Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Guy Terjanian

Propriété Ci revue et généralisée

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. nº 23, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A17_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 23, 3 p.

23-01

10 mai 1971

PROPRIÉTÉ C_i REVUE ET GÉNÉRALISÉE

par Guy TERJANIAN

1. Les généralisations.

En examinant la démonstration de LANG [2], du fait que, si un corps K a la propriété C_i forte, le corps $K(X)$ des fractions rationnelles en une indéterminée sur K a la propriété C_{i+1} forte, on remarque qu'il démontre davantage, à savoir qu'un polynôme à coefficients dans $K[X]$, non nul, sans terme constant, de degré d, dont le nombre des indéterminées est $> d^i$, a un zéro non banal dans l'anneau $K[X]$, et qu'il déduit de cela que $K(X)$ a la propriété C_{i+1} forte. On est ainsi conduit à définir la propriété C_i forte pour les anneaux intègres, et à se poser de nouvelles questions.

La propriété C_i, par rapport à une partie multiplicative de l'ensemble des entiers naturels, a été définie et étudiée par LANG, dans [3], où il montre que cette propriété a un comportement semblable à celui de la propriété C_i ; mais il n'a pas traîté complètement le cas $i = 0$. On voit aisément que les corps qui ont la propriété C_0, par rapport à la partie multiplicative formée des entiers étrangers à p premier, sont ceux dont toute extension finie a pour degré une puissance de p, et les résultats usuels sur les systèmes d'équations s'étendent à ces corps.

Le corps des nombres réels a la propriété C_0, par rapport à la partie multiplicative des nombres impairs ; en cherchant une propriété analogue à la propriété C_i forte pour le corps des nombres réels, on est conduit à la propriété suivante : Tout polynôme à coefficients réels en deux indéterminées, dont toutes les composantes homogènes de degré pair sont nulles, a un zéro réel non banal. Ceci conduit à une généralisation de la propriété C_i forte, où, pour un entier $n \geqslant 1$, on considère des polynômes de degré étranger à n, et homogènes pour la graduation naturelle de type $\mathbb{Z}/(n)$.

On pose donc les définitions suivantes :

DÉFINITION 1. - *Soient* K *un corps,* $i \geqslant 0$ *un nombre réel, et* S *une partie multiplicative de l'ensemble des entiers naturels ; on dit que* K *a la propriété* C_i^S, *si, pour tout* s *dans* S, *et pour tout élément* f *de* $K[X_1, \ldots, X_n]$, *non nul, homogène, de degré* s, *et tel qu'on ait* $n > s^i$, *il existe un élément* x *de* K^n, *non nul, et tel que* $f(x) = 0$.

DÉFINITION 2. - Soient A un anneau intègre, $i \geq 0$ un nombre réel, et $n \geq 1$ un entier ; on dit que A a la propriété C_i^n, si, pour tout entier d étranger à n, et pour tout élément f de $K[X_1, \ldots, X_m]$, non nul, homogène pour la graduation naturelle de type $\mathbb{Z}/(n)$, de degré d, et tel qu'on ait $m > d^i$, il existe un élément x de A^m, non nul, et tel qu'on ait $f(x) = 0$.

2. Résultats.

Je donnerai ci-dessous, sans démonstration, quelques résultats ; on trouvera une étude plus complète et les démonstrations dans [5].

THÉORÈME 1.

(i) Soient K un corps ayant la propriété C_i^s, s un élément de S, et $f = (f_i)_{i=1,\ldots,r}$ une famille d'éléments de $K[X_1, \ldots, X_m]$, tous étant homogènes et de degré s ; alors, si on a $m > rs^i$, f a un zéro non banal dans K.

(ii) Soient A un anneau intègre ayant la propriété C_i^n, mais n'ayant pas la propriété C_0^n, d un entier étranger à n, et $f = (f_i)_{i=1,\ldots,r}$ une suite d'éléments de $A[X_1, \ldots, X_m]$, tous étant homogènes pour la graduation de type $\mathbb{Z}/(n)$ et de degré d ; alors, si on a $m > rd^i$, f a un zéro non banal dans A.

La conclusion de (ii) est valable pour les corps qui ont la propriété C_0^n.

On sait que les corps algébriquement clos ont les propriétés C_0 et C_0^1, et que la réciproque est vraie. De même, soient p un nombre premier, et S la partie multiplicative des entiers étrangers à p ; les corps, dont toute extension finie a pour rang une puissance de p, ont les propriétés C_0^S et C_0^p, et réciproquement.

Il est immédiat que, si un anneau intègre A a la propriété C_i^n, son corps des fractions possède cette même propriété.

THÉORÈME 2.

(i) Soient K un corps, L une extension algébrique finie de K ; alors, si K a la propriété C_i^S, L a la propriété C_i^S ; de même, si K a la propriété C_i^n, L a la propriété C_i^n.

(ii) Soient A un anneau intègre ayant la propriété C_i^n, mais non la propriété C_0^n, B un anneau intègre contenant A, et qui soit un A-module libre de rang fini ; alors B a la propriété C_i^n.

THÉORÈME 3.

(i) Soit K un corps ayant la propriété C_i^S ; alors $K(X)$ a la propriété C_{i+1}^S.

(ii) Soit A un anneau intègre ayant la propriété C_i^n, et ayant l'une des deux propriétés suivantes : A est un corps ; A n'a pas la propriété C_0^n ; alors $A[X]$ a la propriété C_{i+1}^n.

3. Remarques.

Il résulte des théorèmes du paragraphe précédent qu'un polynôme, à coefficients dans le corps $R(X)$ des fractions rationnelles en une indéterminée sur le corps des nombres réels, homogène, de degré 9, en 10 indéterminées, a un zéro non banal dans le corps $R(X)$; mais le polynôme $X_1^9 - X(X_2^2 + \dots + X_n^2)^3$ n'a pas de zéro non banal dans $R(X)$; cette remarque montre que les polynômes homogènes et sans terme constant n'ont pas des propriétés parfaitement semblables, néanmoins, j'ignore s'il existe un corps K qui ait la propriété C_i et qui n'ait pas la propriété C_i forte.

Il serait intéressant d'étudier les anneaux intègres qui ont la propriété C_0^1, afin de savoir s'ils ont les mêmes propriétés que les anneaux qui ont la propriété C_i^1 avec $i > 0$.

Le problème le plus intéressant à étudier me paraît être le suivant : Soit $\underset{\sim}{C}$ le corps de nombres complexes ; on sait, grâce au travail de GREENBERG [1], que le corps $\underset{\sim}{C}((X))$ a la propriété C_1 ; ce corps a-t-il la propriété C_1 forte ? Si oui, l'anneau $\underset{\sim}{C}[[X]]$ a-t-il la propriété C_1^1 (ou C_1 forte, pour employer la terminologie traditionnelle) ? Si oui, l'anneau $\underset{\sim}{C}[[X]]$ possèderait-il une propriété plus forte que la propriété C_1^1 ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] GREENBERG (J. M.). - Rational points in henselian discrete valuation rings. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 31, p. 59-64).

[2] LANG (S.). - On quasi-algebraic closure, Annals of Math., t. 55, 1952, p. 373-390.

[3] LANG (S.). - The theory of real places, Annals of Math., t. 57, 1953, p. 378-391.

[4] NAGATA (M.). - Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic closure, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Series A : Math., t. 30, 1957, p. 237-241.

[5] TERJANIAN (G.). - Dimension arithmétique d'un corps (à paraître).

(Texte reçu le 10 mai 1971)

Guy TERJANIAN
53 rue Roger Salengro
92 - ANTONY