Peter Karl Josef Draxl

Fonctions L et représentation simultanée d'un nombre premier par plusieurs formes quadratiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 12, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 12, 3 p.

8 février 1971

FONCTIONS L ET REPRÉSENTATION SIMULTANÉE D'UN NOMBRE PREMIER PAR PLUSIEURS FORMES QUADRATIQUES

par Peter Karl Josef DRAXL

Soit $\underset{\sim}{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, et soient

$$Q_i = \alpha_i\, \xi_i^2 + \beta_i\, \xi_i\, \eta_i + \gamma_i\, \eta_i^2 \qquad (i = 1 , \dots , r)$$

r formes quadratiques binaires entières (c'est-à-dire α_i , β_i , $\gamma_i \in \underset{\sim}{Z}$ et $(\xi_i , \eta_i) \in \underset{\sim}{Z} \oplus \underset{\sim}{Z} = R_i$) . Soient

$$\delta_i = \beta_i^2 - 4\, \alpha_i\, \gamma_i \qquad (i = 1 , \dots , r)$$

leurs discriminants, et supposons

$$\delta_i \neq 1 , \quad \delta_i \neq \delta_j \quad \text{(modulo les carrés rationnels)} \quad (1 \leq i , \ j \leq r ; \ i \neq j) .$$

Considérons maintenant R_i comme réseau entier dans l'espace vectoriel topologique $E_i = \underset{\sim}{R} \otimes_{\underset{\sim}{Z}} R_i$ ($\underset{\sim}{R}$ = corps des nombres réels), et choisissons, dans chaque E_i , un cône ouvert C_i avec l'origine comme sommet.

DÉFINITION. - Un nombre premier p est dit représenté simultanément par les formes Q_i par rapport aux cônes C_i , si on peut trouver r couples

$$(\xi_i , \eta_i) \in R_i \cap C_i \qquad (i = 1 , \dots , r) ,$$

tels qu'on ait $p = |\alpha_i\, \xi_i^2 + \beta_i\, \xi_i\, \eta_i + \gamma \eta_i^2| \quad (i = 1 , \dots , r)$.

On pose maintenant le problème suivant.

PROBLÈME 1. - Quelle est la densité (ou bien au sens de DIRICHLET, ou bien au sens de HADAMARD et de LA VALLÉE-POUSSIN) des nombres premiers p représentés simultanément par les formes Q_i par rapport aux cônes C_i donnés, plus précisément, est-ce que la densité est strictement positive ?

Comme la théorie des formes quadratiques binaires entières est essentiellement l'étude des entiers dans les corps quadratiques (d'après GAUSS), le problème 1 peut être considéré comme problème concernant r corps quadratiques distincts. Le nouveau problème se généralise de la façon suivante.

Soient k_i , r corps de nombres linéairement disjoints (c'est-à-dire r extensions finies du corps $\underset{\sim}{Q}$ des rationnels avec $[k:\underset{\sim}{Q}] = [k_1:\underset{\sim}{Q}] \times \dots \times [k_r:\underset{\sim}{Q}]$, où

k est le composé des corps k_i). Appelons

$$\Phi_i : k_i \xrightarrow{\subset} \underset{\sim}{R} \otimes_{\underset{\sim}{Q}} k_i = E_i \qquad (i = 1 , \ldots , r)$$

les plongements habituels. Choisissons, dans chaque E_i , un cône ouvert C_i avec l'origine comme sommet, et choisissons, dans chaque k_i , un rayon $\mathfrak{S}_i$ sans conditions par rapport aux places archimédiennes de k_i . Enfin, notons $\mathfrak{N}_i$ la norme des idéaux par rapport à l'extension $k_i/\underset{\sim}{Q}$ $(i = 1 , \ldots , r)$.

PROBLÈME 2. - Soient donnés r idéaux entiers $\mathfrak{a}_i$ dans k_i . Alors, quelle est la densité des nombres premiers p , tels qu'on puisse écrire

$$p = \mathfrak{N}_i(\mathfrak{p}_i) \qquad (i = 1 , \ldots , r)$$

avec des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de k_i de la forme

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a}_i(\tau_i) \qquad ((\tau_i) = \text{idéal principal engendré par } \tau_i \in k_i) ,$$

où $\tau_i \in \mathfrak{S}_i$ et $\Phi_i(\tau_i) \in C_i$, en particulier, est-ce que la densité est strictement positive ?

Dans le cas $r = 1$, le problème 2 a été étudié et résolu par E. HECKE (voir [4] , p. 215-234 et p. 249-289) en utilisant les fonctions L avec "Grössencharakteren". Dans le cas général, le problème 2 a été étudié par A. I. VINOGRADOV (voir [5]) et B. Z. MOROZ (voir la bibliographie dans [1]). Au lieu des fonctions L (au sens de HECKE), VINOGRADOV utilise les produits scalaires de fonctions L ordinaires (voir [5] et [1] , Beispiel 2).

Le but de cet exposé était une étude du problème 2 , plus profonde que celle faite dans [5] , en utilisant les méthodes de [1] . Les détails seront publiés ultérieurement [3] . Un aspect de la discussion peut être trouvé dans mon exposé [2] , où je me borne au cas $r = 2$ (ce qui suffit essentiellement).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DRAXL (P. K. J.). - L-Funktionen algebraischer Tori, J. of Number Theory, t. 3, 1971, p. 444-467.

[2] DRAXL (P. K. J.). - Remarques sur le groupe de classes du composé des deux corps de nombres linéairement disjoints, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 24.

[3] DRAXL (P. K. J.). - Skalarprodukte Heckescher L-Reihen und Primzahlverteilung (en préparation).

[4] HECKE (E.). - Mathematische Werke. - Göttingen, Vandenhoek und Ruprecht, 1959.

[5] VINOGRADOV (A. I.). - On extensions to the left halfplane of the scalar product of Hecke L-series with magnitude characters, Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 82, 1969, p. 1-8.

(Texte reçu le 26 juin 1971)

Peter Karl Josef DRAXL
Université de Paris-Sud [Paris-XI]
Mathématiques, Bâtiment 425
91 - ORSAY