François Dress

Stathmes euclidiens et séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. nº 2, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 2, 7 p.

16 novembre 1970

STATHMES EUCLIDIENS ET SÉRIES FORMELLES

par François DRESS

1. Introduction. Anneaux euclidiens.

Nous nous proposons de démontrer qu'un anneau A est euclidien si, et seulement si, l'anneau des séries formelles généralisées $\mathfrak{a}_X = S^{-1} A[[X]]$ est euclidien (S est la partie multiplicativement stable $\{X^n \mid n \geqslant 0\}$). On notera que cette propriété est classique en remplaçant euclidien par principal. Auparavant, nous allons rappeler un certain nombre de définitions et de théorèmes relatifs aux anneaux euclidiens. Ces généralités ont été intoduites par T. MOTZKIN [3] mais nous suivrons ici la présentation qu'en a donnée P. SAMUEL [4], avec parfois des additifs personnels à la terminologie.

Définition. - Etant donnés un anneau commutatif intègre A et un ordinal π, on dit qu'une application $\varphi : A \to \pi$ est un préstathme euclidien (sur A) si elle vérifie

(E.1) $\varphi(0) = 0$,

(E.2) Si a , $b \in A$, $b \neq 0$, il existe q , $r \in A$ tels que $a = bq + r$, avec $\varphi(r) < \varphi(b)$.

On dit qu'un anneau A est euclidien s'il possède un préstathme.

Définition. - On dit que le préstathme $\varphi : A \to \pi$ est un stathme euclidien si, de plus, il vérifie

(E.3) Si a , $b \in A$, $a \neq 0$, (b divise a) entraîne $(\varphi(b) < \varphi(a))$.

On dit qu'un stathme φ est incompressible si $\operatorname{Im} \varphi$ est un segment initial de π , et alors $((\varphi(X) = 1) \Longleftrightarrow (X$ est inversible$)$.

On peut munir l'ensemble des préstathmes sur un anneau euclidien d'une relation d'ordre en posant

$$\varphi \leqslant \psi \text{ si, pour tout } a \in A , \ \varphi(a) \leqslant \psi(a) .$$

PROPOSITION. - Tout anneau euclidien possède un stathme euclidien (i. e. l'existence d'un préstathme entraîne celle d'un stathme).

Démonstration. - Etant donné un préstathme φ , on définit un stathme φ' (à valeur sur le même ordinal), en posant

$$\varphi'(x) = \inf_{x \mid y, y \neq 0} \varphi(y) \leqslant \varphi(x) .$$

Il est clair que cette définition entraîne pour φ' , la propriété (E.3) . Comme (E.1) est trivialement vérifié, il reste à étudier (E.2) .

On a $\varphi'(b) = \varphi(y_0) = \varphi(bx_0)$, et la "division", selon φ' , résulte de celle suivant φ , ainsi :

$$(a = (bx_0)q + r \quad \text{avec} \quad \varphi(r) < \varphi(bx_0))$$
$$\Longrightarrow (a = b(x_0\, q) + r \quad \text{avec} \quad \varphi'(r) \leqslant \varphi(r) < \varphi(bx_0) = \varphi'(b)) \; .$$

Remarque. - Il convient de rappeler le résultat classique que tout anneau euclidien est principal.

2. Le plus petit stathme.

Notre but n'étant pas de faire un exposé complet sur les anneaux euclidiens (encore que la théorie générale n'aille guère loin), nous passons tout de suite au résultat central et essentiel en ce qui nous concerne.

THÉORÈME. - Si un anneau A est euclidien, il possède un plus petit préstathme, qui est également son plus petit stathme.

Démonstration. - On considère l'ensemble de tous les stathmes euclidiens de A , $\varphi_\alpha : A \to \mathfrak{N}_\alpha$, et on définit φ par

$$\varphi(x) = \inf_\alpha \varphi_\alpha(x)$$

(il est clair que $\operatorname{Im} \varphi$ est un ordinal). La condition (E.1) est trivialement vérifiée par φ , et on démontre aisément que (E.2) est vérifiée.

φ_α étant tel que $\varphi(b) = \varphi_\alpha(b)$, on a la division

$$a = bq + r \; , \text{ avec } \; \varphi_\alpha(r) < \varphi_\alpha(b) = \varphi(b) \; ,$$

d'où $\varphi(r) \leqslant \varphi_\alpha(r) < \varphi(b)$.

Et le préstathme φ est un stathme, en vertu de la proposition du paragraphe précédent.

Etant donné un anneau commutatif intègre A , on peut définir par récurrence sur les ordinaux les ensembles suivants :

$$S_0 = \{0\} \; ,$$
$$S'_n = \cup_{k<n} S_k \; ,$$
$$S_n = \{b \mid b \in A - S'_n \text{ tel que l'application canonique } S'_n \to A/bA \text{ soit surjective}\} .$$

On remarquera que la propriété " $S'_n \to A/bA$ est surjective" équivaut à "pour tout $a \in A$, il existe $r \in S'_n$ tel que $a - r \in bA$, i. e. $a = bq + r$ ".

THÉORÈME FONDAMENTAL. - A est un anneau euclidien si, et seulement si, il existe un ordinal Π tel que

$$A = \bigcup_{n \in \Pi} S_n .$$

Et dans ces conditions, l'application $\psi : A \to \Pi$, définie par $\psi(x) = n$ si $x \in S_n$, est le plus petit stathme de A.

Démonstration. - Elle s'appuie sur le résultat suivant (que nous ne prouverons pas).

LEMME. - Soient A un anneau commutatif intègre, Π un ordinal, et φ une application de A dans Π vérifiant $\varphi(0) = 0$. Pour tout $n \in \Pi$, on pose $T'_n = \{x \in A \mid \varphi(x) < n\}$. Alors φ est un préstathme euclidien si, et seulement si, pour tout b tel que $\varphi(b) = n$, l'application canonique $T'_n \to A/bA$ est surjective.

Ceci étant acquis, on voit sans difficulté que, pour tout préstathme euclidien φ sur un anneau A, on a $T'_n \subset S'_n$ (on raisonne par l'absurde sur le plus petit n tel que $T'_n \not\subset S'_n$).

Alors, comme on a $\bigcup_{n \in \Pi} T'_n = A$ pour ce préstathme particulier, on en déduit $\bigcup_{n \in \Pi} S'_n = A$ (équivalent à $\bigcup_{n \in \Pi} S_n = A$), et le préstathme défini, selon le théorème, par les S_n est manifestement le plus stathme de A.

Inversement, s'il existe un ordinal Π tel que $\bigcup_{n \in \Pi} S_n = A$, l'application φ, définie par les S_n, est, d'après le lemme, un préstathme, et donc le plus petit stathme.

3. Stathmes euclidiens sur les anneaux de séries formelles.

On remarquera tout d'abord qu'aucune propriété de transfert n'est possible avec les anneaux "ordinaires" de séries formelles. Si A est un corps, $\mathfrak{A} = A[[X]]$ est euclidien, car c'est un anneau de valuation discrète (mais ce n'est pas un corps), et si A n'est pas un corps, l'anneau $\mathfrak{A}$ n'est pas principal.

Nous nous intéresserons donc aux anneaux de séries formelles généralisées que nous avons définis dans notre introduction : $\mathfrak{A}_X = S^{-1} A[[X]]$.

Définition. - Soient A un anneau (commutatif intègre, dans ce qui suit), $\mathfrak{A}_X$ l'anneau $S^{-1} A[[X]]$, et E un ensemble. Si φ est une application de A dans E, on désignera par φ_X l'application de $\mathfrak{A}_X$ dans E, définie, si

$$F(X) = \sum_{n \geq h} a_n X^n \quad (h \in \mathbb{Z},\ a_h \neq 0), \text{ par } \varphi_X(F(X)) = \varphi(a_h) .$$

Inversement, étant donnée une application de $\mathfrak{A}_X$ dans E, on dira qu'elle est

A-déterminée si elle ne dépend que de la valeur du coefficient initial de la série formelle considérée, et on la notera alors φ_X (φ étant l'application correspondante de A dans E).

THÉORÈME. - La fonction $\varphi \mapsto \varphi_X$ est une bijection entre les stathmes euclidiens de A et les stathmes euclidiens A-déterminés de $\mathfrak{a}_X$.

Démonstration.

1° Soit φ un stathme sur A . Alors φ_X est un préstathme sur $\mathfrak{a}_X$. Il faut donc établir l'existence d'une division euclidienne dans $\mathfrak{a}_X$. Nous en avons déjà donné la démonstration dans [1] , nous allons la rappeler brièvement.

On se place dans le corps $K((X))$, K étant le corps des fractions de A . Etant données deux séries $F(X)$ et $G(X)$ de $\mathfrak{a}_X$, ou bien leur quotient est dans $\mathfrak{a}_X$, i. e. $F(X)$ est divisible par $G(X)$, ou bien il existe un indice λ tel que

$$F(X)/G(X) = c_s X^s + c_{s+1} X^{s+1} + \dots + c_\lambda X^\lambda + \dots ,$$
$$\text{avec } c_s , \dots , c_{\lambda-1} \in A , \quad c_\lambda \notin A .$$

Si q est le coefficient initial de $G(X)$, on vérifie alors sans difficulté que $qc_\lambda \in A$. Cela conduit à poser

$$c_\lambda = c'_\lambda + q'/q , \text{ avec } c'_\lambda \in A \text{ et } \varphi(q') < \varphi(q) .$$

En définissant ensuite le polynôme généralisé

$$P(X) = c_s X^s + \dots + c_{\lambda-1} X^{\lambda-1} + c'_\lambda X^\lambda ,$$

on montre que la série $R(X) = F(X) - G(X)\, P(X) \in \mathfrak{a}_X$ vérifie $\varphi_X(R) < \varphi_X(F)$, car son coefficient initial est q' .

On termine alors la démonstration en remarquant que φ_X est non seulement un préstathme, mais aussi un stathme sur $\mathfrak{a}_X$, ce qui découle immédiatement du fait que φ est un stathme : si G divise F , le coefficient initial de G divise le coefficient initial de F .

2° Soit φ_X un stathme A-déterminé sur $\mathfrak{a}_X$. Si φ est un préstathme sur A , il sera là aussi trivial de constater que c'est un stathme. Il suffit donc d'établir l'existence d'une division euclidienne dans A .

Etant donnés $a , b \in A$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, on divise a par b dans $\mathfrak{a}_X$:

$$a = b(q_s X^s + q_{s+1} X^{s+1} + \dots) + (r_t X^t + r_{t+1} X^{t+1} + \dots)$$
$$\text{avec } \varphi_X(r_t X^t + \dots) < \varphi_X(b) , \text{ i. e. } \varphi(r_t) < \varphi(b) .$$

Deux cas sont alors possibles :

ou $s \leqslant -1$, et alors $s = t$, $r_t = - bq_s$, d'où une contradiction avec la propriété (E.3) des stathmes euclidiens, car $\varphi_X(r_t X^t + \dots) = \varphi_X(r_t) < \varphi_X(b)$;

ou $s \geqslant 0$, et alors $t \geqslant 0$, ce qui donne la division euclidienne cherchée : $a = bq_0 + r_0$ (q_0 pouvant éventuellement être nul), avec $\varphi(r_0) < \varphi(b)$ (si $t = 0$) ou $r_0 = 0$ (si $t > 0$).

THÉORÈME. - Si $\mathfrak{A}_X$ est un anneau euclidien, alors son plus petit stathme ψ est A-déterminé.

Démonstration. - Nous allons prouver par récurrence sur les ordinaux n, la propriété suivante : Si une série $b_k X^k + b_{k+1} X^{k+1} + \dots$ $(b_k \neq 0)$ appartient à l'ensemble S_n (défini au paragraphe 1), alors toute autre série de coefficient initial b_k appartient à S_n.

Supposons donc que cette propriété soit vraie pour tous les ordinaux inférieurs à n. Si on considère un élément $a \in A$, $a \neq 0$, on peut le diviser dans $\mathfrak{A}_X$ par la série $b_k + b_{k+1} X + \dots = X^{-k}(b_k X^k + b_{k+1} X^{k+1} + \dots)$ qui est également de (plus petit) stathme n (ceci pour simplifier les écritures) :

$$a = (b_k + b_{k+1} X + \dots)(q_s X^s + \dots) + (r_t X^t + \dots)$$
$$\text{avec } \psi(r_t X^t + \dots) < \psi(b_k + \dots) = n .$$

Deux cas sont alors possibles :

ou $s \leqslant -1$, et alors $s = t$, $r_t = -b_k q_s$. Mais alors

$$\psi(r_t X^t + \dots) < \psi(b_k + \dots) = n$$

entraîne, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\psi(r_t) = \psi(r_t X^t + \dots) < n .$$

Comme b_k divise r_t, on en déduit $\psi(b_k) \leqslant \psi(r_t) < n$ et, en appliquant une seconde fois l'hypothèse de récurrence, on aboutit à une contradiction :

$$\psi(b_k) = \psi(b_k + b_{k+1} X + \dots) < n ;$$

ou $s \geqslant 0$, et alors $t \geqslant 0$, ce qui donne une division euclidienne dans A de a par b_k : $a = b_k q_0 + r_0$ (q_0 pouvant éventuellement être nul), avec $\psi(r_0) = \psi(r_0 + r_1 X + \dots) < n$ ou $r_0 = 0$.

Ayant ainsi montré que tout $a \in A$, $a \neq 0$, peut être divisé euclidiennement dans A par b_k, avec le plus petit stathme ψ de $\mathfrak{A}_X$, on applique alors la méthode utilisée au 1° de la démonstration du théorème 1 ; on montre de cette manière que, si $F(X)$ est une série quelconque de $\mathfrak{A}_X$, et $G(X)$ une série de coefficient initial b_k, on peut toujours écrire une division

$$F(X) = G(X)\ P(X) + R(X) , \text{ avec } \psi(R(X)) < n .$$

Cela montre que, pour toute série $G(X) \in \mathfrak{a}_X$ de coefficient initial b_k, on a $\psi(G(X)) = n$. En effet, si $\psi(G(X))$ était supérieur à n, on pourrait, d'après ce qui précède, poser $\psi_1(G(X)) = n$ et $\psi_1(F(X)) = \psi(F(X))$ pour tout $F(X) \neq G(X)$, et obtenir ainsi un préstathme ψ_1 inférieur au plus petit stathme ψ, ce qui est impossible ; par ailleurs, l'hypothèse de récurrence interdit que l'on ait $\psi(G(X)) < n$, ce qui entraînerait $\psi(b_k + b_{k+1} X + \dots) < n$ également.

THÉORÈME. - Pour que $\mathfrak{a}_X = S^{-1} A[[X]]$ soit euclidien, il faut et il suffit que A soit euclidien. Dans ce cas, leurs plus petits stathmes respectifs sont en correspondance dans la bijection $\varphi \mapsto \varphi_X$ (précédemment définis).

Démonstration. - Elle se fait par simple conjonction des théorèmes précédents.

4. Stathmes topologiques.

L'existence de stathmes A-déterminés sur $\mathfrak{a}_X$ est clairement en rapport avec la topologie d'anneau définie par la famille fondamentale $X^n A[[X]]$ de voisinages de 0 (topologie que l'on pourrait abusivement appeler X-adique).

Définition. - Etant donné un anneau B, muni d'une topologie $\mathcal{T}$, on dit qu'un stathme euclidien φ sur B est compatible avec $\mathcal{T}$ s'il satisfait la propriété suivante :

Tout $x \in B$, $x \neq 0$, possède un voisinage $V(x)$ tel que, quel que soit $y \in V(x)$, $\varphi(y) = \varphi(x)$.

(Ce qui revient à exprimer que les ensembles $\{x \in B \mid \varphi(x) = n\}$, à l'exception de $\{0\}$ si la topologie n'est pas discrète, sont ouverts dans $\mathcal{T}$.)

On dit alors que B est un anneau topologique euclidien (pour la topologie $\mathcal{T}$).

Il existe des anneaux topologiques euclidiens non triviaux, les anneaux $\mathfrak{a}_X$ (lorsque A est euclidien), munis de la topologie X-adique, en sont des exemples.

Inversement, on peut se demander si, étant donnés un anneau euclidien B et une topologie $\mathcal{T}$ sur B, il existe un stathme φ compatible avec $\mathcal{T}$. On peut même se demander si, étant donné un anneau euclidien, il existe au moins une topologie (différente de la topologie discrète) et un stathme compatible.

En général, la réponse est négative.

PROPOSITION. - Soit B un anneau euclidien. Si son groupe des unités B^* est fini, alors il n'existe sur B aucun stathme φ compatible avec une topologie autre que la topologie discrète.

(C'est en particulier le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$.)

Si le stathme φ est compatible avec la topologie $\mathcal{T}$, il s'ensuit, d'après la remarque faite plus haut, que l'ensemble $\{x \in B \mid \varphi(x) = 1\}$ est ouvert. Or, en se limitant au cas d'un stathme incompressible (ce qui n'entraîne, en fait, aucune restriction), cet ensemble n'est autre que B^* , le groupe des unités que nous avons supposé fini. Nous pouvons alors conclure, car on montre que, si un anneau topologique intègre possède un ouvert (non vide) fini, sa topologie est la topologie discrète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DRESS (F.). - Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 1, 1968, p. 1-44. (Thèse Sc. math. Paris, 1967.)

[2] DRESS (F.). - Stathmes euclidiens et séries formelles, Acta arithmetica, Warszawa, t. 19, 1971, p. 261-265.

[3] MOTZKIN (T. S.). - The euclidean algorithm, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 1142-1146.

[4] SAMUEL (P.). - Anneaux euclidiens (rédigé par Mme RHIN), Séminaire d'Algèbre et Théorie des nombres, Faculté des Sciences de Caen, 1968.

(Texte reçu le 23 décembre 1970)

François DRESS
Université de Bordeaux
Mathématiques
351 cours de la Libération
33 - TALENCE