) = \sum_{m\geqslant 1} d(P_m) \exp(2i\pi\alpha\lambda_m) .$$

De façon analogue, si $f_1(n) = \exp(2i\pi\alpha_1 s_1(n))$, $f_2(n) = \exp(2i\pi\alpha_2 s_2(n))$, où s_1 et s_2 sont les sommes des chiffres en bases g_1 et g_2 respectivement, à partir de

$$\gamma_{f_1 f_2}(p) = \lim_N 1/N \sum_{k=1}^{N} \exp(2i\pi\alpha_1(s_1(k+p) - s_1(k)))\exp(2i\pi\alpha_2(s_2(k+p) - s_2(k)))$$

on établit le lemme 3 :

LEMME 3. - *Soient* $\{P_m \; ; \; m \geqslant 1\}$, $\{Q_n \; ; \; n \geqslant 1\}$ *les partitions correspondant à* p , *comme dans le lemme 1, pour* s_1 *et* s_2 *respectivement,* λ_m (resp. μ_n) *la valeur constante de* $s_1(k+p) - s_1(k)$ (resp. $s_2(k+p) - s_2(k)$) *si* k *décrit* P_m (resp. Q_n) , *la corrélation de* $f_1 \, f_2$ *au point* p *est donnée par*

$$\gamma_{f_1 f_2}(p) = \sum_{m,n} d(P_m \cap Q_n) \exp(2i\pi\alpha_1\lambda_m)\exp(2i\pi\alpha_2\mu_n) .$$

Supposons de plus, que g_1 et g_2 sont premiers entre eux. Les raisons de P_m et Q_n , qui sont des puissances de g_1 et g_2 respectivement, sont des nombres premiers entre eux ; donc $d(P_m \cap Q_n) = d(P_m).d(Q_n)$. Par suite

$$\gamma_{f_1 f_2}(p) = \sum_{m,n} d(P_m).d(Q_n) \exp(2i\pi\alpha_1\lambda_m)\exp(2i\pi\alpha_2\mu_n) = \gamma_{f_1}(p).\gamma_{f_2}(p) .$$

D'où le lemme suivant.

LEMME 4. - *Si* g_1 , g_2 *sont premiers entre eux,*

$$\gamma_{f_1 f_2} = \gamma_{f_1} . \gamma_{f_2} .$$

Démonstration du théorème 2 pour $\nu = 2$. - Tenant compte du fait que

$$|\gamma_{f_1 f_2}(p)| \leqslant 1 ,$$

on peut écrire, en utilisant le lemme 4, si $\overline{M}$ est la moyenne supérieure

$$(\overline{M} \, |\gamma_{f_1 f_2}|^2) \leqslant (\overline{M} \, |\gamma_{f_1 f_2}|)^2 = (\overline{M} \, |\gamma_{f_1}|.|\gamma_{f_2}|)^2 \leqslant \overline{M} \, |\gamma_{f_1}|^2 . \overline{M} \, |\gamma_{f_2}|^2 .$$

(la dernière inégalité étant due à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Donc, si l'une des fonctions f_1 , f_2 est p. a. , c'est-à-dire si l'un des nombres $\alpha_1(g_1 - 1)$, $\alpha_2(g_2 - 1)$ est non entier, $f_1 \, f_2$ est aussi p. a.

Si $\alpha_1(g_1 - 1) = m_1$ et $\alpha_2(g_2 - 1) = m_2$ sont entiers, comme on sait que $s_1(n) \equiv n \pmod{(g_1 - 1)}$ et $s_2(n) \equiv n \pmod{(g_2 - 1)}$, on établit aisément que

$$(f_1 \, f_2)(n) = \exp(2i\pi(m_1/g_1 - 1)n)\exp(2i\pi(m_2/g_2 - 1)n) = \exp(2i\pi(\alpha_1 + \alpha_2)n)$$

qui est périodique de moyenne 1 ou 0 suivant que $\alpha_1 + \alpha_2$ est entier ou non. Ceci termine la démonstration du théorème 2 pour $\nu = 2$.

La démonstration du théorème 2, pour $\nu > 2$, se fait aisément à partir de l'énoncé suivant qui généralise le lemme 4 (et dont la démonstration est immédiate), si g_1 , g_2 , ... , g_ν sont deux à deux premiers entre eux

$$\gamma_{f_1 f_2 \dots f_\nu} = \gamma_{f_1} \cdot \gamma_{f_2} \cdot \ \dots \ \cdot \gamma_{f_\nu} .$$

3. Résultats d'indépendance et d'équirépartition.

Soient g_1 , g_2 , ... , g_ν , ν entiers premiers entre eux deux à deux, c_1 , ... , c_ν , m_1 , ... , m_ν des entiers tels que $(m_j\ ,\ g_j - 1) = 1$, $j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ \nu$, A_j les ensembles $\{n\ ;\ s_j(n) \equiv c_j \pmod{m_j}\}$, E un ensemble c. p. p.

THÉORÈME 3. - Les ensembles E , A_1 , ... , A_ν sont indépendants :

$$d(E \cap A_1 \cap \dots \cap A_\nu) = d(E).d(A_1). \ \dots \ .d(A_\nu) = d(E)/m_1.m_2 \dots m_\nu .$$

Démonstration. - Le théorème 2 permet d'affirmer que les fonctions

$$n \longmapsto \exp(2i\pi(k_1/m_1)s_1(n)) \dots \exp(2i\pi(k_\nu/m_\nu)s_\nu(n))$$

sont p. a. si $0 \leqslant k_1 \leqslant m_1 - 1$, ... , $0 \leqslant k_\nu \leqslant m_\nu - 1$, $(k_1, \dots, k_\nu) \neq (0, \dots, 0)$. Leur produit par la fonction caractéristique χ de E (χ est B. p. p.) est donc de moyenne nulle ; d'où les $m_1 m_2 \dots m_\nu - 1$ relations

$$1/N \sum_{n=1}^{N} \chi(n) \exp(2i\pi(k_1/m_1)s_1(n)) \dots \exp(2i\pi(k_\nu/m_\nu)s_\nu(n)) \to 0 .$$

Multipliant ces relations respectivement par :

$$\exp-(2i\pi(k_1/m_1)c_1) \dots \exp-(2i\pi(k_\nu/m_\nu)c_\nu) ,$$

on obtient

$$1/N \sum_{n=1}^{N} \chi(n) \exp(2i\pi(k_1/m_1)(s_1(n) - c_1)) \dots \exp(2i\pi(k_\nu/m_\nu)(s_\nu(n) - c_\nu)) \to 0 .$$

Comme d'autre part $1/N \sum_{n=1}^{N} \chi(n) \to d(E)$, on a, en sommant membre à membre les $m_1 m_2 \dots m_\nu$ relations obtenues, si χ_{A_j} est la fonction caractéristique de A_j et M l'opérateur moyenne,

$$m_1 m_2 \dots m_\nu M(\chi \chi_{A_1} \dots \chi_{A_j}) = d(E) ,$$

c'est-à-dire $d(E \cap A_1 \cap \dots \cap A_\nu) = d(E)/m_1 m_2 \dots m_\nu$.

Faisant dans cette relation $E = \underset{\sim}{N}$, $m_k = 1$ pour $k \neq j$, il vient $d(A_j) = \frac{1}{m_j}$. Cette dernière affirmation combinée avec le résultat précédent démontre entièrement le théorème 3.

Analyse des résultats.

(a) Une seule base intervient. - Si l'on fait

$$\nu = 1 \ , \quad g_1 = g \ , \quad A = \{n \ ; \quad s_g(n) \equiv c \pmod m\} \ ,$$

on a, si $(m \ , \ g-1) = 1$, l'indépendance :

$$d(E \cap A) = d(E).d(A) = d(E)/m \ .$$

Ce théorème traduit, pour $E = a\underset{\sim}{N} + b$ ($a > 0$, $b \geq 0$ entiers), $\underset{\sim}{Q}_r$, G (cf. 1 (a) (b) (c)), les théorèmes I, II, III de GEL'FOND dans [6].

Si m et $g - 1$ ne sont pas premiers entre eux, certaines des fonctions intervenant dans la démonstration du théorème 3 ne sont pas p. a. ; cependant on peut aisément évaluer leur moyenne même si on les multiplie par la fonction caractéristique de $a\underset{\sim}{N} + b$. On peut obtenir les résultats suivants :

si $(a \ , \ m \ , \ g-1) = 1$: $d((a\underset{\sim}{N} + b) \cap A) = d(a\underset{\sim}{N} + b).d(A) = 1/am$,

si $(a \ , \ m \ , \ g-1) = \delta > 1$,

si $b - c \not\equiv 0 \pmod \delta$: $(a\underset{\sim}{N} + b) \cap A = \emptyset$,

si $b - c \equiv 0 \pmod \delta$: $d((a\underset{\sim}{N} + b) \cap A) = \delta.d(a\underset{\sim}{N} + b).d(A) = \delta/am$.

(b) Deux ou plusieurs bases interviennent. - Exprimons par exemple le théorème $d(\underset{\sim}{Q}_2 \cap A_1 \cap A_2) = 1/m_1 m_2 \zeta(2)$: l'ensemble des entiers n "square free", tels que $s_{g_1}(n) \equiv c_1 \pmod{m_1}$, $s_{g_2}(n) \equiv c_2 \pmod{m_2}$ avec

$$(g_1 \ , \ g_2) = (m_1 \ , \ g_1 - 1) = (m_2 \ , \ g_2 - 1) = 1 \ ,$$

a une densité qui vaut $6/m_1 m_2 \pi^2$.

Si $E = \underset{\sim}{N}$, $\nu = 2$, le théorème 3 se traduit par l'énoncé suivant : On a $d(A_1 \cap A_2) = d(A_1).d(A_2)$ si $(g_1 \ , \ g_2) = (m_1 \ , \ g_1 - 1) = (m_2 \ , \ g_2 - 1) = 1$. C'est la solution du problème de Gel'fond dont nous avons parlé au début de cet exposé.

De façon plus générale, si $g_1 \ , \ g_2 \ , \ \dots \ , \ g_\nu$ sont deux à deux premiers entre eux, on peut (en suivant une remarque analogue à celle de la première partie du paragraphe (a) précédent) établir que, si $(m_j \ , \ g_j - 1) = \delta_j$, l'indépendance

$$d(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) = d(A_1). \ \dots \ .d(A_\nu)$$

a lieu si, et seulement si, les δ_j sont premiers entre eux deux à deux.

En particulier ($\nu = 2$) : si $(g_1 \ , \ g_2) = 1$, l'indépendance

$$d(A_1 \cap A_2) = d(A_1).d(A_2)$$

a lieu si, et seulement si, les quatre nombres m_1 , m_2 , $g_1 - 1$, $g_2 - 1$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

(c) Toujours sous la même condition, g_1 , g_2 , ... , g_ν sont premiers entre eux deux à deux, on peut, à l'aide de la proposition 1, établir le résultat suivant :

Soit (q_n) une suite d'entiers c. p. p. de densité > 0 ; la suite

$$n \longmapsto \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j s_j(q_n)$$

est équirépartie modulo 1 , si, et seulement si, l'un au moins des α_j est irrationnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (J.). - Espaces de Besicovitch, Fonctions presque périodiques, Fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 39-61.

[2] BERTRANDIAS (J.-P.). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p , Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 5, 1966, p. 1-106 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[3] BERTRANDIAS (J.-P.). - Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1 , Compositio Math., Groningen, t. 16, 1964, p. 23-28.

[4] BÉSINEAU (J.). - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction "somme des chiffres", C. R. Ac. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 453-456.

[5] BÉSINEAU (J.). - Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres", Acta Arithmetica, Warszawa, t. 20, 1972, p. 401-416.

[6] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.

[7] MARCINKIEWICZ (J.). - Une remarque sur les espaces de Besicovitch, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 208, 1939, p. 157-159.

[8] MENDÈS FRANCE (M.). - Nombres normaux, Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, J. Analyse math., Jerusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[9] MENDÈS FRANCE (M.). - La fonction "somme des chiffres" et autres fonctions analogues, Une caractérisation des nombres de Pisot, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, exposé n° 8, 10 p.

(Texte reçu le 22 novembre 1972)

Jean BÉSINEAU
Université de Pau
Mathématiques
Boîte postale 290
64016 PAU