Khira Lamèche

Extension d'un théorème de Pólya-Cantor à des séries rationnelles en variables non commutatives

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 9, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 9, 12 p.

18 janvier 1971

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE PÓLYA-CANTOR À DES SÉRIES RATIONNELLES EN VARIABLES NON COMMUTATIVES

par Khira LAMÈCHE

<u>Introduction</u>. - Soit X un ensemble fini. X est appelé un alphabet, X^* le monoïde libre qu'il engendre, e étant l'élément neutre du monoïde X^*, le produit dans X^*, la concaténation des mots f et g, est le mot obtenu en écrivant g à droite de f :

$$f \star g = fg \quad .$$

L'homomorphisme de X^* dans $\underset{\sim}{N}$, qui à tout mot f de X^* associe sa "longueur", se note $f \rightarrow |f|$.

<u>Définition de l'algèbre large d'un monoïde libre sur l'anneau des entiers</u>. - On notera $\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ l'algèbre large de l'ensemble X sur l'anneau des entiers $\underset{\sim}{Z}$, les éléments de $\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ sont les séries de puissance à coefficients entiers dont les variables sont dans X :

$$a \in \underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle \iff a = \sum_{f\in X^*} (a , f)f \ , \quad (a , f) \in \underset{\sim}{Z} \quad .$$

Sur $\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$, on définit l'addition

$$a + a' = \sum_{f\in X^*} [(a , f) + (a' , f)]f \quad ,$$

et le produit dit de Cauchy de la manière suivante :

$$aa' = \sum_{f\in X^*} f \sum_{gh=f} (a , g)(a' , h) \quad .$$

Cette expression a un sens, car X^* est un monoïde libre, donc chaque mot n'a, en produit de deux mots, qu'un nombre fini de factorisations.

On définit la multiplication par un scalaire :

$$\text{si} \quad \lambda \in \underset{\sim}{Z} \ , \qquad \lambda a = \sum_{f\in X^*} \lambda(a , f)f \quad .$$

Muni de l'addition, du produit, et de la multiplication par un scalaire, $\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ est une algèbre.

Si $X = \{x\}$, alors $f \in X^* \iff \exists\, n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $f = X^n$.

On retrouve la définition habituelle des séries formelles.

Définition de l'ensemble des rationnels sur X . - On pose, par définition,

$$(\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle)^* = (a \; ; \quad a \in \underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle \; , \quad (a \, , \, e) = 0) \quad ,$$

i. e. $(\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle)^*$ est l'ensemble des séries formelles sur X sans terme constant.

Si $a \in \underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle^*$, on définit

$$a^* = \sum_{n\geq 1} a^n \quad .$$

Ceci a un sens, puisque $(a \, , \, e) = 0$.

a et a^* sont liés par la relation :

(I) $$a + aa^* = a + a^* a = a^* \quad .$$

(I) s'écrit aussi :

$$(1 - a)(1 + a^*) = (1 + a^*)(1 - a) = 1 \quad .$$

Soit $S \subset \underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$; S est rationnellement clos, si S est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$, stable par quasi-inversion des éléments quasi-inversibles.

Définition. - $\underset{\sim}{Z}^*_{rat}(X)$ est le plus petit sous-ensemble de $\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ rationnellement clos contenant X .

Caractérisation de $\underset{\sim}{Z}^*_{rat}(X)$ [5].

THÉORÈME I. - Un élément $a \in \underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ appartient à $\underset{\sim}{Z}^*_{rat}\langle X\rangle$, si, et seulement si, il existe un entier $N \geq 2$, une représentation μ de X^* dans $M_N(\underset{\sim}{Z})$, une matrice P de $M_N(\underset{\sim}{Z})$ telle que l'on ait

$$a = \sum_{f\in X^*} (\mathrm{Tr}\, P\mu f)f \quad .$$

On va vérifier que, dans le cas où X est réduit à une seule lettre, l'ensemble $\underset{\sim}{Z}^*_{rat}\langle X\rangle$ coïncide avec la définition habituelle des séries rationnelles à coefficients entiers :

Soit $X = \{x\}$. $a \in \underset{\sim}{Z}^*_{rat}\langle X\rangle \iff \exists\, P \, , \, Q \in \underset{\sim}{Z}[X]$ telles que l'on ait

$$a = \frac{P(X)}{Q(X)} \, , \qquad \text{avec} \quad Q(0) = 1 \quad .$$

La condition est nécessaire : En effet, soit

$$a = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Tr}\, P(\mu x)^n \, X^n = \sum_{n\geq 0} a_n \, X^n$$

une série formelle. On pose $\mu x = A$.

La matrice A vérifie son polynôme caractéristique, donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$

vérifie une relation de récurrence, ce qui démontre que la série a est rationnelle.

La condition est suffisante : On se ramène au cas où la série a est un polynôme :

$$a = P(X) = a_0 X^r + a_1 X^{r-1} + \dots + a_{r-1} X + a_r \ .$$

Au polynôme P, on peut associer la matrice A de $M_{r+1}(\mathbb{Z})$ suivante :
Si $(e_1, \dots, e_{r+1})$ est une base de $\mathbb{Z}^{r+1}$, on définit A par

$$\begin{cases} A(e_1) = 0 \ , \\ \vdots \\ A(e_i) = e_{i-1} \ , \quad 2 \leqslant i \leqslant r \ , \\ A(e_{r+1}) = a_{r-1} e_1 + a_{r-2} e_2 + \dots + a_{r-i} e_i + \dots + a_0 e_r \ ; \end{cases}$$

dans la base $(e_1, \dots, e_{r+1})$, la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & a_{r-1} \\ & 0 & 1 & & a_{r-2} \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_0 \\ 0 & & & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit P la matrice de $M_{r+1}(\mathbb{Z})$ définie par :

$$P_{11} = a_r \ , \quad P_{r+1,1} = 1 \ , \quad \text{autres } P_{i,j} = 0 \ ;$$

dans la base $(e_1, \dots, e_{r+1})$, P s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

On vérifie que

$$\begin{cases} \operatorname{Tr} P = \operatorname{Tr} PA^0 = a_r \ , \\ \operatorname{Tr} PA^i = a_{r-i} \ , \quad \forall\ 1 \leqslant i \leqslant r \ , \\ \operatorname{Tr} PA^j = 0 \ , \quad \forall\ j \geqslant r+1 \ . \end{cases}$$

On dira que le couple (P , A) représente le polynôme P .

Le cas général se déduit de ce cas ; en effet, soit $a = \dfrac{P(X)}{1 - Q(X)}$ une série rationnelle à coefficients entiers Q vérifiant $Q(0) = 0$. a s'écrit :

$$a = P(X)[1 - Q(X)]^{-1} = P(X)[1 + Q^*(X)] \quad ,$$

$Q^*(X)$ désignant le quasi-inverse de $Q(X)$.

Soit (R , B) un couple représentant le polynôme Q ; on suppose que $(R , B) \in M_p(\underset{\sim}{Z})$.

La série $Q^*(X)$ est représentée par le couple (R , C) , où la matrice C s'obtient de la manière suivante : On définit B_u comme la matrice qui a toutes ses colonnes nulles, exceptée la première qui est égale à la p-ième colonne de B .

On pose

$$C = B + B_u \quad .$$

Par récurrence sur n , on vérifie que

$$\mathrm{Tr}\, RB^n + \sum_{0<q\leq n} \mathrm{Tr}\, RB^q\, \mathrm{Tr}\, RC^{n-q} = \mathrm{Tr}\, RC^n \quad .$$

Soit (R , C) le couple de $M_p(\underset{\sim}{Z})$ qui représente la série $1 + Q^*(X)$.

Soit (P , A) le couple de $M_r(\underset{\sim}{Z})$ qui représente le polynôme $P(X)$.

Le couple (S , E) de $M_{p+r}(\underset{\sim}{Z})$ qui représente la série $P(X)(1 + Q^*(X))$ s'obtient de la manière suivante : On définit la matrice E de $M_{r+p}(\underset{\sim}{Z})$ suivante :

$$E = \left(\begin{array}{c|c} A & A_u \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \quad ,$$

où A_u est une (r , p)-matrice qui a toutes ses colonnes nulles, sauf la première qui est égale à la r-ième colonne de A .

S est la matrice de $M_{r+p}(\underset{\sim}{Z})$ suivante :

$$\begin{cases} S_{11} = a_0 \;, \quad \text{pour} \quad a = \sum_n a_n X^n \;, \\ S_{r+p,1} = 1 \;, \\ \text{autres} \quad S_{i,j} = 0 \;. \end{cases}$$

Par récurrence sur n , on vérifie que l'on a

$$a_n = \mathrm{Tr}\, SE^n \;, \qquad \forall\, n \geq 0 \quad .$$

Dans le cas où $X = (x)$, la démonstration de l'équivalence des définitions des séries rationnelles est démontrée.

Le but de l'exposé est d'étendre un résultat de Pólya [4] et un résultat de Cantor [2] à des séries rationnelles en variables non commutatives.

THÉORÈME I de Pólya [4]. - Soit (a_n) une suite d'entiers algébriques ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La série $\sum n a_n z^n$ est rationnelle ;
(ii) La série $\sum a_n z^n$ est rationnelle ;
(iii) La série $\sum n a_n z^{n-1}$ est rationnelle, et a tous ses résidus nuls.

Théorème de Pólya en variables non commutatives [3].

Conjecture. - Soit $a = \sum (a, f) f$ une série rationnelle sur l'alphabet X, où $X = (x, y)$, à coefficients entiers, telle que $|f|$ divise (a, f), $\forall f \in XX^*$; alors la série $a = \sum_f \frac{(a, f)}{|f|} f$ est rationnelle, i. e. il existe un entier $N \geqslant 2$, une représentation ν de X^* dans $M_N(\mathbb{Z})$, une matrice Q de $M_N(\mathbb{Z})$ telle que l'on ait

$$(a, f) = |f| \operatorname{Tr} Q\nu f, \qquad \forall f \in X^* .$$

a étant une série rationnelle, il existe un entier $k \geqslant 2$, une représentation μ de X^* dans $M_K(\mathbb{Z})$, telle que l'on ait

$$(a, f) = \operatorname{Tr} P\mu f, \qquad \forall f \in X^* .$$

Supposons $\det \mu x \neq 0$; alors la conjecture est vraie.

La démonstration de ce théorème nécessite la démonstration de certains lemmes préparatoires :

Soit $a = \sum_n a_n X^n$ une série rationnelle à une variable à coefficients entiers, elle s'écrit :

$$a = \frac{P(X)}{1 + Q(X)} ,$$

où P, Q sont des polynômes à coefficients entiers, et où $Q(0) = 0$.

A partir d'un certain rang n_0, les coefficients a_n s'écrivent :

$$a_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} P_i(n)\, \alpha_i^n ,$$

où les $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont des polynômes, et les $(\alpha_i^{-1})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont les racines distinctes du polynôme $1 + Q(X)$.

Si

$$a = \frac{P(X)}{1 + Q(X)} = E(X) + \frac{a_1^{(1)}}{1 - \alpha_1 X} + \dots + \frac{a_i^{(m_j)}}{(1 - \alpha_i X)^{m_j}} + \dots + \frac{a_r^{(m_r)}}{(1 - \alpha_r X)^{m_r}} ,$$

on a

$$P_i(X) = a_i^{(1)} + \dots + a_i^{(m_i)} \binom{X + m_i - 1}{m_i - 1} ,$$

la notation

$$\binom{X}{n} \quad \text{signifiant} \quad \frac{X(X-1) \dots (X-n+1)}{n!} .$$

Avec ces notations, on démontre le lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Pour tout</u> $p \geqslant 0$, <u>la série</u> $aX^p = \sum_n a_n X^{n+p}$ <u>est une série rationnelle admettant les mêmes pôles que la série</u> a . <u>Le résidu de la série</u> aX^p <u>au pôle</u> $\frac{1}{\alpha_i}$ <u>est donné par la formule</u> :

(1)
$$\operatorname{Res}(aX^p , \frac{1}{\alpha_i}) = - \frac{1}{\alpha_i^p} P_i(- p - 1) .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $a = \sum_n a_n X^n$. Soit $n \geqslant n_0$, $a_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} P_i(n) \alpha_i^n$. On a

$$(\operatorname{Res} a , \frac{1}{\alpha_i}) = - a_i^{(1)} = - P_i(- 1) .$$

Soit $p \geqslant 0$. La série

$$aX^p = \sum_n b_n X^n = \sum_n a_n X^{n+p} ,$$

où $b_n = a_{n-p}$, $\forall n \geqslant p$. b_n s'écrit d'une manière unique :

$$b_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} Q_i(n) \beta_i^n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} P_i(n - p) \alpha_i^{n-p} ,$$

d'où $s = r$, et, pour tout i , $\beta_i = \alpha_i$.

$$Q_i(n) \alpha_i^n = P_i(n - p) \alpha_i^{n-p} = \alpha_i^{-p} P_i(n - p) \alpha_i^n ,$$

d'où $(\operatorname{Res} aX^p , \frac{1}{\alpha_i}) = - Q_i(- 1) = - \alpha_i^p P_i(- p - 1)$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2 : Ce lemme est un lemme de combinatoire. On démontre que

(2)
$$\binom{n}{p} = \sum_{0 \leqslant r \leqslant p} (- 1)^{p+r} \binom{p}{r} \binom{r + n}{n} .$$

Démonstration. - On calcule de deux manières différentes le coefficient de X^n dans le développement de

$$\frac{(-X)^p}{(1-X)^{p+1}} = \frac{1}{1-X}\left(1 - \frac{1}{1-X}\right)^p ,$$

en remarquant que $\binom{r+n}{n}$ est le coefficient de X^n dans le développement de $(1-X)^{-r-1}$. On obtient

$$(-1)^p \binom{n}{n-p} = (-1)^p \binom{n}{p} = \sum_{0 \leq r \leq p} (-1)^r \binom{p}{r}\binom{r+n}{n} ,$$

d'où

$$\binom{n}{p} = \sum_{0 \leq r \leq p} (-1)^{p+r} \binom{p}{r}\binom{r+n}{n} ;$$

on en déduit l'égalité

$$(3) \qquad \sum_n \binom{n}{p} X^n = \frac{X^p}{(1-X)^{p+1}} .$$

En utilisant le lemme 2, on démontre le lemme 3. Soit k un entier, $k \geq 2$. Soient u une matrice unipotente de $M_K(\mathbb{Q})$, L une forme linéaire sur $M_K(\mathbb{Q})$; on pose

$$(4) \qquad P(n) = L(u^n) , \qquad \forall\, n \geq 0 .$$

Sous ces hypothèses, on a le lemme suivant :

LEMME 3. - La fonction P, définie par la relation (4), est un polynôme, et l'on a

$$(5) \qquad P(n) = L(u^n) , \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} .$$

Démonstration. - La matrice u étant unipotente, elle s'écrit $u = I + N$, où N est nilpotente. Donc la suite récurrente $(a_n)_{n \geq 0}$, où $a_n = L(u^n)$, s'écrit d'une manière unique :

$$a_n = P(n) \times 1^n = P(n) ,$$

où $P(X)$ est un polynôme.

$$P(n) = L(u^n) = L[(I+N)^n] = \sum_{0 \leq p \leq k-1} \binom{n}{p} L(N^p) .$$

En utilisant la relation (2), ceci s'écrit aussi :

$$P(n) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-1 \\ 0 \leq r \leq p}} (-1)^{p+r} \binom{p}{r}\binom{r+n}{n} L(N^p) .$$

Or,

$$\sum_{0\leq p\leq k-1} \binom{n}{p} N^p = \sum_{r\geq 0} \binom{r+n}{n} N^r(I+N)^{-r-1} \quad ,$$

d'où

$$P(n) = L \sum_{r\geq 0} \binom{r+n}{n} N^r(I+N)^{-r-1}$$

$$= L(I+N) + \dots + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+s-1)}{(s-1)!} L(N^{s-1}(I+N)^{-s}) + \dots$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!} LN^{k-1}(I+N)^{-k} \quad .$$

On calcule $P(-n)$, où $n \geq 0$,

$$P(-n) = L(I+N)^{-1} + \dots + \frac{(-n+1)(2-n)\dots(s-1-n)}{(s-1)!} LN^{s-1}(I+N)^{-s} + \dots$$
$$+ \frac{(1-n)(2-n)\dots(k-1-n)}{(k-1)!} LN^{k-1}(I+N)^{-k} \quad .$$

Or, pour $1 \leq s \leq k-1$, on a

$$\frac{(1-n)(2-n)\dots(s-1-n)}{(s-1)!} = (-1)^{s-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)}{(s-1)!}$$

$$= (-1)^{s-1} \binom{n-1}{s-1} \quad ,$$

$$P(-n) = L \sum_{s\geq 1} \binom{n-1}{s-1} (-1)^{s-1} N^{s-1}(I+N)^{-s}$$

$$= L(I+N)^{-1} (I - N(I+N)^{-1})^{n-1}$$

$$= L(I+N)^{-1} (I+N)^{-n+1} = L(I+N)^{-n} = L(u^{-n}) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme 3.

On aborde la démonstration du théorème de Pólya en variables non commutatives :

Soit X un alphabet fini. Sans perte de généralité, on peut se restreindre à un alphabet à deux lettres :

$$X = (x\ ,\ y) \quad .$$

Soient μ une représentation de X^* dans $M_k(\mathbb{Z})$, P une matrice de $M_k(\mathbb{Z})$ telle que l'on ait

$$|f| \quad \text{divise} \quad \operatorname{Tr} P\mu f \quad .$$

On suppose $\det \mu x \neq 0$.

Soit $\mu x = A$. μx admet une décomposition multiplicative unique ([1], p. 108),

$$\mu x = A_S(I + N) \quad ,$$

où A_S est une matrice semi-simple, et $I + N$ une matrice unipotente. A_S et $I + N$ sont des polynômes en A à coefficients rationnels.

Sous ces hypothèses, on a le lemme suivant :

LEMME 4. - <u>Pour tout</u> $f \in X^*$, <u>on a</u>

$$\mathrm{Tr}(I + N)^{-|f|}\, P\mu f = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour tout $f \in X^*$, on considère la série rationnelle à une variable :

$$r_f(T) = \sum_n \mathrm{Tr}\, P\mu f A^n\, T^{n+|f|} = \sum_n r_n\, T^{n+|f|} \quad .$$

On démontre que, si $\mathrm{Tr}\, P\mu f \neq 0$, alors la série $r_f(T)$ n'est pas réduite à un polynôme. En effet, soit f tel que $r_f(T)$ soit réduite à un polynôme, i. e.

$$r_f(T) = \mathrm{Tr}\, P\mu f + \ldots + \mathrm{Tr}\, P\mu f A^{N-1}\, T^{N-1} \quad .$$

La matrice A^N vérifie son polynôme caractéristique :

$$X^k + \alpha_1 X^{k-1} + \ldots + \alpha_k = 0 \ , \qquad \text{avec} \quad \alpha_k \neq 0 \quad ,$$

puisque A est inversible. D'où

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f A^{Nk} + \ldots + \alpha_k\, \mathrm{Tr}\, P\mu f = 0 \quad .$$

Or

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f A^{Ni} = 0 \ , \qquad \forall\, i \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant k \quad ,$$

d'où

$$\alpha_k\, \mathrm{Tr}\, P\mu f = 0 \implies \mathrm{Tr}\, P\mu f = 0 \quad .$$

Si $\mathrm{Tr}\, P\mu f \neq 0$, alors la série $r_f(T)$ n'est pas réduite à un polynôme. On a

$$r_n = \mathrm{Tr}\, P\mu f A^n = \mathrm{Tr}\, P\mu f(I + N)^n A_S^n \quad .$$

On peut supposer A_S diagonale, d'où

$$r_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} (P\mu f(I + N)^n)_{jj}\, (A_S^n)_{jj} \quad .$$

Par hypothèse, $n + |f|$ divise $\mathrm{Tr}\, P\mu f A^n$, $\forall\, n \geqslant 0$. D'après la condition (iii) de Pólya, on en déduit que la série rationnelle $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{Tr}\, P\mu f A^n\, T^{n+|f|-1}$ a tous ses résidus nuls, ce qui s'écrit, d'après les lemmes 1 et 3,

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k} (P\mu f(I+N)^{-|f|})_{jj} = \mathrm{Tr}\, P\mu f(I+N)^{-|f|} = 0$$

$$= \mathrm{Tr}(I+N)^{-|f|}\, P\mu f = 0 \quad .$$

La démonstration du théorème de Pólya consiste à expliciter l'égalité :

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f(I+N)^{-|f|} = 0 \quad .$$

Soit M la matrice définie par la relation

$$(I+N)(I+M) = I \quad .$$

Il est immédiat que M est une matrice nilpotente, et qu'elle est à coefficients rationnels.

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f(I+N)^{-|f|} = \mathrm{Tr}\, P\mu f(I+M)^{|f|} = 0 \quad ,$$

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f = \sum_{1\leqslant i\leqslant k-1} \binom{|f|}{i} \mathrm{Tr}\, P\mu f M^i \quad .$$

Soit d le plus petit entier positif non nul, tel que $Md \in M_k(\underset{\sim}{Z})$. On considère la série de terme général

$$(k-1)!\, d^{k-1} \frac{\mathrm{Tr}\, P\mu f}{|f|} = \sum_{1\leqslant i\leqslant k-1} \frac{(k-1)!}{i!} d^{k-1-i}(|f|-1)\ldots(|f|-i+1)\, \mathrm{Tr}(Md)^i P\mu f \quad .$$

Or, pour chaque i , la série de terme général

$$(|f|-1)\times(|f|-2)\times\ldots\times(|f|-i+1)\, \mathrm{Tr}(Md)^i\, P\mu f$$

est une série rationnelle ; en effet, c'est le produit de Hadamard des séries rationnelles [6] :

$$\sum_f (|f|-1)f \ldots \sum_f (|f|-2)f \ldots \sum_f (|f|-i+1)f \sum_f (\mathrm{Tr}(Md)^i\, P\mu f)f \quad ;$$

donc la série de terme général $(k-1)!\, d^{k-1} \frac{\mathrm{Tr}\, P\mu f}{|f|}$ est une série rationnelle. On en déduit, d'après un résultat de [5], que la série de terme général $\frac{\mathrm{Tr}\, P\mu f}{|f|}$ est rationnelle. Ce qui démontre le théorème dans le cas où $\det \mu x \neq 0$.

<u>Cas où</u> $\det \mu x = \det \mu y = 0$: Soit $g \in X^*$. μg s'écrit d'une manière unique :

$$\mu g = (\mu g)_S + (\mu g)_n \qquad ([1],\ p.\ 108) \quad ,$$

où $(\mu g)_S$ est une matrice diagonalisable de $M_k(\underset{\sim}{Q})$, et $(\mu g)_n$ une matrice nilpotente de $M_k(\underset{\sim}{Q})$, qui commutent. On démontre facilement qu'il existe une matrice nilpotente Mg telle que, pour tout $f \in X^*$, on ait

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f(I+Mg)^{|f|/|g|}\, (\mu g)_S^n = 0 \ , \qquad \forall\, n \geqslant 1 \quad .$$

Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre engendrée par les parties semi-simples des polynômes homogènes en μx et μy.

- Si $P \in \mathfrak{A}P\mathfrak{A}$, alors la série de terme général $\frac{\mathrm{Tr}\ P\mu f}{|f|}$ est rationnelle ;
- Si $P \notin \mathfrak{A}P\mathfrak{A}$, le problème reste ouvert.

Si $\det \mu x \neq 0$, et si $\frac{\mathrm{Tr}\ P\mu f}{|f|} = \mathrm{Tr}\ Q\nu f$, $\forall\, f \in X^*$, on a alors $\det \nu x \neq 0$. En effet, si $a = \sum_f (\mathrm{Tr}\ P\alpha f)f$ et $b = \sum_f (\mathrm{Tr}\ Q\beta f)f$ sont deux séries rationnelles telles que $\det \alpha x \det \beta x \neq 0$, on a

$$\det(\alpha x \oplus \beta x) = \det \alpha x \det \beta x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \det \alpha x \otimes \beta x \neq 0 \quad .$$

On a vu que la série de terme général $\frac{\mathrm{Tr}\ P\mu f}{|f|}$ est somme de séries de la forme $(|f| - 1) \ldots (|f| - i + 1)\ \mathrm{Tr}(Md)^i\ P\mu f$. On peut associer facilement une représentation inversible à la série $\sum_f (|f| - j)f$. D'autre part, la série de terme général $\mathrm{Tr}(Md)^i\ P\mu f$ est telle que $\det \mu x \neq 0$. Ceci montre que la série

$$\frac{\mathrm{Tr}\ P\mu f}{|f|} = \mathrm{Tr}\ Q\nu f$$

est telle que $\det \nu x \neq 0$.

Ceci va nous servir à démontrer le théorème de Cantor [2] en variables non commutatives.

THÉORÈME de Cantor [2]. - Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers algébriques, et F un polynôme non nul à coefficients complexes. Si la série $\sum_n F(n)\, a_n\, z^n$ est rationnelle, alors la série $\sum a_n\, z^n$ l'est aussi.

Enoncé du théorème de Cantor en variables non commutatives. - Soient $(r\ ,\ f)_f$ une suite d'entiers algébriques, et F un polynôme non nul à coefficients complexes. Si la série $\sum_f F(|f|)(r\ ,\ f)f$ est rationnelle, alors la série $\sum_f (r\ ,\ f)f$ est aussi rationnelle.

La démonstration de Cantor nécessite la démonstration de deux lemmes préparatoires que j'énonce. Comme leur démonstration est exactement calquée sur celle de Cantor, je ne referai pas ces démonstrations.

LEMME 1. - Soient α un nombre algébrique, et $(r\ ,\ f)_f$ une suite d'entiers algébriques. Si la série $\sum_f (|f| - \alpha)(r\ ,\ f)f$ est rationnelle, alors la série $\sum_f (r\ ,\ f)f$ est rationnelle.

LEMME 2. - <u>Soit</u> F <u>un polynôme non nul à coefficients complexes, et soit</u> $(r\ ,\ f)_f$ <u>une suite d'entiers algébriques. Si la série</u> $\sum_f F(|f|)(r\ ,\ f)f$ <u>est rationnelle, alors il existe un polynôme</u> G <u>à coefficients algébriques tel que</u> $\sum_f G(|f|)(r\ ,\ f)f$ <u>soit aussi rationnelle</u>.

<u>Démonstration du théorème de Cantor</u>. - D'après le lemme 2, on peut supposer F à coefficients entiers algébriques ; et soit α une racine de F . D'après le lemme de Gauss, le polynôme $G(X) = \frac{F(X)}{X - \alpha}$ est aussi à coefficients entiers algébriques.

Supposons que la série

$$\sum_f (\mathrm{Tr}\ P\mu f)f = \sum_f F(|f|)(r\ ,\ f)f$$

soit telle que $\det \mu x \neq 0$. D'après le lemme 1, la série $\sum_f \frac{F(|f|)}{|f| - \alpha}(r\ ,\ f)f$ est rationnelle, i. e. il existe un entier $k' \geqslant 2$, une représentation ν de X^* dans $M_{k'}(\underline{Z})$, une matrice Q de $M_{k'}(\underline{Z})$ telle que l'on ait

$$G(|f|)(r\ ,\ f) = \mathrm{Tr}\ Q\nu f\ , \qquad \forall\ f \in X^*\ ,$$

avec la condition $\det \nu x \neq 0$.

Par récurrence sur le degré de F , on démontre le théorème de Cantor en variables non commutatives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[2] CANTOR (David G.). - On arithmetic properties of coefficients of rational functions, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 55-58.

[3] LAMÈCHE (Khira). - Extension d'un théorème de G. Pólya à des séries rationnelles à variables non commutatives, Thèse 3e cycle, Paris, 1970.

[4] PÓLYA (G.). - Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 151, 1921, p. 1-31.

[5] SCHÜTZENBERGER (M.-P.). - On the definition of a family of automata, Inform. and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.

[6] SCHÜTZENBERGER (M.-P.). - On a theorem of R. Jungen, Proc. Amer. math. Soc., t. 13, 1962, p. 885-890.

(Texte reçu le 8 février 1971)

Khira LAMÈCHE
7 rue Barrault
75 - PARIS 13