Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Transcendance et indépendance algébrique des valeurs de fonctions méromorphes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 1 (1971-1972), exp. nº 5, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 5, 9 p.

29 novembre 1971

TRANSCENDANCE ET INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DES VALEURS DE FONCTIONS MÉROMORPHES

par Michel WALDSCHMIDT

Après avoir rappelé un théorème de Schneider sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes satisfaisant une équation différentielle, nous introduisons la définition de "suites pondérées", généralisant la notion de "weighted sequences" qui permit à RAMACHANDRA d'obtenir des résultats de transcendance concernant des fonctions algébriquement additives ; nous pourrons alors étudier l'indépendance algébrique des valeurs de fonctions méromorphes, grâce à la notion de type de transcendance d'un corps.

1. Introduction. Théorème de Schneider.

En 1949, SCHNEIDER, remarquant que toutes les démonstrations de transcendance que l'on avait effectuées avec la méthode de Gel'fond avaient de nombreux points communs, réussit à regrouper ces propriétés en un théorème général sur les conditions arithmétiques pour la dépendance algébrique de fonctions.

Suivant la définition de LANG [7], nous dirons qu'une fonction entière f est d'ordre inférieur ou égal à ρ, s'il existe deux constantes positives C et R_0 telles que

$$\log \sup_{|z|=R} |f(z)| \leqslant CR^{\rho} \quad \text{pour} \quad R \geqslant R_0 ,$$

ce que nous noterons (notation de VINOGRADOV) :

$$\log \sup_{|z|=R} |f(z)| \ll R^{\rho} .$$

Une fonction méromorphe est d'ordre inférieur ou égal à ρ, si elle est quotient de deux fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à ρ.

THÉORÈME de Schneider. - *Soient K un corps de nombres, $f_1 , \dots , f_d$ des fonctions méromorphes d'ordre inférieur ou égal à ρ. On suppose que f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, et que la dérivation opère sur le corps $K(f_1 , \dots , f_d)$. Alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres complexes w tels que $f_i(w) \in K$ pour $i = 1 , \dots , d$.*

Cet énoncé peut être complété par une majoration du nombre m de $w \in \mathbb{C}$ pour lesquels $f_i(w) \in K$, $i = 1 , \dots , d$. Une telle majoration a été donnée par SCHNEIDER [11], LIPMAN [9], LANG [6], [7] (voir aussi l'appendice de son livre "Algebra"), et le meilleur résultat actuellement connu : $m \leqslant 2\rho[K : \mathbb{Q}] + 1$ est dû à BOMBIERI [1] (voir aussi [8]) qui a étendu ce théorème aux fonctions de plusieurs variables.

Le théorème de Schneider contient la transcendance de e^{α} pour α algébrique non nul (HERMITE-LINDEMANN), la trancendance de a^b pour a et b algébriques, $a \neq 0$, $a \neq 1$, et b irrationnel (GEL'FOND-SCHNEIDER), ainsi que de nombreux résultats de SCHNEIDER sur les fonctions elliptiques :

Soient $\wp$ et $\wp^*$ deux fonctions elliptiques de Weierstrass dont les invariants g_2 , g_3 , g_2^* , g_3^* sont algébriques ; soient a , b , α , β des nombres algébriques $(a , b) \neq (0 , 0)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, et soit $t \in \mathbb{C}$. On suppose que les deux fonctions $\wp(z)$ et $\wp^*(\beta z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. Alors,

1° L'un des deux nombres $\wp(t)$, $at + b\zeta(t)$ est transcendant ou infini (ζ étant la fonction zéta de Weierstrass associée à $\wp$),

2° L'un des deux nombres $\wp(t)$, $\wp^*(\beta t)$ est transcendant ou infini,

3° L'un des nombres $\wp(t)$, $e^{\alpha t}$ est transcendant ou infini.

Le théorème de Schneider est le meilleur possible si l'on tient compte des remarques suivantes :

- Les deux fonctions t , $e^{Q(t)}$ prennent des valeurs algébriques pour tous les zéros du polynôme $Q(t)$ à coefficients algébriques ([7], p. 22) ;

- Les fonctions t , e^t , e^{t^2} , ..., prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Q}(e)$ pour toute valeur entière de t ([7], p. 41) ;

- Les fonctions 2^t , 3^t , 5^t , ... prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Q}$ pour toute valeur entière de t .

Le dernier exemple montre que, si la dérivation n'opère pas sur le corps $K(f_1 , \dots , f_d)$, le nombre de points $w \in \mathbb{C}$, pour lesquels $f_i(w) \in K$ peut être infini ; le seul résultat que l'on puisse espérer concerne alors leur répartition dans $\mathbb{C}$ (il en est de même si on supprime l'hypothèse que K est un corps de nombres pour la remplacer, par exemple, par $K = \mathbb{Q}(e)$). Cependant, le théorème sur la transcendance de a^b , qui avait été obtenu par GEL'FOND grâce aux fonctions e^z , e^{bz} , avait été démontré simultanément, et indépendamment, par SCHNEIDER avec les fonctions z et $a^z = \exp(z \log a)$, qui ne vérifient pas d'équation différentielle à coefficients algébriques. Une généralisation de cette méthode devait permettre à LANG et à RAMACHANDRA (indépendamment) d'obtenir une majoration de la densité (en un sens précisé plus loin) des points algébriques communs à f_1 , ... , f_d , sans supposer que les fonctions considérées satisfont une équation différentielle.

RAMACHANDRA utilise la notion de "weighted sequences", tandis que LANG définit l' "ordre arithmétique d'une fonction", qui lui permet également d'énoncer un résultat dans le cas où K est une extension de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance inférieur ou égal à τ (mais la démonstration du théorème 2, chap. V, § 3 de [7] comporte une erreur dans l'estimation du nombre d'équations). La définition de "suites pondérées", qui contient les deux notions précédentes, nous permettra d'étendre à la fois le théorème de Schneider et celui de Ramachandra aux extensions de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance fini. Nous verrons enfin que, en ajoutant des conditions analytiques sur les fonctions $f_1, \dots, f_d$, on peut obtenir des résultats concernant en particulier les extensions de $\underset{\sim}{Q}$ de degré de transcendance 1.

2. Taille, type de transcendance et suites pondérées.

(A) Définition de la taille.

La notion de taille, généralement utilisée pour les nombres algébriques, peut être étendue aux sous-corps de $\underset{\sim}{C}$ de type fini sur $\underset{\sim}{Q}$. On prodéde de la manière suivante :

Taille d'un polynôme. - Soit Ω un corps muni d'une valeur absolue, et soit $P \in \Omega[X_1, \dots, X_q]$ un polynôme non nul de degré r_i par rapport à X_i :

$$P = \sum_{\ell_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\ell_q=0}^{r_q} p(\ell_1, \dots, \ell_q) X_1^{\ell_1} \dots X_q^{\ell_q} = \sum_{(\ell)} p(\ell) X^{(\ell)} ,$$

où $p(\ell_1, \dots, \ell_q) = p(\ell)$. On écrit $\|P\| = \max_{(\ell)} |p(\ell)|$.

On définit la taille de P par

$$t(P) = \max(r_1, \dots, r_q, \log \|P\|) .$$

Taille sur une extension de $\underset{\sim}{Q}$ de type fini. - Soient Ω un corps de caractéristique nulle muni d'une valeur absolue, K un sous-corps de Ω de type fini sur $\underset{\sim}{Q}$ $q \geqslant 0$ le degré de transcendance de K sur $\underset{\sim}{Q}$.

Il existe des éléments $x_1, \dots, x_q, y$ de K (système générateur de K sur $\underset{\sim}{Q}$) tels que $K = \underset{\sim}{Q}(x_1, \dots, x_q, y)$, avec $x_1, \dots, x_q$ algébriquement indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$, et y entier sur $\underset{\sim}{Z}[x_1, \dots, x_q]$.

Soit $\delta = [K : \underset{\sim}{Q}(x_1, \dots, x_q)]$ le degré de y.

Si $\alpha \in \underset{\sim}{Z}[x_1, \dots, x_q, y]$, α s'écrit de manière unique :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\delta-1} a_i y_i , \text{ avec } a_i \in \underset{\sim}{Z}[x_1, \dots, x_q] , \quad 1 \leqslant i \leqslant q .$$

On définit alors la taille de α par

$$t(\alpha) = \max_{0 \leqslant i \leqslant \delta-1} t(a_i) .$$

Endin, si $\alpha \in K$, α s'écrit de manière unique

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\delta-1} (a_i/b_i) y_i ,$$

où, pour $i = 1, \dots, \delta - 1$, a_i et b_i sont deux éléments de $\underset{\sim}{Z}[x_1, \dots, x_q]$ sans facteur communs. Soit c le p. p. c. m. des polynômes $b_0, \dots, b_{\delta-1}$ (on dira que c est un dénominateur de α), et soit $\beta = c\alpha$. Alors

$$\beta \in \underset{\sim}{Z}[x_1, \dots, x_q, y] .$$

On définit la taille de α par

$$t(\alpha) = \max(t(\beta), t(c)) .$$

La fonction t, ainsi définie sur K, dépend du système de générateur $(x_1, \dots, x_q, y)$ choisi, mais on constate facilement que, si $(x'_1, \dots, x'_q, y')$ est un autre système de générateurs de K avec lequel on définit une taille t', il existe une constante C positive telle que, pour tout $\alpha \in K$, on ait

$$t'(\alpha) \leq Ct(\alpha) .$$

(B) Type de transcendance.

Soient Ω un coprs de caractéristique zéro muni d'une valeur absolue, et K un sous-corps de Ω de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$. On dira que K a un type de transcendance sur $\mathbb{Q}$ inférieur ou égal à τ s'il existe une base de transcendance $(x_1, \ldots, x_q)$ de K sur $\mathbb{Q}$ et une constante C positive telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_q)$, on ait

(1) $$- t(\alpha)^\tau \leq C \log |\alpha| .$$

On démontre alors que, pour tout sous-corps L de K de type fini sur $\mathbb{Q}$, il existe une constante C_L positive telle que, pour tout $\alpha \in L$, on ait

$$- t_L(\alpha)^\tau \leq C_L \log |\alpha| ,$$

où t_L est la taille définie sur L à partir d'un système générateur quelconque de L (la constante C_L dépend de ce système générateur).

Ainsi la notion de type de transcendance est intrinsèque et ne dépend que du corps K (et non de la base de transcendance $(x_1, \ldots, x_q)$ choisie pour la relation (1)).

Notons que, dans le cas où la valeur absolue sur Ω coincide sur $\mathbb{Q}$ avec la valeur absolue ordinaire, alors un corps de nombres a un type de transcendance inférieur ou égal à 1 sur $\mathbb{Q}$. D'autre part, si K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$ et si q est le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$, alors $\tau \geq q + 1$ (ceci se démontre à partir du principe de Dirichet [7]).

(C) Suites pondérées.

Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions méromorphes, algébriquement indépendantes sur K, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1, \ldots, \rho_d$ respectivement. On pose $\rho = (\rho_1 + \ldots + \rho_d)/d$. Soient λ un réel positif, et (S_n) une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$. On dira que (S_n) est une suite pondérée relative au corps K et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$, de densité supérieure ou égale à $\lambda\rho$, si

1° Il existe un sous-corps L de K, de type fini sur $\mathbb{Q}$, tel que

$$f_i(S_n) \subset L \quad \text{et} \quad \max_{z \in S_n} t(f_i(z)) \ll n^{\rho_i} , \quad i = 1, \ldots, d .$$

2° Pour tout $i = 1, \ldots, d$, il existe une fonction entière h_i, sans zéro dans $S - \cup S_n$, telle que $h_i f_i$ est entière, et

$$\max_{z \in S_n} \log |1/h_i(z)| \ll n^{\rho_i} .$$

3° Pour $n \longrightarrow \infty$, on a

$$\operatorname{card} S_n \gg n^{\lambda\rho} \quad \text{et} \quad \max_{z \in S_n} |z| \ll n .$$

Exemples. - Soient $x_1, \dots, x_d$ (resp. $y_1, \dots, y_\ell$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

(a) Soit L le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les ℓd nombres $\exp(x_i y_j)$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, \ell$. Soit S_n l'ensemble des nombres

$$a_1 y_1 + \dots + a_\ell y_\ell , \quad 1 \leqslant a_i \leqslant n , \quad a_i \in \mathbb{Z} .$$

La suite (S_n) est une suite pondérée ralative à tout sous-corps K de $\mathbb{C}$ contenant L, et aux fonctions $f_i(z) = \exp(x_i z)$, $i = 1, \dots, d$, de densité supérieure ou égale à ℓ $(\rho = 1)$.

(b) Choisissons $f_i(z) = \exp(x_i z)$ pour $i = 1, \dots, d - 1$, et $f_d(z) = z$, et soit L le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les ℓd nombres $(y_j , \exp(x_i y_j))$, $i = 1, \dots, d - 1$, $j = 1, \dots, \ell$. Soit S_n l'ensemble des combinaisons linéaires $a_1 y_1 + \dots + a_\ell y_\ell$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant a_i \leqslant n$, et soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant L. Alors (S_n) est une suite pondérée relative aux fonctions f_i et au corps K, de densité supérieure ou égale à ℓ. Ici, $\rho \leqslant (d - 1 + \varepsilon)/d$ pour tout ε positif.

Remarque. - RAMACHANDRA [10] a construit des suites pondérées relatives à $\bar{\mathbb{Q}}$ (clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$) et à des fonctions f_i avec $f_i(z) = z$, $\exp(bz)$ ou $\wp(cz)$ avec b et c complexes non nuls, quand les invariants g_2 et g_3 de la fonction $\wp$ sont algébriques. En fait, on peut construire des suites pondérées relatives à un sous-corps quelconque K de $\mathbb{C}$ et à des fonctions f_i avec $f_i(z) = z$, $\exp(bz)$, $\wp(cz)$ ou $\zeta(cz)$, où ζ est associée à une fonction $\wp$ dont les invariants appartiennent à K.

3. Majoration de la densité de suites pondérées.

Le résultat de RAMACHANDRA que nous avons annoncé au § 1 peut s'énoncer : "Toute suite pondérée relative à un corps de nombres a une densité $\geq \lambda\rho$ telle que $\lambda \leq d/(d - 1)$" (le résultat de LANG dans le cas algébrique correspond à $d = 2$, $\rho_1 = \rho_2$). Plus généralement, on peut démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$. Soit (S_n) une suite pondérée relative à K et à des fonctions $f_1, \dots, f_d$, de densité supérieure ou égale à $\lambda\rho$. Alors :

1° Si $d > \tau > 1$, on a $\lambda < \tau d/(d - \tau)$.

2° Si $d > \tau \geqslant 1$, si la dérivation opère sur le K-espace vectoriel $Kf_1 + \dots + Kf_d$ et si, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\max_{z \in S_n} t(f_i^{(k)}(z)) \ll n^{\rho_i} , \quad i = 1, \dots, d ,$$

alors $\lambda < (\tau - 1)d/(d - \tau)$.

Remarque 1. - Supposons que K soit une extension algébrique de $\mathbb{Q}$; alors K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\underset{\sim}{Q}$ pour $\tau \geqslant 1$. Dans ce cas,

- On déduit de la relation du 1° le théorème de Ramachandra, qui admet comme corollaires le théorème de Gel'fond-Schneider sur la transcendance de a^b (considérer les deux fonctions z et a^z , avec $\rho_1 < 1$ et $\rho_2 = 1$) , ainsi que la transcendance de l'un des six nombres $\exp(x_i\ y_j)$, $i = 1 , 2$, $j = 1 , 2 , 3$, où x_1 , x_2 (resp. y_1 , y_2 , y_3) sont des nombres complexes $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants (LANG a donné une démonstration directe et simple de ce résultat [6], [7]). D'autres corollaires du théorème de Ramachandra, concernant les fonctions elliptiques sont exposés dans [10].

- La relation du 2° montre que, dans le cas d'un corps de nombres et quand la dérivation opère, on a card $S_n \ll n^{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$; le théorème de Schneider (§ 1) montre qu'en fait l'ensemble $S = \bigcup S_n$ est fini.

On peut remarquer que, même dans le cas algébrique, le théorème 1 ne semble pas le meilleur possible ; une amélioration très faible, telle que $\lambda < d/(d - 1)$ (qui revient à supprimer la condition $\tau > 1$ dans la relation du 1°) montrerait par exemple la transcendance du nombre $2^{(\log 2)/(\log 3)}$ (voir les conjectures de LANG [7], SCHNEIDER [11] et RAMACHANDRA [10]).

D'autre part, il serait souhaitable que l'on élimine l'hypothèse sur le type de transcendance de K pour obtenir des majorations ne dépendant que du degré de transcendance q de K sur $\underset{\sim}{Q}$. On peut conjecturer que le théorème 1 reste vrai quand on remplace τ par $q + 1$. Dans le cas le plus simple $(q = 1)$, on connait un tère valable pour tout nombre complexe ([3], [4], [6], [13]) qui peut, dans certains cas, remplacer l'inégalité (1) ; les hypothèses supplémentaires concerneront les fonctions f_1 , ... , f_d , et non le corps K .

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> K_0 <u>un sous-corps de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>de type de transcendance inférieur ou égal à</u> τ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Q}$, <u>et soit</u> K <u>une extension de</u> K_0 <u>de degré de transcendance</u> 1 ; <u>soit</u> (S_n) <u>une suite pondérée relative à</u> K <u>et à des fonctions</u> f_1 , ... , f_d <u>de densité supérieure ou égale à</u> $\lambda\rho$.

1° <u>On suppose qu'il existe deux constantes positives</u> C <u>et</u> n_0 <u>telles que, pour tout</u> $n \geqslant n_0$, <u>et tout polynôme</u> $P_n \in K[X_1 , \ldots , X_d]$ <u>vérifiant</u>

$$0 \leqslant \log \|P_n\| \ll n^{(\lambda+d)\rho/d} \ ; \ \deg_{X_i} P_n \ll n^{(\lambda+d)\rho/d}\, n^{-\rho_i} ,$$

<u>si</u> $F_n = P_n(f_1 , \ldots , f_d)$, <u>l'un des nombres</u> $F_n(z)$, $z \in S_{Cn}$, <u>est non nul</u>.

<u>Alors</u> $\lambda < 2\tau d/(d - 2\tau)$.

2° <u>On suppose que la dérivation opère sur le</u> K-<u>espace vectoriel</u> $Kf_1 + \ldots + Kf_d$ <u>et que, pour tout entier</u> $k \geqslant 1$ <u>on a</u>

$$\max_{z\in S_n} t(f_i^{(k)}(z)) \ll n^{\rho_i} , \ i = 1 , \ldots , d .$$

<u>On suppose également qu'il existe deux constantes positives</u> C <u>et</u> n_0 <u>telles que, pour tout</u> $n \geqslant n_0$ <u>et tout polynôme non nul</u> $P_n \in K[X_1 , \ldots , X_d]$ <u>vérifiant</u>

$$\log \|P_n\| \ll \varphi(n) = n^{(\lambda+d)\rho/(d-1)} (\log n)^{-1/(d-1)} ,$$

$$\deg_{X_i} P_n \ll \varphi(n).n^{-\rho_i} ,$$

si $F_n = P_n(f_1 , \dots , f_d)$, l'un des nombres $F_n^{(s)}(z)$, $s = 0 , \dots , \varphi(n).(\log n)^{-1}$ et $z \in S_{Cn}$, est non nul.

Alors $\lambda < (2\tau - 1)d/(d - 2\tau)$.

Remarque 2. - On peut démontrer, par exemple en utilisant un résultat de TIJDEMAN [12], ou en utilisant le lemme 3 de [13], que les hypothèses concernant les zéros des fonctions F_n sont vérifiées quand les fonctions $f_1 , \dots , f_d$ sont égales à z ou à $\exp(bz)$.

Montrons, par exemple, que l'on peut déduire de la partie 2° du théorème 2 le résultat suivant (dû à GEL'FOND [4]) : Si a et b sont deux nombres algébriques. $a \neq 0$, $a \neq 1$, et b irrationnel cubique, alors les deux nombres a^b , a^{b^2} sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Si on considère en effet les trois fonctions suivantes

$$f_1(z) = e^z , f_2(z) = e^{bz} , f_3(z) = e^{b^2 z} ,$$

on construit une suite pondérée (S_n) avec

$$S_n = \{(u_1 + u_2 b + u_3 b^2) \log a \mid 1 \leqslant u_i \leqslant n\} ,$$

relative aux fonctions f_1 , f_2 , f_3 et au corps K obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les nombres a , b , a^b et a^{b^2} , de densité supérieure ou égale à $3 = \lambda\rho$, avec $\rho = 1$. Comme la dérivation opère sur $K f_1 + K f_2 + K f_3$, on déduit du théorème 2 $\tau > 1$, donc K n'est pas une extension de $\mathbb{Q}$ de degré de transcendance $\leqslant 1$.

De la même manière que pour le théorème sur la transcendance de a^b , on peut démontrer ce résultat de GEL'FOND, sans utiliser d'équation différentielle, à partir des fonctions $f_1(z) = z$, $f_2(z) = a^z$, $f_3(z) = a^{bz}$, $f_4(z) = a^{b^2 z}$, et avec $S_n = \{u_1 + u_2 b + u_3 b^2 \mid 1 \leqslant u_i \leqslant n\}$. Mais cette démonstration utilise des majorations telles que

$$\log \max_{|z|=R} |f_1(z)| \ll \log R ,$$

alors que les définitions précédentes ne nous permettent que d'utiliser des majorations du type

$$\log \max_{|z|=R} |f_1(z)| \ll R^{\varepsilon} \text{ pour tout } \varepsilon > 0 .$$

C'est pourquoi la partie 1° du théorème 2 ne permet pas d'obtenir le résultat. Mais la remarque précédente montre qu'il est utile de remplacer, dans toutes les définitions, les majorations R^{ρ} par $R^{\rho}(\log R)^{\rho'}$ avec $(\rho , \rho') \in R^2$. On améliore ainsi les théorèmes 1 et 2 , ce qui nous permet de retrouver tous les résultats d'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle qui ont déjà été obtenus par la méthode de GEL'FOND ([2], [4], [7], [12], [13]).

Parmi les autres améliorations possibles des théorèmes 1 et 2, signalons l'introduction d'une densité inférieure ([10], [14]), qui est utile quand les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ admettent une période commune ; d'autre part, on peut modifier la définition des suites pondérées en remplaçant les deux corps K et L par des corps $K_1, \ldots, K_d$ et $L_1, \ldots, L_n$, où L_n est une extension finie de L_1, en remplaçant la condition $f_i(S_n) \subset L$ par $f_i(S_n) \subset K_i \cap L_n$.

Pour terminer, nous allons examiner le cas particulier où l'ensemble $S = \bigcup S_n$ possède un point d'accumulation dans $\underset{\sim}{C}$.

4. Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions analytiques en une suite convergente de points.

Dans les énoncés précédents, les propriétés utilisées concernaient les valeurs $f_i(z)$ pour $|z| = R$ tendant vers l'infini ; lorsque l'ensemble S admet un point d'accumulation $w \in \underset{\sim}{C}$, il suffit que l'on étudie les fonctions f_i au voisinage de w pour obtenir la conclusion.

THÉORÈME 3. - Soient $\tau, a, b, c_1, c_2, \rho_1, \ldots, \rho_d, \rho'_1, \ldots, \rho'_d$ des nombres réels, avec $\tau \geq 1$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. On pose

$$\rho = (\rho_1 + \ldots + \rho_d)/d \quad \text{et} \quad \rho' = (\rho'_1 + \ldots + \rho'_d)/d .$$

Soit K un sous-corps de $\underset{\sim}{C}$ de type fini et de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\underset{\sim}{Q}$; soient $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions analytiques en 0, algébriquement indépendantes sur K ; (z_n) une suite de nombres complexes deux à deux distincts, convergeant vers 0, et tels que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log |z_n - z_i| \leq - c_1 n^a (\log n)^b .$$

On suppose que, pour tout n et pour $\ell = 1, \ldots, d$, on a $f_\ell(z_n) \in K$ avec

$$t(f_\ell(z_n)) \leq c_2 n^{\rho_\ell} (\log n)^{\rho'_\ell} .$$

Si $\rho' < b/\tau$, alors $a < \tau(\rho + 1/d)$.

Dans le cas algébrique $(\tau = 1)$, on retrouve un résultat de HILLIKER [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI (Enrico). - Algebraic values of meromorphic maps, Invent. Math., Berlin, t. 10, 1970, p. 267-287 ; t. 11, 1970, p. 163-166.

[2] BROWNAWELL (Dale). - Some transcendence results for the exponential function, Norske Vid. Selsk. Skr. (à paraître).

[3] BROWNAWELL (Dale). - Sequences of diophantine approximations, J. Number Theory (à paraître).

[4] GEL'FOND (Alexandre Ossipovitch). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960.

[5] HILLIKER (D. L.). - On analytic functions which have algebraic values at a convergent sequence of points, Trans. Amer. math. Soc., t. 126, 1967, p. 534-550.

[6] LANG (Serge). - Transcendental numbers and diophantine approximations, Bull.

Amer. Math. Soc., t. 77, 1971, p. 635-677.

[7] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading (Mass.), Addison-Wesley publishing Company, 1966.

[8] LELONG (Pierre). - Valeurs algébriques d'une application méromorphe (d'après E. Bombieri), Séminaire Bourbaki, 23e année, 1970/71, n° 384, 17 p.

[9] LIPMAN (Joseph). - Transcendantal numbers. - Kingston, Queen's University, 1966, (Queen's Papers in pure and applied Mathematics, 7).

[10] RAMACHANDRA (K.) - Contributions to the theory of transcendental numbers, Acta Arith., Warszawa, t. 14, 1968, p. 65-72 et p. 73-88.

[11] SCHNEIDER (Theodor). - Introduction aux nombres transcendants. - Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[12] TIJDEMAN (Robert). - On the algebraic independence of some numbers, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, t. 74, 1971, p. 146-162 (Indag. Math., t. 33).

[13] WALDSCHMIDT (Michel). - Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle, Bul. Soc. Math. France, t. 99, 1971, p. 285-304.

[14] WALDSCHMIDT (Michel). - Propriétés arithmétiques de fonctions méromorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 173, 1971, Série A, p. 544-547.

[15] WALDSCHMIDT (Michel). - Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 23, 1973 (à paraître).

(Texte reçu le 29 novembre 1971)

Michel WALDSCHMIDT
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE