Peter Karl Josef Draxl

Remarques sur le groupe de classes du composé de deux corps de nombres linéairement disjoints

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. nº 24, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A18_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 24, 12 p.
17 mai 1971

REMARQUES SUR LE GROUPE DE CLASSES DU COMPOSÉ DE DEUX CORPS DE NOMBRES LINÉAIREMENT DISJOINTS

par Peter Karl Josef DRAXL

Introduction.

Soient k_1 , k_2 deux corps de nombres (c'est-à-dire des extensions finies du corps $\underset{\sim}{Q}$ des rationnels), et soit k leur composé (c'est-à-dire l'intersection de tous les corps qui contiennent k_1 et k_2). On note Cl_* le groupe de classes de $*$ ($* = k$, k_1 , k_2) , et on considère l'homomorphisme

$$\pi : Cl_k \longrightarrow Cl_{k_1} \oplus Cl_{k_2}$$

$$\mathfrak{C} \longrightarrow (N_{k/k_1}(\mathfrak{C}) , N_{k/k_2}(\mathfrak{C})) ,$$

où N_{k/k_i} désigne l'opérateur norme relative de l'extension k/k_i $(i = 1 , 2)$.

Le but de cet exposé est l'étude de coker π ; plus précisément, on cherche des conditions suffisantes pour que π soit surjectif. Pour cela, on se restreint au cas où k_1 et k_2 sont linéairement disjoints sur $\underset{\sim}{Q}$, c'est-à-dire

$$[k:\underset{\sim}{Q}] = [k_1:\underset{\sim}{Q}].[k_2:\underset{\sim}{Q}] ,$$

puisque, autrement, la surjectivité de π est moins vraisemblable.

Les méthodes utilisées ci-dessous sont liées étroitement à celles de mon exposé [2] et de mon article [3], et elles permettent une étude de coker π plus détaillée que celle donnée ici.

J'espère pouvoir bientôt discuter tous ces aspects ailleurs (probablement dans un article à paraître dans les Archiv der Mathematik, y compris une étude de ker π .

1. Le module B .

Soit G un groupe fini, et soit U un sous-groupe de G . Soit Y un G-module à gauche. On note Y^G le sous-module de Y formé des éléments invariants par G . Alors, on a un $\underset{\sim}{Z}$-homomorphisme ($\underset{\sim}{Z}$ = anneau des entiers rationnels)

$$N_{U/G} : Y^U \longrightarrow Y^G$$

$$y \longmapsto \sum_{s (\mathrm{mod}\ U)} {}^s y$$

appelé la <u>norme relative</u> (si $U = \{1_G\}$, on écrit N_G au lieu de $N_{\{1_G\}/G}$, et on l'appelle <u>norme absolue</u>). Soit Y un deuxième G-module à gauche. Alors, on peut donner à $Y \otimes Y'$ ($\otimes$ est toujours une abréviation pour $\otimes_{\underset{\sim}{Z}}$) la structure d'un G-module à gauche telle qu'on ait

$$^s(y \otimes y') = {}^sy \otimes {}^sy' \quad (s \in G \,,\, y \in Y \,,\, y' \in Y') \;.$$

L'algèbre $\underset{\sim}{Z}[G]$ du groupe G sur $\underset{\sim}{Z}$ est un G-module à gauche et à droite. Donc, quel que soit X comme U-module à gauche, on munit $\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_\Lambda X$ ($\Lambda = \underset{\sim}{Z}[U]$) d'une structure de G-module à gauche en posant :

$$^s(t \otimes_\Lambda x) = (st) \otimes_\Lambda x \quad (s \,,\, t \in G \,,\; x \in X) \;.$$

Il est bien connu, et la démonstration est immédiate, qu'on a un isomorphisme

$$(1) \qquad \begin{gathered} X^U \xrightarrow{\simeq} (\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_\Lambda X)^G \\ x \longmapsto \textstyle\sum_{s \,(\mathrm{mod}\; U)} s \otimes_\Lambda x \;. \end{gathered}$$

D'autre part, l'application

$$(2) \qquad \begin{gathered} \underset{\sim}{Z}[G] \otimes_\Lambda (X \otimes Y \xrightarrow{\simeq} (\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_\Lambda X) \otimes Y \\ s \otimes_\Lambda (x \otimes y) \longmapsto (s \otimes_\Lambda x) \otimes {}^sy \end{gathered}$$

est un G-isomorphisme.

Si on pose en particulier $X = \underset{\sim}{Z}$ (avec l'opération triviale de G sur $\underset{\sim}{Z}$), la combinaison de (1) et (2) nous donne un isomorphisme

$$(3) \qquad \begin{gathered} Y^U = (\underset{\sim}{Z} \otimes Y)^U \xrightarrow{\simeq} ((\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_\Lambda \underset{\sim}{Z}) \otimes Y)^G \\ y \longmapsto \textstyle\sum_{s \,(\mathrm{mod}\; U)} (s \otimes_\Lambda 1) \otimes {}^sy \;, \end{gathered}$$

qui sera très utile dans ce qui suit.

Notons maintenant $\hat{H}^q(G \,,\, Y)$ ($q \in \underset{\sim}{Z}$) les <u>groupes de cohomologie modifiés</u> (c'est-à dire au sens de TATE), alors le <u>lemme de Shapiro</u> (voir [1], chap. IV) et (2) nous donnent un isomorphisme

$$(4) \qquad \hat{H}^q(G \,,\, (\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_\Lambda \underset{\sim}{Z}) \otimes Y) \simeq \hat{H}^q(U \,,\, Y) \quad (q \in \underset{\sim}{Z}) \;.$$

Soit maintenant K la clôture galoisienne de k (c'est-à-dire l'intersection de toutes les extensions galoisiennes sur $\underset{\sim}{Q}$ qui contiennent k_1 et k_2), et soit en particulier $G = \mathrm{Gal}(K/\underset{\sim}{Q})$ son groupe de Galois. On prend ($i = 1 \,,\, 2$)

$$U = g_i = \mathrm{Gal}(K/k_i) \quad \text{et} \quad \Lambda_i = \underset{\sim}{Z}[g_i] \;,$$

et on définit un G-module à gauche B par la suite exacte

(5) $$0 \longrightarrow B \longrightarrow (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\Lambda_1} \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\Lambda_2} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 ,$$

où β *est le* G-*homomorphisme donné par la formule*

$$(s \otimes_{\Lambda_1} m_s , t \otimes_{\Lambda_2} n_t) \longmapsto m_s - n_t .$$

Comme tous les modules ci-dessus sont libres sur $\mathbb{Z}$, on obtient, compte tenu de (3), (4) et (5), une suite exacte

(6) $$\begin{gathered} 0 \longrightarrow (B \otimes Y)^G \longrightarrow Y^{g_1} \oplus Y^{g_2} \xrightarrow{\beta_Y} Y^G \longrightarrow \\ \longrightarrow \hat{H}^1(G , B \otimes Y) \longrightarrow \hat{H}^1(g_1 , Y) \oplus \hat{H}^1(g_2 , Y) , \\ (y_1 , y_2) \longmapsto N_{g_1/G}(y_1) - N_{g_2/G}(y_2) , \end{gathered}$$

quel que soit Y comme G-module à gauche.

LEMME 1. - *Soit* $\operatorname{pgcd}([G:g_1], [G:g_2]) = 1$ (*c'est-à-dire* $\operatorname{pgcd}([k_1:\mathbb{Q}], [k_2:\mathbb{Q}]) = 1$); *alors* β_Y *est surjectif*.

La démonstration est évidente, car chaque $y \in Y^G$ s'écrit sous la forme

$$y = 1y = (m_1[G:g_1] - m_2[G:g_2])\, y = N_{g_1/G}(m_1\, y) - N_{g_2/G}(m_2\, y) .$$

C. Q. F. D.

2. *Le module* A .

Soit $g = g_1 \cap g_2 = \operatorname{Gal}(K/k)$, et soit $\Lambda = \mathbb{Z}[g]$. Nous considérons l'ensemble fini

$$E = \{(s \otimes_{\Lambda_1} 1 , t \otimes_{\Lambda_2} 1\}_{s (\mathrm{mod}\ g_1), t (\mathrm{mod}\ g_2)} \subset B ;$$

c'est un ensemble G-stable avec

$$\operatorname{card}(E) = [G:g_1].[G:g_2] = [k_1:\mathbb{Q}].[k_2:\mathbb{Q}] .$$

Comme g est le stabilisateur de l'élément $(1_G \otimes_{\Lambda_1} 1 , 1_G \otimes_{\Lambda_2} 1) \in E$, G opère sur E transitivement, si, et seulement si, on a $[k:\mathbb{Q}] = [G:g] = \operatorname{card}(E)$, c'est-à-dire si, et seulement si, les corps k_1 et k_2 sont *linéairement disjoints*. Donc :

Dans tout ce qui suivra, nous supposerons que k_1 *et* k_2 *sont linéairement disjoints sur* $\mathbb{Q}$.

Comme E engendre B comme $\mathbb{Z}$-module, l'hypothèse ci-dessus entraîne la surjectivité de l'homomorphisme α : $\mathbb{Z}[G] \otimes_\Lambda \mathbb{Z} \longrightarrow B$ obtenu à partir de la correspondance $1_G \otimes_\Lambda 1 \longmapsto (1_G \otimes_{\Lambda_1} 1 , 1_G \otimes_{\Lambda_2} 1)$ par prolongement $\mathbb{Z}[G]$-linéaire. Maintenant on définit un G-module à gauche A par la suite exacte

(7) $$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_\Lambda \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0 .$$

Plus tard, il sera utile d'avoir une description explicite du module A . Pour cela, on rappelle d'abord qu'on se trouve dans la situation

$$G = g_1 g_2 , \quad g = g_1 \cap g_2 , \quad [G:g] = [G:g_1].[G:g_2] = [g_2:g].[g_1:g] ,$$

ce qui entraîne

$$\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_{\Lambda_1} \underset{\sim}{Z} = \bigoplus_s s \otimes_{\Lambda_1} \underset{\sim}{Z} \quad (s \in g_2 , s \pmod{g}) ,$$

$$\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_{\Lambda_2} \underset{\sim}{Z} = \bigoplus_t t \otimes_{\Lambda_2} \underset{\sim}{Z} \quad (t \in g_1 , t \pmod{g}) ,$$

et donc

$$\underset{\sim}{Z}[G] \otimes_{\Lambda} \underset{\sim}{Z} = \bigoplus_{s,t} (st) \otimes_{\Lambda} \underset{\sim}{Z} = \bigoplus_{s,t} (ts) \otimes_{\Lambda} \underset{\sim}{Z}$$
$$(s \in g_2 , t \in g_1 , s , t \pmod{g}) .$$

Maintenant on voit facilement que l'homomorphisme β , dans (7), est donné par la formule

$$(8_1) \qquad \sum_{s,t} (st) \otimes_{\Lambda} \ell_{st} \longmapsto (\sum_s s \otimes_{\Lambda_1} (\sum_t \ell_{st}) , \sum_{s,t} (st) \otimes_{\Lambda_2} \ell_{st})$$
$$(s \in g_2 , t \in g_1 , s , t \pmod{g}) ,$$

<u>ou bien par la formule</u>

$$(8_2) \qquad \sum_{s,t} (ts) \otimes_{\Lambda} \ell_{ts} \longmapsto (\sum_{s,t} (ts) \otimes_{\Lambda_1} \ell_{ts} , \sum_t t \otimes_{\Lambda_2} (\sum_s \ell_{ts}))$$
$$(s \in g_2 , t \in g_1 , s , t \pmod{g}) .$$

LEMME 2. - <u>Soit</u> k_2 <u>une extension galoisienne sur</u> $\underset{\sim}{Q}$, <u>alors on a</u>

$$A = \bigoplus_{s,t} (s - 1_G)(t - 1_G) \otimes_{\Lambda} \underset{\sim}{Z}$$
$$(s \in g_2 , t \in g_1 , s , t \notin g ; s , t \pmod{g}) .$$

La démonstration est facile ; en effet, l'hypothèse ci-dessus entraîne que g_2 est un sous-groupe normal de G . Donc on a

$$stg_2 = sg_2 t = g_2 t = tg_2 \quad (s \in g_2 , t \in g_1) ,$$

c'est-à-dire

$$(st) \otimes_{\Lambda_2} \ell_{st} = t \otimes_{\Lambda_2} \ell_{st} \quad (s \in g_2 , t \in g_1 , \ell_{st} \in \underset{\sim}{Z}) .$$

Si on prend la formule (8_1) , on voit tout de suite qu'on a

$$A = \left\{ \sum_{s,t} (st) \otimes_{\Lambda} \ell_{st} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_t \ell_{st} = 0 , \quad \forall s \in g_2 \\ \sum_s \ell_{st} = 0 , \quad \forall t \in g_1 \end{array} \right\}$$
$$(s \in g_2 , t \in g_1 , s , t \pmod{g}) .$$

L'assertion du lemme est maintenant évidente.

C. Q. F. D.

Regardons maintenant la suite (7) qui se compose de modules libres sur $\underset{\sim}{Z}$. Utilisant (3), (4) et les formules (8), on obtient une suite exacte

$$(9) \qquad 0 \longrightarrow (A \otimes Y)^G \longrightarrow Y^g \xrightarrow{\alpha_Y} (B \otimes Y)^G \longrightarrow \hat{H}^1(G , A \otimes Y) \longrightarrow \hat{H}^1(g , Y) ,$$

$$y \longmapsto (N_{g/g_1}(y) , N_{g/g_2}(y)) ,$$

quel que soit Y comme G-module à gauche.

Comme $\operatorname{rang}_{\underset{\sim}{Z}}(B^G) = 1$ (c'est une conséquence de (1) et (6)), on déduit de (9) (en utilisant (1) encore une fois)

$$(10) \qquad A^G = \{0\} \text{ , et donc } \hat{H}^{-1}(G , A) = A/\underset{\sim}{I}_G A ,$$

où $\underset{\sim}{I}_G$ désigne l'<u>idéal d'augmentation</u> dans $\underset{\sim}{Z}[G]$.

Soit Π l'ensemble des places (archimédienne et ultramétriques) de $\underset{\sim}{Q}$. Fixons, pour chaque $v \in \Pi$, un prolongement fixe de v dans K, et appelons cette place de K également v. Notons G^v le <u>groupe de décomposition</u> de G par rapport à la place v de K. D'après le théorème de Čebotarev (voir [1], chap. VIII), on peut s'arranger pour que $\{G^v\}$ parcoure au moins l'ensemble des sous-groupes cycliques de G lorsque v parcourt Π. En particulier, on a

(11) <u>Quel que soit</u> $s \in g_2$, <u>alors il existe</u> $v \in \Pi$ <u>tel qu'on ait</u>

$$G^v = \underline{\text{sous-groupe de}}\ G\ \underline{\text{engendré par}}\ s .$$

Appelons $\operatorname{cor}^q_{U/G}$ ($q \in \underset{\sim}{Z}$, U = sous-groupe de G) la corestriction (voir [4], chap. VIII, § 2) $\hat{H}^q(U , .) \longrightarrow \hat{H}^q(G , .)$, et considérons l'homomorphisme

$$\gamma : \bigoplus_v \hat{H}^{-1}(G^v , A) \longrightarrow \hat{H}^{-1}(G , A) \quad (v \in \Pi)$$

$$\sum_v h^v \longmapsto \sum_v \operatorname{cor}^{-1}_{G^v/G}(h^v) \quad (v \in \Pi) .$$

LEMME 3. - <u>Soit</u> k_2 <u>une extension galoisienne sur</u> $\underset{\sim}{Q}$, <u>alors</u> γ <u>est surjectif</u>.

La démonstration utilise le fait que $\operatorname{cor}^{-1}_{G^v/G}$ est l'application évidente (voir [4], chap. VIII, § 2, prop. 3). Soit

$$h = a + \underset{\sim}{I}_G A \in A/\underset{\sim}{I}_G A = \hat{H}^{-1}(G , A)$$

(la dernière égalité résulte de (10)). D'après le lemme 2, on peut supposer que a soit de la forme particulière $a = (s - 1_G)(t - 1_G) \otimes_\Lambda \ell$ ($s \in g_2$, $t \in g_1$, $s,t \notin g$, $s , t \pmod g$, $\ell \in \underset{\sim}{Z}$).

D'après (11), il existe une place $v \in \Pi$, telle qu'on ait

$$G^v = \{1_G , s , s^2 , \ldots , s^{f-1}\} \quad (f = \text{ordre de } s) .$$

On calcule facilement

$$N_{G^v}(a) = (\sum_i s^i)(s - 1_G)(t - 1_G) \otimes_\Lambda \ell = 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant f - 1) ,$$

donc l'élément

$$h^v = a + I_{\underset{\sim}{G}^v} A \in \ker N_{G^v}/I_{\underset{\sim}{G}^v} A = \hat{H}^{-1}(G^v , A)$$

a la propriété $\mathrm{cor}^{-1}_{G^v/G} (h^v) = h$.

C. Q. F. D.

3. Enoncé des résultats.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons

- ou bien : $\mathrm{pgcd}([k_1:\underset{\sim}{Q}] , [k_2:\underset{\sim}{Q}]) = 1$,
- ou bien : $\mathrm{pgcd}(\Delta_1 , \Delta_2) = 1$ (Δ_i = discriminant de k_i , $i = 1 , 2$) .

Soit $h_* = \mathrm{card}\ (Cl_*)$ ($* = k , k_1 , k_2$) .

THÉORÈME 1. - Soit p un nombre premier étranger à $\mathrm{card}(\hat{H}^{-1}(G , A))$. Alors

$$p^m | h_{k_1} h_{k_2} \quad \text{entraîne} \quad p^m | h_k \ .$$

Soit δ l'homomorphisme

(12)
$$\delta : \bigoplus_v \hat{H}^{-2}(G^v , B) \longrightarrow \hat{H}^{-2}(G , B) \quad \text{avec} \quad v \in \Pi$$
$$\sum_v h^v \longmapsto \sum_v \mathrm{cor}^{-2}_{G^v/G}(h^v) \quad (v \in \Pi) \ .$$

THÉORÈME 2. - Soit δ surjectif. Alors on a deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \hat{H}^{-1}(G , A) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ Cl_k & \xrightarrow{\pi} & Cl_{k_1} \otimes Cl_{k_2} & \longrightarrow & \mathrm{coker}\ \pi & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

COMPLÉMENT au Théorème 2. - Pour que δ soit surjectif, chacune des conditions suivantes est suffisantes :

(i) $\hat{H}^{-1}(G , A) = \{0\}$;

(ii) $\mathrm{pgcd}(k_1:\underset{\sim}{Q}] , [k_2:\underset{\sim}{Q}]) = 1$;

(iii) $G^v = G$ pour au moins une place $v \in \Pi$;

(iv) k et k_2 galoisiennes sur $\underset{\sim}{Q}$ (c'est-à-dire, en particulier, que $K = k$, et que G est le produit semi-direct du sous-groupe g_1 avec le sous-groupe normal g_2).

PROPOSITION. - Soient k_1 et k_2 (et donc k) galoisiennes sur $\underset{\sim}{Q}$ (c'est-à-dire, en particulier, que $K = k$, et que G est le produit direct des sous-groupes normaux g_1 et g_2). Alors on a

$$\hat{H}^{-1}(G , A) \cong g_2^{ab} \otimes g_1^{ab} \quad (\text{" ab " = "rendu abélien"}) \ .$$

4. La démonstration des théorèmes.

Commençons par la démonstration du théorème 2. Soient :

L^* le groupe multiplicatif d'un corps L ,

I_L le groupe des idèles de L ,

C_L le groupe des classes d'idèles de L .

Alors la combinaison de la suite exacte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow I_K \longrightarrow C_K \longrightarrow 0$$

avec la suite (9) nous donne un diagramme commutatif de suites exactes

(13)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
k^* \arrow[r, "\alpha_{K^*}"] \arrow[d] & (B \otimes K^*)^G \arrow[d] & & \\
I_k \arrow[r, "\alpha_{I_K}"] \arrow[d] & (B \otimes I_K)^G \arrow[d, "\varphi"] & & \\
C_k \arrow[r, "\alpha_{C_K}"] \arrow[d] & (B \otimes C_K)^G \arrow[r] \arrow[d] & \hat{H}^1(G , A \otimes C_K) \arrow[r] & 0 \\
0 & \hat{H}^1(G , B \otimes K^*) \arrow[d, "\varphi_1"] & & \\
 & \hat{H}^1(G , B \otimes I_K) & &
\end{tikzcd}$$

où on a utilisé le théorème 90 de Hilbert et le fait que $\hat{H}^1(g , C_K) = \{0\}$ (voir [1], chap. VII, n° 9.1). On s'intéresse d'abord à coker φ . En composant la longue suite exacte verticale ci-dessus avec la suite exacte

$$\hat{H}^0(G , B \otimes I_K) \xrightarrow{\varphi_0} \hat{H}^0(G , B \otimes C_K) \longrightarrow \hat{H}^1(G , B \otimes K^*) \xrightarrow{\varphi_1} \hat{H}^1(G , B \otimes I_K)$$

on trouve

(14) $$\operatorname{coker} \varphi \cong \ker \varphi_1 \cong \operatorname{coker} \varphi_0 \ .$$

Notons maintenant S tout ensemble fini de places $v \in \Pi$, qui contient la place archimédienne et au moins les places ultramétriques ramifiées dans l'extension $K/\mathbb{Q}$. Notons, de plus, pour chaque place $v \in \Pi$, K_v la complétion de K par rapport au prolongement de v dans K choisi ci-dessus, et notons, pour chaque place ultramétrique $v \in \Pi$,

$\mathfrak{O}_v$ l'anneau des entiers dans K_v , et

$\mathfrak{O}_v^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{O}_v$.

Alors, on a les relations $(\Lambda^v = \mathbb{Z}[G^v])$

$$I_K = \varinjlim_S I_K^S \quad \text{avec} \quad I_K^S = \prod_{v \in S} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\Lambda^v} K_v^*) \oplus \prod_{v \notin S, v \in \Pi} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\Lambda^v} \mathfrak{O}_v^*) \ ,$$

et donc

$$B \otimes I_K = \varinjlim_S (B \otimes I_K^S) \ ,$$

ce qui entraîne, compte tenu de (1) et (2),

$$(B \otimes I_K)^G = \varinjlim_S [\prod_{v \in S} (B \otimes K_v^*)^{G^v} \oplus \prod_{v \notin S, v \in \Pi} (B \otimes \mathfrak{O}_v^*)^{G^v}] .$$

D'autre part, comme la théorie cohomologique, au sens de TATE, commute avec les limites inductives (voir [1], chap. IV et VII), et comme n'importe quelle théorie cohomologique commute avec les produits, on déduit de la décomposition ci-dessus de I_K , en appliquant convenablement (2), le lemme de Shapiro, et le fait que $\mathfrak{O}_v^*$ est cohomologiquement trivial, quelle que soit v comme place non ramifiée dans l'extension $K/\underset{\sim}{Q}$ (ce qui entraîne que $B \otimes \mathfrak{O}_v^*$ est cohomologiqmement trivial (voir [4], chap. IX, § 5, théorème 9, resp. [1], chap. VI, n° 1.2,et 1.4)), que le diagramme

$$(15) \qquad \begin{array}{ccc} & \hat{H}^q(G , B \otimes I_K) & \\ \swarrow \simeq & & \searrow \\ \bigoplus_v \hat{H}^q(G^v , B \otimes K_v^*) & \longrightarrow & \hat{H}^q(G , B \otimes C_K) \\ \sum_v b^v & \longmapsto & \sum_v \mathrm{cor}^q_{G^v/G} \circ \lambda_v^q(b^v) \quad (v \in \Pi) \end{array}$$

est commutatif (la flèche, marquée " $\simeq$ ", est un isomorphisme !), quel que soit $q \in \underset{\sim}{Z}$.

Ici λ_v^q est l'homomorphisme $\hat{H}^q(G^v , B \otimes K_v) \longrightarrow \hat{H}^q(G^v , B \otimes C_K)$ obtenu de l'homomorphisme λ_v , qui rend le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & I_K & \\ \subset \nearrow & & \searrow \\ K_v^* & \xrightarrow{\lambda_v} & C_K \end{array}$$

commutatif. Maintenant on utilise, pour chaque $v \in \Pi$, le théorème de Tate et Nakayama, qui dit qu'il y a des isomorphismes (ce sont les flèches verticales ci-dessous) rendant le diagramme (16) commutatif (la flèche horizontale du haut est donnée par (15), et celle du bas est celle qu'on trouve dans (12) [1]).

$$(16) \qquad \begin{array}{ccc} \bigoplus_v \hat{H}^{q+2} (G^v , B \otimes K_v^*) & \longrightarrow & \hat{H}^{q+2} (G , B \otimes C_K) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ \bigoplus_v \hat{H}^q (G^v , B) & \xrightarrow{\delta} & \hat{H}^q(G , B) \end{array} \qquad (v \in \Pi , \quad q \in \underset{\sim}{Z})$$

---

[1] Il est clair que (16) est vrai pour n'importe quel G-module à gauche Y plat sur $\underset{\sim}{Z}$ au lieu de B .

(voir [4], chap. IX, § 8, théorème 14, et [1], chap. IV, proposition 9 (iv), et chap. VII, n° 10).

La combinaison de (13) et (14) avec (15) et (16) nous donne un diagramme commutatif de suites exactes

$$(17)\qquad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
I_k/k^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, equal] & (B \otimes I_K)^G/(B \otimes K^*)^G \arrow[r] \arrow[d, "\subset"] & \operatorname{coker} \Phi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C_k \arrow[r] & (B \otimes C_K) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{H}^{-1}(G , A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker} \delta \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{coker} \delta \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où on a utilisé encore une fois le <u>théorème de Tate et Nakayama</u> sous la forme

$$\hat{H}^1(G , A \otimes C_K) \simeq \hat{H}^{-1}(G , A) .$$

En regardant la suite (6), on trouve

$$(B \otimes C_K)^G = \left\{ (\bar{a}_1 , \bar{a}_2) \in I_{k_1}/k_1^* \oplus I_{k_2}/k_2^* \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in I_{k_i} \quad (i = 1 , 2) \\ \text{et} \\ N_{k_1/\mathbb{Q}}(a_1)\, N_{k_2/\mathbb{Q}}(a_2)^{-1} \in \mathbb{Q}^* \end{array} \right\}$$

et

$$(B \otimes I_K)^G/(B \otimes K^*)^G$$
$$= \left\{ (\bar{a}_1 , \bar{a}_2) \in I_{k_1}/k_1^* \oplus I_{k_2}/k_2^* \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in I_{k_i} \quad (i = 1 , 2) \\ \text{et} \\ N_{k_1/\mathbb{Q}}(a_1)\, N_{k_2/\mathbb{Q}}(a_2)^{-1} = 1 \end{array} \right\} \subseteq (B \otimes C_K)^G .$$

Notons maintenant I_*^∞ les <u>unités idéliques</u> de $*$, qui permettent d'écrire Cl_* sous la forme

$$Cl_* = I_*/*^* \, I_*^\infty \quad (* = K , k , k_1 , k_2) .$$

Le diagramme (17) entraîne un diagramme de suites exactes

$$(18)\qquad \begin{tikzcd}
I_k/k^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & (B \otimes I_K)^G/(B \otimes K^*)^G \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} \Phi \arrow[r] \arrow[d] & (0) \\
Cl_k \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & (B \otimes I_K)^G/(B \otimes K^*)^G\,(B \otimes I_K^\infty)^G \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec

$$H = (B \otimes I_K)^G/(B \otimes K^*)^G\ (B \otimes I_K^\infty)^G$$

$$= \left\{ (\bar{\bar{a}}_1 , \bar{\bar{a}}_2) \in Cl_{k_1} \oplus Cl_{k_2} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in I_{k_i} \quad (i = 1 , 2) \\ \text{et} \\ N_{k_1/\mathbb{Q}}(a_1)\, N_{k_2/\mathbb{Q}}(a_2)^{-1} = 1 \end{array} \right\}$$

LEMME 4. - <u>L'indice</u> $[Cl_{k_1} \oplus Cl_{k_2} : H]$ <u>divise</u> card(coker δ) .

En effet, soit $(\bar{\bar{a}}_1 , \bar{\bar{a}}_2) \in Cl_{k_1} \oplus Cl_{k_2}$ un élément quelconque. Comme le nombre de classes, au sens restreint de $\mathbb{Q}$, est égal à 1 , on peut écrire

$$N_{k_1/\mathbb{Q}}(a_1)\, N_{k_2/\mathbb{Q}}(a_2)^{-1} = b.\beta$$

($b \in I_{\mathbb{Q}}^\infty$ avec $b_\infty > 0$ (b_∞ = composante archimédienne de b), et $b \in \mathbb{Q}$) .

Si on a $\mathrm{pgcd}([k_1:\mathbb{Q}] , [k_2:\mathbb{Q}]) = 1$, l'indice en question est égal à 1 (voir lemme 1). Si on a $\mathrm{pgcd}(\Delta_1 , \Delta_2) = 1$, on peut écrire

$$b = b_1 b_2 \quad \text{avec} \quad b_i \in N_{k_i/\mathbb{Q}}(I_{k_i}^\infty) \qquad (i = 1 , 2) .$$

Donc on a

$$Cl_{k_1} \oplus Cl_{k_2} = \left\{ (\bar{\bar{a}}_1 , \bar{\bar{a}}_2) \in Cl_{k_1} \oplus Cl_{k_2} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in I_{k_i} \quad (i = 1 , 2) \\ \text{et} \\ N_{k_1/\mathbb{Q}}(a_1)\, N_{k_2/\mathbb{Q}}(a_2)^{-1} \in \mathbb{Q}^* \end{array} \right\}$$

ce qui entraîne l'assertion du lemme puisqu'on a

$$\mathrm{card}(\mathrm{coker}\ \delta) = [(B \otimes C_K)^G : (B \otimes I_K)^G/(B \otimes K^*)^G]$$

d'après (17).

C. Q. F. D.

Comme $\mathrm{coker}\ \delta = \{0\}$ entraîne $\mathrm{coker}\ \Phi \cong \hat{H}^{-1}(G , A)$ (d'après (17)), et

$$D = (Cl_{k_1} \oplus Cl_{k_2})/\mathrm{Im}\ \pi = \mathrm{coker}\ \pi \quad \text{(d'après (18) et lemme 4)} ,$$

les assertions du théorème 2 résultent du diagramme (18). Le théorème 1 est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme 4.

Reste à démontrer le <u>complément au théorème 2</u> :

(i) est immédiate d'après (17),

(ii) résulte du lemme 1, en posant $Y = K^*$,

(iii) est triviale,

(iv) est une conséquence du lemme 3, puisque, sous les hypothèses de (iv), on a $K = k$, donc $\mathbb{Z}[G] \otimes_\Lambda \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]$, ce qui est un module <u>cohomologiquement trivial</u>. Donc on a des isomorphismes

$$\hat{H}^q(U , B) \cong \hat{H}^{q+1}(U , A) \quad (q \in \underset{\sim}{Z} , \quad U = \text{sous-groupe de } G)$$

donnés par les cobords qui commutent avec les corestrictions.

C. Q. F. D.

5. La démonstration de la proposition.

D'après (10) et le lemme 2, on a

$$\hat{H}^{-1}(G , A) = A/\underset{\sim}{I}_G A \quad \text{où} \quad A = \bigoplus_s \bigoplus_t (s - 1_G)(t - 1_G) \underset{\sim}{Z} ,$$

avec $s \in g_2$, $t \in g_1$, $s , t \neq 1_G$.

De plus, on a $st = ts$ $(s \in g_2 , \ t \in g_1)$, comme G est le produit direct de g_1 et g_2 . Considérons l'application

$$\mu_0 : g_2 \times g_1 \longrightarrow A/\underset{\sim}{I}_G A$$
$$(s , t) \longmapsto (s - 1_G)(t - 1_G) + \underset{\sim}{I}_G A .$$

A cause de

$$(ss' - 1_G) = (s - 1_G)(s' - 1_G) + (s - 1_G) + (s' - 1_G) \quad (s , s' \in g_2)$$
$$(tt' - 1_G) = (t - 1_G)(t' - 1_G) + (t - 1_G) + (t' - 1_G) \quad (t , t' \in g_1)$$

on trouve

$$\mu_0(ss' , t) = \mu_0(s , t) + \mu_0(s' , t) ,$$
$$\mu_0(s , tt') = \mu_0(s , t) + \mu_0(s , t') .$$

Donc μ_0 induit une application $\underset{\sim}{Z}$-**bilinéaire**

$$g_2^{ab} \times g_1^{ab} \longrightarrow A/\underset{\sim}{I}_G A ,$$

et par conséquence un $\underset{\sim}{Z}$-homomorphisme

$$\mu : g_2^{ab} \otimes g_1^{ab} \longrightarrow A/\underset{\sim}{I}_G A$$

$$\bar{s} \otimes \bar{t} \longmapsto (s - 1_G)(t - 1_G) + \underset{\sim}{I}_G A$$

($\bar{s}$ (resp. $\bar{t}$) note la classe de s (resp. t) modulo le groupe g_2' (resp. g_1') des commutateurs).

D'autre part, soit ν_0 le $\underset{\sim}{Z}$-homomorphisme

$$\nu_0 : A \longrightarrow g_2^{ab} \otimes g_1^{ab}$$
$$(s - 1_G)(t - 1_G) \longmapsto \bar{s} \otimes \bar{t} .$$

Un calcul facile montre que

$$\nu_0({}^{(s't'-1_G)}[(s - 1_G)(t - 1_G)]) = 0 \quad (s , s' \in g_2 , \quad t , t' \in g_1) .$$

Donc on a un $\underset{\sim}{Z}$-homomorphisme

$$\nu : \; A/\underset{\sim}{I}_G\, A \longrightarrow g_2^{ab} \otimes g_1^{ab}$$

$$(s - 1_G)(t - 1_G) + \underset{\sim}{I}_G\, A \longmapsto \overline{s} \otimes \overline{t} \quad .$$

Evidemment, on a

$$\mu \circ \nu = \text{identité} = \nu \circ \mu \; .$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (John William Scott) and FRÖHLICH (Albrecht) [Editors]. - Algebraic number theory, Proceedings of a conference organised by the London mathematical Society [1965. Brighton]. - London and New York, Academic Press, 1967.

[2] DRAXL (Peter Karl Josef). - Fonctions L et représentation simultanée d'un nombre premier par plusieurs formes quadratiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 12, 3 p.

[3] DRAXL (Peter Karl Josef). - L-Funktionen algebraischen Tori, J. of number theory, t. 3, 1971, p. 444-467.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Corps locaux. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1296 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 8).

(Texte reçu le 26 juin 1971)

Peter Karl Josef DRAXL
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Postfach 8640
D-48 BIELEFELD (Allemagne fédérale)