

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

## **Quelques problèmes relatifs à la théorie des fractions continues limitées**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 13, n° 1 (1971-1972),  
exp. n° 2, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1971-1972\\_\\_13\\_1\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A1_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS À LA THÉORIE  
 DES FRACTIONS CONTINUES LIMITÉES  
 par Michel MENDES FRANCE

1. Généralités.

Soit  $p/q$  un nombre rationnel. On sait qu'on peut le développer en fraction continue (limitée), et ceci de façon unique, sous la forme

$$p/q = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

où les entiers  $a_0, a_1, \dots, a_n$  vérifient les conditions

- (i)  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,
- (ii)  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sont positifs non nuls,
- (iii)  $a_n \geq 2$ .

Nous nous intéresserons tout particulièrement à la "profondeur"  $n$  (nombre de traits de fraction) de la fraction continue de  $p/q$ .

On pose  $n = \psi(p/q)$ . La fonction  $\psi$  est ainsi définie sur  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , et prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

2. Résultats connus.

La fonction  $\psi$  a été étudié par G. LAMÉ [4] qui en a donné des majorations, mais ce n'est que récemment que l'on a pu donner des estimations plus précises. En 1968, HEILBRONN [3] a montré que l'on a

$$(1) \quad 1/(\varphi(n)) \sum_{k \leq n, (k,n)=1} \psi(k/n) = 12/\pi^2 \log 2 \log n + O(\log \log n)^4.$$

Deux ans plus tard, J. D. DIXON a complété ce résultat ([1], [2]) de la façon suivante :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout couple d'entiers  $(k, n)$  vérifiant  $1 \leq k \leq n \leq x$ , on ait

$$(2) \quad |\psi(k/n) - 12/\pi^2 \log 2 \log n| < (\log n)^{1/2+\varepsilon},$$

sauf peut-être pour au plus  $x^2 \exp(-c(\log x)^{\varepsilon/2})$  couples.

Ces deux résultats suggèrent un certain nombre de problèmes que je voudrais exposer ici. Toutes ces questions se ramènent plus ou moins à la suivante :

Soit  $p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_n/q_n, \dots$  une suite infinie de nombres rationnels, disons tels que  $p_n < q_n$ . Que peut-on dire de la suite  $\psi(p_1/q_1), \psi(p_2/q_2), \dots$ ? En particulier, est-il vrai que  $\psi(p_n/q_n)$  soit de l'ordre de  $\log q_n$ ? Ou plus vaguement, sait-on si  $\psi(p_n/q_n)$  reste borné ou non? Selon le choix de la suite  $(p_n/q_n)$ , on touche à des problèmes de natures très différentes.

### 3. Cas des fractions rationnelles.

Nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Soit  $F$  une fraction rationnelle à coefficients rationnels ( $F(X) \in \mathbb{Q}(X)$ ). La suite  $(\psi(F(n)))$  est périodique à partir d'un certain rang.

Une conséquence en est que  $\overline{\lim} \psi(F(n)) < \infty$ . Ce résultat a été déjà trouvé par A. SCHIMZEL [7].

Démonstration du théorème. - Dans l'anneau  $\mathbb{Z}[X]$  des polynômes à coefficients entiers, on désigne par  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) l'ensemble des polynômes dont le coefficient du terme le plus élevé est un entier strictement positif (resp. négatif). La partie  $\mathcal{P}$  (appelée l'ensemble des polynômes positifs) induit sur  $\mathbb{Z}[X]$  un ordre total noté  $>$ . Ainsi, si  $A(X) \in \mathbb{Z}[X]$ , on a une des trois possibilités suivantes à l'exclusion des deux autres :  $A(X) > 0$ ,  $A(X) < 0$ ,  $A(X) = 0$ .

On dira que les deux polynômes à coefficients entiers  $A(X) \in \mathcal{P}$  et  $B(X) \in \mathcal{P}$  sont "divisibles" s'il existe deux polynômes  $Q(X)$  et  $R(X)$  à coefficients entiers tels que

$$(3) \quad \begin{cases} A(X) = B(X) Q(X) + R(X), \\ Q(X) \geq 0, \\ R(X) \geq 0, \\ R(X) < B(X), \end{cases}$$

$Q(X)$  s'appelle le quotient, et  $R(X)$  le reste.

Il est clair que deux polynômes à coefficients entiers dans  $\mathcal{P}$  ne sont pas toujours divisibles (par exemple  $A(X) = X$  et  $B(X) = 2$ ). Ils sont toutefois "presque" divisibles en ce sens que l'on a le résultat suivant :

LEMME 1. - Soient  $A(X)$  et  $B(X)$  deux polynômes positifs à coefficients entiers. Alors il existe un entier  $g \geq 1$  tel que, pour tout  $h \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ , les deux polynômes  $A(gX+h)$  et  $B(gX+h)$  soient divisibles.

Démonstration. - On effectue la division euclidienne de  $A(X)$  par  $B(X)$  :

$$(4) \quad \begin{cases} A(X) = B(X) Q(X) + R(X) , \\ \text{degré } (R) < \text{degré } (B) . \end{cases}$$

Si  $A(X)$  est de degré moindre que celui de  $B(X)$ ,  $A(X)$  et  $B(X)$  sont divisibles au sens de (3) avec  $Q(X) = 0$  et  $R(X) = A(X)$ .

Sinon,  $Q(X)$  est un polynôme à coefficients rationnels, le coefficient du terme de degré le plus élevé étant strictement positif. Soit  $g \geq 1$  un dénominateur commun des coefficients de  $Q(X) - Q(0)$  (on prend  $g$  quelconque si  $Q(X)$  est constant). Soit  $h \in \{0, 1, 2, \dots, g-1\}$ . La formule de Taylor s'écrit

$$Q(gX + h) = Q(h) + Q_1(X) ,$$

où  $Q_1(X) = gX Q'(h)/1! + g^2 X^2 Q''(h)/2! + \dots$

$Q_1(X)$  est donc un polynôme à coefficients entiers, et de plus  $Q_1(X) \geq 0$ .

Soit  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{si } Q(h) \text{ non entier,} \\ \varepsilon = 0 & \text{si } Q(h) \text{ entier et } R(X) \geq 0 , \\ \varepsilon = 1 & \text{si } Q(h) \text{ entier et } R(X) < 0 . \end{cases}$$

On désigne par  $\{Q(h)\}$  la partie fractionnaire de  $Q(h)$ , et par  $[Q(h)]$  la partie entière. Alors l'identité

$$A(gX + h) = B(gX + h) P(X) + S(X) ,$$

où

$$\begin{cases} P(X) = Q_1(X) + [Q(h)] - \varepsilon , \\ S(X) = (\varepsilon + \{Q(h)\}) B(gX + h) + R(gX + h) , \end{cases}$$

réalise la division de  $A(gX + h)$  par  $B(gX + h)$  au sens de (3).

C. Q. F. D.

**LEMME 2.** - Deux polynômes positifs de même degré sont divisibles.

Démonstration. - Ce lemme n'est qu'un cas particulier du précédent, mais il est plus simple d'en donner une démonstration directe.

Soient  $A(X)$  et  $B(X)$  deux polynômes positifs à coefficients entiers de même degré. Soit

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)/B(x) \quad (\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{Q}) .$$

L'identité

$$A(X) = B(X)[\alpha] + (A(X) - B(X)[\alpha])$$

représente la division

$$(Q(X) = [\alpha] , R(X) = A(X) - B(X)[\alpha]) .$$

C. Q. F. D.

Nous pouvons à présent prouver le théorème 1.

Soient  $A(X)$  et  $B(X)$  deux polynômes positifs à coefficients entiers tels que

$A(X) > B(X)$  . Le lemme 1 montre l'existence d'un entier  $g_1 \geq 1$  tel que, pour tout  $h \in \{0, 1, \dots, g_1 - 1\}$ , les deux polynômes  $A(g_1 X + h)$  et  $B(g_1 X + h)$  soient divisibles.

Soit  $R(X)$  le reste (qui dépend de  $h$  en général). Si le degré de  $R(X)$  est strictement inférieur à celui de  $B(X)$ , on dit que l'on a clos une étape.

Si  $B(X)$  et  $R(X)$  ont même degré, le lemme 2 nous indique que  $B(X)$  et  $R(X)$  sont divisibles. Soit  $R_1(X)$  le reste. Si le degré de  $R_1(X)$  est strictement inférieur à celui de  $R(X)$ , l'étape est close. Sinon,  $R(X)$  et  $R_1(X)$  sont divisibles avec  $R_2(X)$  pour le reste. Le processus se poursuit jusqu'au moment où apparaît un reste  $R_{j_1}(X)$  de degré strictement inférieur à celui de  $R_{j_1-1}(X)$  (donc de  $B(X)$ ). Cette situation se produit nécessairement, car une chaîne du type

$$\begin{cases} B(X) > R(X) > R_1(X) > \dots > R_{j_1}(X) \geq 0 \\ \text{degré}(B(X)) = \text{degré}(R_{j_1}(X)), \end{cases}$$

est finie (les coefficients du terme de plus haut degré étant des entiers décroissants minorés par 0).

Sitôt que  $\text{degré}(R_{j_1}) < \text{degré}(R_{j_1-1}(X))$ , on déclare l'étape close.

On pose alors  $B_1(X) = B(g_1 X + h)$ . On détermine un entier  $g_2 \geq 1$  tel que  $B_1(g_2 X + h_2)$  soit divisible par  $R_{j_1}(g_2 X + h_2)$  pour tout  $h_2 \in \{0, 1, \dots, g_2 - 1\}$ . A la clôture de cette nouvelle étape, on tombe sur un reste  $R_{j_2}(X)$  de degré strictement inférieur à celui de  $R_{j_1}(X)$ . Puis on recommence, et l'on obtient ainsi une suite de polynômes dont les degrés décroissent strictement

$$R_{j_1}(X), R_{j_2}(X), \dots, R_{j_s}(X).$$

La suite est évidemment finie, et au rang  $s$ , on tombe sur le polynôme nul.

En résumé, soit  $\prod_{k=1}^s g_k$ , et soit  $h \in \{0, 1, \dots, g - 1\}$ . La fraction  $A(gX + h)/B(gX + h)$  se décompose sous la forme

$$Q_0(X) + \frac{1}{Q_1(X)} + \dots + \frac{1}{Q_m(X)}$$

où  $m$  dépend de  $h$  et où les  $Q_p(X)$  sont des polynômes positifs à coefficients entiers.

Il s'ensuit que si  $n$  parcourt les entiers, on a

$$\psi(A(gn + h)/B(gn + h)) = m,$$

à partir d'un certain rang (l'égalité n'a pas nécessairement lieu pour les petites valeurs de  $n$ , car  $Q_p(n)$  peut ne pas être un entier positif). Ainsi la suite  $\psi(A(n)/B(n))$  est constante (à partir d'un certain rang) sur toute progression arithmétique de pas  $g$ .

Cela montre bien que la suite est périodique (de période  $g$ ) à partir d'un certain rang.

#### 4. Cas des exponentielles.

Considérons la suite  $(\psi(2^n/3^n))$ . On pourrait s'attendre, au vu des résultats de Dixon et Heilbronn, à ce que

$$\frac{1}{n} \psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) \rightarrow \frac{12}{\pi^2} \log 2 \log 3 = 0,9258730 \dots$$

Or, d'après les calculs de J. HARDOUIN-DUPARC, on constate que pour  $10 \leq n \leq 220$ , on a

$$0,36 \leq \frac{1}{n} \psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) \leq 0,80, \text{ sauf pour } n = 13, 16, 21, 33.$$

De plus, on a l'impression que cette quantité se stabilise au voisinage de 0,6 (voir tableau ci-dessous).

n	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210
$\frac{100}{n} \psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right)$	80	57	36	60	59	49	68	62	59	58	56

Il est sans doute très difficile de prouver que  $1/n \psi((2^n/3^n))$  est "stationnaire". Il semble clair toutefois que  $1/n \psi(2^n/3^n)$  ne tend pas vers  $12/\pi^2 \log 2 \log 3$ . Il serait plus raisonnable de se demander si la suite ne tendrait pas plutôt vers  $12/\pi^2 (\log 2)^2 = 0,556 \dots$

En effet,

$$\frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{\left[\frac{3^n}{2^n}\right] + \frac{\alpha(n)}{2^n}},$$

où  $\alpha(n) = 2^n \{3^n/2^n\} < 2^n$ .

Alors  $\psi(2^n/3^n) = 1 + \psi(\alpha(n)/2^n)$  et, en se reportant à nouveau aux résultats de DIXON et HEILBRONN, on pourrait espérer que

$$\frac{1}{n} \psi\left(\frac{\alpha(n)}{2^n}\right) \rightarrow \frac{12}{\pi^2} (\log 2)^2.$$

Toujours est-il que l'on est loin de pouvoir démontrer des résultats aussi précis. S'il est banal de constater que

$$\psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) = o(n),$$

on ne sait pas si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{n} \psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) > 0.$$

Y. POURCIET a toutefois réussi à prouver que, si  $(p, q) = 1$ ,  $p \neq 1$ ,  $q \neq 1$ ,

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{p}{n}}{q^n} = +\infty.$$

Ce résultat a pour corollaire ce qui suit :

Soit  $x \in \mathbb{Q}$  tel que  $\sup_n \psi(x^n) < \infty$ . Alors, ou bien  $x$  est entier, ou bien  $\frac{1}{x}$  est entier.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIXON (J. D.). - The number of steps in the euclidean algorithm, J. of Number Theory, t. 2, 1970, p. 414-422.
- [2] DIXON (J. D.). - A simple estimate for the number of steps in the euclidean algorithm, Amer. math. Monthly, t. 78, 1971, p. 374-376.
- [3] HEILBROTH (H.). - On the average length of a class of finite continued fractions, Abhandlungen Zahlentheorie und Analysis (édité par Turan en souvenir de Landau), p. 87-96. - Berlin, VEB Deutscher Verlag, 1968.
- [4] LANÉ (G.). - Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 19, 1844, p. 867-870.
- [5] MIKUSINSKI (J.). - Sur certaines fractions continues finies, Ann. Polonici Mathem., t. 1, 1954, p. 203-206.
- [6] SCHINZEL (A.). - On some problems of the arithmetical theory of continued fractions, Acta Arithm., Warszawa, t. 6, 1961, p. 394-413.
- [7] SCHINZEL (A.). - On some problems of the arithmetical theory of continued fractions, II., Acta Arithm., Warszawa, t. 7, 1962, p. 288-298.

(Texte définitif reçu le 26 avril 1972)

Michel HINDÈS FRANCE  
 U. E. R. de Mathématiques et Informatique  
 Université de Bordeaux-I  
 351 cours de la Libération  
 33405 TALENCE CEDEX

---