Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Maurice Mignotte

Approximations diophantiennes et nombres transcendants

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 22, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A16_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 22, 18 p.

3 mai 1971

APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES ET NOMBRES TRANSCENDANTS

par Maurice MIGNOTTE

I. Généralités

1. Le théorème de Dirichlet, approximation des nombres irrationnels.

Soit ζ un nombre irrationnel ; il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$|\zeta - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2} .$$

Démonstration. - Soit Q un entier $\geqslant 1$, considérons les $Q + 1$ nombres $n\zeta - [n\zeta] = \{n\zeta\}$ (avec $n = 0 , 1 , \ldots , Q$) de l'intervalle $[0 , 1)$. D'après le principe des tiroirs et le fait que ζ est irrationnel, il existe deux entiers m et n distincts tels que $|\{m\zeta\} - \{n\zeta\}| \leqslant \frac{1}{Q}$. D'où l'existence de p et q tels que $0 < q \leqslant Q$ et $|\zeta - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{qQ} \leqslant \frac{1}{q^2}$. Le fait que Q soit arbitraire montre qu'il y a une infinité de solutions $\frac{p}{q}$.

2. Le théorème de Liouville, approximation des nombres algébriques (1851).

Soit ξ un nombre algébrique de degré $n \geqslant 2$; il existe une constante $c = c(\xi) > 0$ telle que, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, on ait l'inégalité

$$|\xi - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n} .$$

Démonstration. - Il suffit de faire la démonstration si ξ est entier. Soit f le polynôme unitaire irréductible de ξ ; on a alors

$$\frac{1}{q^n} \leqslant |f(\frac{p}{q})| = |\xi - \frac{p}{q}| \, |f'(\eta)| , \qquad \eta \in]\xi , \frac{p}{q}[,$$

le théorème en découle immédiatement.

3. Nombres transcendants de Liouville.

Il est clair que le théorème de Liouville implique le résultat suivant :

Etant donné un nombre irrationnel ξ tel qu'il n'existe aucun couple (c , n), avec $c > 0$, $n > 1$, tels que l'inégalité

$$|\xi - \frac{p}{q}| < \frac{c}{q^n}$$

soit satisfaite pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, ξ est transcendant.

De tels nombres ξ sont appelés nombres de Liouville.

Exemple. - Le nombre

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

est un nombre de Liouville.

4. Le théorème de Thue-Siegel-Roth.

Si ξ est algébrique de degré $n > 1$, et $\frac{p}{q}$ un rationnel, l'inégalité

$$|\xi - \frac{p}{q}| < q^{-\mu}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $\frac{p}{q}$:

1° Si $\mu > \frac{s}{2} + 1$ (THUE, 1908),
2° Si $\mu > 2\sqrt{s}$ (SIEGEL, 1921),
3° Si $\mu > \sqrt{2s}$ (DYSON, 1947),
4° Si $\mu > 2$ (ROTH, 1955).

Conséquence. - Si ξ est un nombre irrationnel tel qu'il existe $\mu > 2$ pour lequel l'inégalité

$$|\xi - \frac{p}{q}| < q^{-\mu}$$

ait une infinité de solutions rationnelles $\frac{p}{q}$, ξ est transcendant.

Exemple. - Le nombre

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{3^k}}$$

est transcendant.

II. Le lemme de Roth

1. Notations.

Si $(x_1, \ldots, x_m)$ est un certain m-uple, on le notera x.

Soit $i = (i_1, \ldots, i_m)$ un multi-indice, on posera

$$x^i = x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} , \qquad xi = x_1 i_1 + \dots + x_m i_m , \qquad i! = i_1! \dots i_m! ,$$

$$\binom{i}{j} = \binom{i_1}{j_1} \dots \binom{i_m}{j_m} , \qquad \frac{x}{i} = \frac{x_1}{i_1} + \dots + \frac{x_m}{i_m} , \qquad |i| = i_1 + \dots + i_m ,$$

$$\frac{\partial^{|i|}}{\partial x^i} = \frac{\partial^{i_1+\dots+i_m}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} .$$

Si $\Delta = \dfrac{\partial^{|i|}}{\partial x^i}$, $|i|$ sera appelé l'ordre de Δ .

La notation $i \leqslant r$ signifiera $i_k \leqslant r_k$, pour $k = 1 , \dots , m$.

2. Wronskiens.

Soient $\Delta_1 , \dots , \Delta_h$ des opérateurs différentiels d'ordres respectivement majorés par $0 , 1 , \dots , h-1$. Soient $f_1 , \dots , f_h$ des fonctions de $x = (x_1 , \dots , x_m)$. On appelle wronskien généralisé, le déterminant

$$\det(\Delta_k f_\ell) = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \dots & \Delta_h \\ f_1 & \dots & f_h \end{pmatrix} \qquad (1 \leqslant k , \ell \leqslant h) .$$

LEMME 1. - Soient $f_1 , \dots , f_h$ des polynômes en m variables à coefficients rationnels linéairement indépendants. Alors il existe au moins un wronskien non nul.

Démonstration.

(a) Cas $m = 1$: Démonstration par récurrence sur h . Si $h = 1$, c'est évident. Si $h > 1$, on applique l'hypothèse de récurrence aux fonctions

$$F_\ell = \frac{d}{dx}\left(\frac{f_\ell}{f_h}\right) , \qquad \ell = 1 , \dots , h-1 .$$

L'indépendance des F_ℓ résulte de celle des f_i , il existe donc un wronskien non nul

$$\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_h \\ f_1 & \dots & f_h \end{pmatrix} = f_h^h \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_h \\ f_1 f_h^{-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} = f_h^h \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_{n-1} \\ F_1 & \dots & F_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0 .$$

(b) Cas $m > 1$: Soient les fonctions de $x = (x_1 , \dots , x_m)$ suivantes :

$$f_\ell(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} f_i^{(\ell)} x^i , \qquad \ell = 1 , \dots , h .$$

Soient t une variable, et g un entier $> \max(r_k)$, posons

$$\varphi_\ell(t) = f_\ell(t\ ,\ t^g\ ,\ \dots\ ,\ t^{g^{h-1}}) = \sum_{0\leqslant i\leqslant r} f_i^{(\ell)}\ x^{i_1+i_2 g+\dots+i_h g^{h-1}} \ .$$

Si les polynômes f_ℓ sont linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$, il résulte de l'unicité de l'écriture d'un entier en base g que les φ_ℓ le sont aussi. Le résultat dans le cas $m = 1$ montre que

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{dt} & \cdots & \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_h \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

On voit facilement que $W(t)$ est une somme à coefficients polynômes en t de wronskiens relatifs aux f_i . $W(t)$ étant non nul, l'un des wronskiens relatifs aux f_i n'est pas nul.

3. Une identité.

Soit A un polynôme à coefficients entiers en $(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m) = x$, on peut l'écrire sous la forme

$$A(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m) = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{m-1})\ Q_\nu(x_m)\ , \qquad n \leqslant r_m + 1 \ .$$

Si n a été choisi minimum, les P_ν (respectivement les Q_ν) sont linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$.

D'après le lemme 1, il existe deux wronskiens non nuls

$$U^*(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{m-1}) = \begin{pmatrix} D_1^* & \cdots & D_n^* \\ P_1 & \cdots & P_n \end{pmatrix}, \qquad V^{**}(x_m) = \begin{pmatrix} D_1^{**} & \cdots & D_n^{**} \\ Q_1 & \cdots & Q_n \end{pmatrix} \ .$$

Si on pose

$$D_{\mu\nu} = D_\mu^*\ D_\nu^{**}\ , \qquad \Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{j!}\ D_{\mu\nu} = \frac{1}{j!}\ \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j}\ ,$$

$$W^*(x) = \det(D_{\mu\nu}\ A)\ , \qquad W(x) = \det(\Delta_{\mu\nu}\ A)\ , \qquad A_j(x) = \frac{1}{j!}\ \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j}\ A\ ,$$

on a les résultats suivants :

Il existe $C \in \underset{\sim}{Q}^*$ tel que $CW^*(x) = W(x)$;
$W^*(x) = U^*\ V^{**}$;
A_j est à coefficients entiers, donc W aussi.

Le lemme de Gauss montre qu'il existe deux polynômes U et V à coefficients entiers, tels que $W = UV$.

4. Majorations pour U , V , W .

Si $A(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} a_i x^i$, on pose $|\overline{A}| = \max_i |a_i|$. Soit $B(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} b_i x^i$, la notation $A \ll B$ signifie $a_i \leqslant b_i$ pour tout i .

Il est facile de montrer que

$$A_j(x) \ll |\overline{A}| \binom{r}{j} (1 + x_1)^{r_1 - j_1} \ldots (1 + x_m)^{r_m - j_m} \ll 2^{|r|} |\overline{A}| \prod_{k=1}^{m} (1 + x_k)^{r_k} .$$

On en déduit l'inégalité

$$\max(|\overline{U}| , |\overline{V}| , |\overline{W}|) \leqslant 2^{2n|r|} n! \, |\overline{A}|^n .$$

5. L'indice d'un polynôme.

Soit m un entier $\geqslant 1$, et soient

$$K_k = \frac{P_k}{Q_k} , \qquad (P_k , Q_k) = 1 , \qquad i = 1 , \ldots , m$$

m nombres rationnels. Posons $H_k = \max(|P_k| , |Q_k|)$. Soit $\rho = (\rho_1 , \ldots , \rho_m)$ un m-uple de réels positifs arbitraires. On définit l'indice d'un polynôme

$$J(A) = J(A ; \rho ; K) = \text{plus petite valeur de } \frac{j}{\rho} \text{ telle que } A_j(K) \neq 0 .$$

La formule de Taylor

$$A(K_1 + t^{1/\rho_1} x_1 , \ldots , K_m + t^{1/\rho_m} x_m) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant r} A_j(K) \, t^{j/\rho} x^j$$

montre que $J(A)$ est la plus petite valeur de l'exposant de t qui a un facteur non nul dans ce développement. On en déduit les propriétés suivantes de l'indice :

(1) $J(A) \geqslant 0$ et $(J(A) = \infty) \Longleftrightarrow (A = 0)$;

(2) $J(A \pm B) \geqslant \min(J(A) , J(B))$;

(3) $J(AB) = J(A) + J(B)$;

(4) $J(A_j) \geqslant \max(0 , J(A) - \frac{j}{\rho})$.

6. La borne supérieure $\Theta_m(\alpha ; H ; r)$.

Soient a , r_1 , ... , r_m , H_1 , ... , H_m des entiers > 0 . On désigne par $\Theta_m = \Theta_m(a ; r ; H)$ la borne supérieure des $J(a ; r ; K)$, où les A vérifient $0 < |\overline{A}| \leqslant a$, et les $K_k = \frac{P_k}{Q_k}$ vérifient $\max(|P_k| , |Q_k|) \leqslant H_k$. Il n'y a qu'un nombre fini de tels A et K , donc cette borne est atteinte. De plus, $0 \leqslant \Theta_m \leqslant m$.

7. Une borne supérieure de $\Theta_1(\alpha ; r ; H)$.

$(J(A ; r ; K) = \frac{j}{r}) \iff ((x - K)^j$ divise $A)$

$\iff (A(x) = (Qx - P)^j B(x)$, B à coefficients entiers (lemme de Gauss))

$\Longrightarrow (H^j \leqslant |\overline{A}| \leqslant a) \Longrightarrow (\frac{j}{r} \leqslant \frac{\log a}{r \log H}$ (on suppose $H \geqslant 2$)) .

D'où l'inégalité

$$\Theta_1(a ; r ; H) \leqslant \frac{\log a}{r \log H} , \qquad \text{si } H \geqslant 2 .$$

8. La propriété Γ_M .

Soit t une constante telle que $0 < t \leqslant 1$. Soit $b \geqslant 1$ un réel. Soient $s_1 , \dots , s_M , K_1 , \dots , K_M$ des entiers positifs. On dit que le système ordonné $(b , s_1 , \dots , s_M , K_1 , \dots , K_M)$ possède la propriété Γ_M , si :

Ou bien $M = 1$, $K_1 \geqslant 2$, $b \leqslant K_1^{s_1 t}$;

$$\text{Ou bien } \begin{cases} M \geqslant 2 , \quad \max\left(\frac{s_2}{s_1} , \dots , \frac{s_M}{s_{M-1}}\right) \leqslant t \quad (\text{donc } s_1 \geqslant s_2 \geqslant \dots \geqslant s_M), \\ s_h \log K_h \geqslant s_1 \log K_1 \quad (h = 1 , \dots , M) , \\ K_1 \geqslant 2^{(1/t)(M-1)M(2M+1)} , \\ b \leqslant K_1^{(1/M)(s_1 t)} . \end{cases}$$

Soit $(a , r_1 , \dots , r_m , H_1 , \dots , H_m)$ ayant la propriété Γ_m .

Soit n un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant r_m + 1$, posons

$$b = 2^{2n(r_1+\dots+r_m)} n! \, a^n , \qquad \rho_1 = nr_1 , \dots , \rho_{m-1} = nr_{m-1} .$$

On vérifie sans peine que $(b , \rho_1 , \dots , \rho_{m-1} , H_1 , \dots , H_{m-1})$ a la propriété Γ_{m-1} .

9. Une inégalité de récurrence pour Θ_m .

D'après ce qu'on a vu, si $A = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} a_i x^i$ vérifie $0 < |\overline{A}| \leqslant a$, et si K vérifie $\max(|P_k| , |Q_k|) \leqslant H_k$, on a $\Theta_m = J(A ; r ; K)$ pour A convenable. De plus, on peut associer à A un polynôme non nul W , tel que $W = UV$, U et V à coefficients entiers, $\max(|U| , |V| , |W|) \leqslant b$, et degré en x_k de $W \leqslant nr_k$ pour un certain n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant r_m + 1$. Ainsi,

$$J(U\ ;\ \rho\ ;\ K) \leqslant \Theta_{m-1}(b\ ;\ \rho\ ;\ H)\quad ,$$

$$J(V\ ;\ \rho_m\ ;\ K_m) \leqslant \Theta_1(b\ ;\ \rho_m\ ;\ H_m)\quad ,$$

$$J(W\ ;\ \rho\ ;\ K) = J(U) + J(V) \leqslant \Theta_{m-1}(b\ ;\ \rho\ ;\ H) + \Theta_1(b\ ;\ \rho_m\ ;\ H_m)\quad .$$

D'autre part,

$$J(W\ ;\ \rho\ ;\ K) = \frac{1}{n} J(W\ ;\ r\ ;\ K)\quad .$$

En définitive,

$$J(W\ ;\ r\ ;\ K) \leqslant n\Phi_m\ , \qquad \text{avec}\quad \Phi_m = \Theta_{m-1}(b\ ;\ \rho\ ;\ H) + \Theta_m(b\ ;\ \rho_m\ ;\ H_m)\quad .$$

En développant W , il vient

$$W(x) = \sum \pm \Delta_{\mu_1,1} A \ldots \Delta_{\mu_n,n} A\quad .$$

D'après (4), on a l'inégalité

$$J(\Delta_{\mu\nu} A) \geqslant \max\left(0\ ,\ J(A) - \sum_{h=1}^{m-1} \frac{j_{\mu h}}{r_h} - \frac{j_{\nu_m}}{r_m}\right) \geqslant \max\left(0\ ,\ J(A) - \frac{1}{r_{m-1}} \sum_{h=1}^{m-1} j_{\mu h} - \frac{j_{\nu_m}}{r_m}\right)$$

$$\geqslant \max\left(0\ ,\ J(A) - \frac{\mu - 1}{r_{m-1}} - \frac{\nu - 1}{r_n}\right) \geqslant \max\left(0\ ,\ J(A) - t - \frac{\nu - 1}{r_m}\right)\ .$$

En appliquant les propriétés (2) et (3) de l'indice, on obtient

$$J(W) \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \max\left(0\ ,\ J(A) - t - \frac{\nu - 1}{r_m}\right)\quad .$$

Soit $N = [(J(A) - t)r_m] + 1$, on distingue les cas :

$n \leqslant N$, qui conduit à $J(A) \leqslant t + \frac{2}{n} J(W)$;

$n > N$, qui conduit à $J(A) \leqslant t + \sqrt{\frac{2}{r_m} J(W)} \leqslant t + 2\sqrt{\frac{J(W)}{n}}$ (car $n \leqslant r_m + 1$).

D'où, finalement,

$$\Theta_m = J(A) \leqslant t + 2\max(\Phi_m\ ,\ \sqrt{\Phi_m}) \leqslant t + 2\max(\Theta_{m-1} + \Theta_1\ ,\ \sqrt{\Theta_{m-1} + \Theta_1})\quad .$$

D'après la propriété Γ_m , on a $\Theta_1 \leqslant t$, d'où

$$\Theta_m(a\ ;\ r\ ;\ H) \leqslant t + 2\max(\psi_m\ ,\ \sqrt{\psi_m})\ , \qquad \text{où}\quad \psi_m = t + \Theta_{m-1}(b\ ;\ \rho\ ;\ H)\quad .$$

10. Le lemme de Roth.

L'inégalité précédente permet facilement de démontrer le résultat suivant :

LEMME 2. - *Soit* $0 < t \leqslant 1$. *Soit* a *un réel* $\geqslant 1$. *Soient* $r_1\ ,\ \ldots\ ,\ r_m$, $H_1\ ,\ \ldots\ ,\ H_m$, *des entiers positifs,* $m \geqslant 2$, *tels que*

$$r_{h+1} \leqslant r_h\, t\ , \qquad r_h \log H_h \geqslant r_1 \log H_1\ ,$$

$$H_1 \geqslant 2^{(1/t)(m-1)m(2m+1)}\ , \qquad a \leqslant H_1^{(1/m)(r_1 t)}\ .$$

Soient $K_h = \frac{P_h}{Q_h}$ des rationnels tels que $\max(|P_h|\ ,\ |Q_h|) = H_h$. Soit un polynôme $A(x) = \sum_{0\leqslant i\leqslant r} a_i\, x^i$, $|\overline{A}| \leqslant a$; alors

$$J(A\ ;\ r\ ;\ K) \leqslant 2^{m+1}\ t^{2^{-(m-1)}}\ .$$

Remarque. - Si on suppose r_m grand, et si on pose $t = \alpha^{m2^{m-1}}$, on peut montrer que $J(A\ ;\ r\ ;\ K) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, pourvu que $\alpha < 2^{-2/3}$.

III. Le polynôme d'approximation $A(x)$

1. Les puissances d'un nombre algébrique.

LEMME 3. - Soit $F = F_0\, x^f + F_1\, x^{f-1} + \dots + F_f$ un polynôme à coefficients entiers, de racines $\xi_1\ , \dots\ , \xi_f$ distinctes. Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, il existe des entiers $g_0^{(\ell)}\ , \dots\ , g_{f-1}^{(\ell)}$, de valeur absolue $\leqslant (2|\overline{F}|)^{\ell}$, tels que

$$F_0^{\ell}\, \xi_\psi^{\ell} = g_0^{(\ell)} + g_1^{(\ell)}\, \xi_\psi + \dots + g_{f-1}^{(\ell)}\, \xi_\psi^{f-1} \qquad (\psi = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ f)\ .$$

Démonstration. - Très facile, par récurrence sur ℓ .

2. Un résultat combinatoire.

LEMME 4. - Soient $r_1\ , \dots\ , r_m$ des entiers > 0 . Soient $\alpha\ , s\ , \rho_1\ , \dots\ , \rho_m$ des réels positifs, avec $\alpha < 6$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, et que les conditions

$$r_i > \varepsilon^{-1}\ , \qquad \left|\frac{r_i}{\rho_i} - 1\right| < \varepsilon \qquad (i = 1\ , \dots\ , n) \qquad \text{et} \qquad s < \varepsilon$$

impliquent le résultat qui suit :

Le nombre N de solutions entières $i = (i_1\ , \dots\ , i_m)$ des inégalités

$$0 \leqslant i \leqslant r = (r_1\ , \dots\ , r_m)\ , \qquad \frac{i}{\rho} \leqslant \left(\frac{1}{2} - s\right)\frac{r}{\rho} \quad (\rho = (\rho_1\ , \dots\ , \rho_m))$$

est majoré par

$$(r_1 + 1) \dots (r_m + 1)\ \exp(-\alpha m s^2)\ .$$

Démonstration. - Soit u une variable $\geqslant 0$. On pose

$$F_h(u) = \sum_{i_h=0}^{r_h} \exp\left[u\left(\frac{i_h}{\rho_h} - \frac{r_h}{2\rho_h}\right)\right] , \qquad h = 1 , \ldots , m ,$$

$$F(u) = \prod_{h=1}^{m} F_h(u) = \sum_{0\leqslant i\leqslant r} \exp\left[u\left(\frac{i}{\rho} - \frac{r}{2\rho}\right)\right] .$$

On remarque que

$$F_h(u) = \frac{\mathrm{sh}(r_h + 1)(u/2\rho_h)}{\mathrm{sh}(u/2\rho_h)} \leqslant (r_h + 1) \frac{\mathrm{sh}\ t}{t} , \qquad \text{avec} \quad t = (r_h + 1) \frac{u}{2\rho_h} .$$

En calculant les dérivées successives de la fonction $\log \frac{\mathrm{sh}\ t}{t}$, et en lui appliquant la formule de Taylor, on montre l'existence d'une constante c telle que

$$\frac{\mathrm{sh}\ t}{t} \leqslant \exp\left[\frac{t^2}{6} + ct^4\right] , \qquad \text{pour tout} \quad t .$$

Il en résulte que

$$F(u) \leqslant (r_1 + 1) \ldots (r_m + 1) \exp\left[\frac{u^2}{24} \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{r_h + 1}{\rho_h}\right)^2 + c \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{r_h + 1}{2\rho_h}\right) u^4\right] .$$

En transformant i en $r - i$, on constate que N est égal au nombre de solutions des inégalités

$$0 \leqslant i \leqslant r , \qquad \frac{i}{\rho} \geqslant \left(\frac{1}{2} + s\right) \frac{r}{\rho} .$$

Si cette dernière égalité est vérifiée, alors

$$\exp\left[u\left(\frac{i}{\rho} - \frac{r}{2\rho}\right)\right] \geqslant \exp\left(su \frac{r}{\rho}\right) .$$

Ainsi,

$$F(u) \geqslant N \exp\left(su \frac{r}{\rho}\right) .$$

Finalement, on obtient

$$N \leqslant (r_1 + 1) \ldots (r_m + 1) \exp(- m\ suc_1 + \frac{u^2}{24} c_2\, m + cmu^4 c_4) ,$$

avec

$$c_1 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\rho_h} , \qquad c_2 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} \frac{(r_h + 1)^2}{\rho_h^2} , \qquad c_4 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{r_h + 1}{\rho_h}\right)^4 .$$

On choisit $u = 12 \frac{c_1}{c_2} s$, ainsi

$$N \leqslant (r_1 + 1) \ldots (r_m + 1) \exp[- m(\frac{6c_1^2}{c_2} s^2 - 144c \frac{c_1^4}{c_2^4} c_4 s^4)] .$$

Si ε est assez petit, alors

$$N \leqslant (r_1 + 1) \ldots (r_m + 1) \exp(- \alpha m s^2) .$$

3. La construction de A .

LEMME 5. - On suppose vérifiées les conditions du lemme 4. Soient $\sigma_1 , \ldots , \sigma_m$, $\tau_1 , \ldots , \tau_m$, des réels positifs, tels que

$$|r_h \sigma_h^{-1} - 1| < \varepsilon , \qquad |r_h \tau_h^{-1} - 1| < \varepsilon , \qquad h = 1 , \ldots , m .$$

On suppose, de plus, $\alpha m s^2 > \log(f + 2)$. Il existe alors une constante c ne dépendant que de F et de α , telle qu'il existe un polynôme $A(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} a_i x^i$ non nul et qui possède les propriétés suivantes :

1° $|\overline{A}| \leqslant c^{|r|}$;
2° $\frac{i}{\rho} \leqslant \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{\rho}$ ou $\frac{i}{\sigma} \geqslant \left(\frac{1}{2} + s\right) \frac{r}{\sigma} \Longrightarrow a_i = 0$;
3° $F(t)$ divise $A_j(t , \ldots , t)$ pour les j tels que

$$0 \leqslant j \leqslant r \qquad \text{et} \qquad \frac{j}{\tau} \leqslant \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{\tau} ;$$

4° $A_j(x) \ll c^{|r|}(1 + x_1)^{r_1} \ldots (1 + x_m)^{r_m}$, $A_j(t , \ldots , t) \ll c^{|r|}(1 + t)^{|r|}$.

Démonstration. - Soient $\alpha < \alpha' < 6$ tel que $\alpha' m s^2 > \log(f + 2)$, et a un entier > 0 qui sera fixé ultérieurement.

Considérons l'ensemble des polynômes du type

$$B(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} b_i x^i , \qquad |\overline{B}| \leqslant a , \qquad b_i \text{ entiers } \geqslant 0 ,$$

et

$$b_i = 0 , \qquad \text{si } \frac{i}{\rho} \leqslant \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{i}{\sigma} \geqslant \left(\frac{1}{2} + s\right) \frac{r}{\sigma} .$$

D'après le lemme 4, ces conditions exigent l'annulation d'au plus

$$2(r_1 + 1) \ldots (r_m + 1) \leqslant \frac{2}{f + 2} (r_1 + 1) \ldots (r_m + 1)$$

coefficients. Il y a donc au moins

$$M = (a + 1)^{(f/(f+2))(r_1+1)\ldots(r_m+1)}$$

polynômes B . On voit facilement que

$$B_j(t, \dots, t) \leqslant a2^{2|r|}(1 + x + \dots + x^{|r|}) .$$

D'après le lemme 3, on a une égalité du type

$$F_0^{|r|} B_j(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi) = \sum_{\varphi=0}^{f-1} B_\varphi^{(j)} \xi_\psi^\varphi \qquad (\psi = 1, \dots, f) ,$$

avec

$$B_\varphi^{(j)} \text{ entier} \quad \text{et} \quad |B_\varphi^{(j)}| \leqslant 2a(8|\overline{F}|)^{|r|} .$$

Soit j vérifiant

$$0 \leqslant j \leqslant r \quad \text{et} \quad \frac{j}{\tau} \leqslant \left(\frac{1}{2} - s\right)\frac{r}{\tau} .$$

D'après le lemme 4, il y a au plus $\left(\frac{1}{f+2}\right)^{\alpha'/\alpha}(r_1 + 1) \dots (r_m + 1)$ j possibles (on applique le lemme avec α'). Il y a donc au plus

$$M^* = (4a(8|\overline{F}|)^{|r|})^{f(1/(f+2))^{\alpha'/\alpha}(r_1+1)\dots(r_m+1)}$$

valeurs de $B_j(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi)$ possibles. Il suffit de choisir $a = (4(8F)^{|r|})^k$, $k = k(\alpha)$ étant un entier assez grand pour que $M > M^*$; autrement dit, il existe deux polynômes B_1 et B_2 distincts, tels que

$$B_1(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi) = B_2(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi) .$$

Il est alors clair que $A = B_1 - B_2$ convient.

IV. Un théorème d'approximation

Le résultat suivant généralise un théorème de MAHLER ([1], p. 170) :

THÉORÈME 1. - Soit ξ un nombre algébrique réel non nul de degré f . Soient g' et g'' deux entiers $\geqslant 2$ premiers entre eux ; soient λ , μ des réels avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $\lambda + \mu > 0$. Soient c_1 , c_2 , c_3 trois constantes positives. On pose

$$\varepsilon(H) = \frac{4}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\log(f + 2) \log 2}\,(\log\log\log H)^{-\frac{1}{2}} , \qquad \alpha \text{ réel}, \quad 0 < \alpha < 6 .$$

On suppose qu'il existe une suite Σ infinie de nombres rationnels distincts

$$K^{(h)} = \frac{P^{(h)}}{Q^{(h)}} , \qquad \text{où } (P^{(h)}, Q^{(h)}) = 1 , \quad H^{(h)} = \max(P^{(h)}, Q^{(h)}) > \exp e ,$$

qui vérifient

$$(*) \qquad |K^{(h)} - \xi| \leqslant c_1 (H^{(h)})^{-(\lambda+\mu+\varepsilon(H^{(h)}))} ,$$

et

$$|P^{(h)}|_{g'} \leqslant c_2 (H^{(h)})^{\lambda-1} , \qquad |Q^{(h)}|_{g''} \leqslant c_3 (H^{(h)})^{\mu-1} .$$

Alors, si ρ est un réel, et $1 < \rho < 2^{(6-\alpha)/\alpha}$, on a

$$\limsup \frac{\log H^{(h+1)}}{(\log H^{(h)})^{\rho}} = \infty .$$

Démonstration. - On va supposer que cette assertion est fausse ; il est facile de voir que l'on peut se limiter à supposer que cette limite supérieure est < 1 . Posons, pour simplifier (!), $a = \sqrt{\frac{\log(f+2)\log 2}{\alpha}}$. Soit m un entier positif très grand. Soit $\eta > 0$ assez petit, on pose

$$s = \frac{1}{1-\eta}\sqrt{\frac{\log(f+2)}{6m}} , \qquad t = \exp[-m2^{m-1}] , \qquad X_1 = X = \exp[\tfrac{2}{t} m^3] .$$

Par hypothèse, Σ est infinie, donc $\lim_{h\to\infty} H^{(h)} = \infty$. Il est donc possible de choisir m éléments

$$K_h = K^{(i_h)} = \frac{P_h}{Q_h} ,$$

de poids H_h , et qui vérifient

$$X_h \leqslant H_h \leqslant \exp[(\log X_h)^{\rho}] , \qquad \text{avec} \quad X_{h+1} = H_h^{2/t} , \quad h = 1 , \dots , m-1 .$$

On a alors

$$\log X_2 \leqslant \frac{2}{t}(\log X_1)^{\rho} , \qquad \log X_3 \leqslant \frac{2}{t}(\log X_2)^{\rho} , \qquad \dots .$$

On en déduit

$$\log X_m \leqslant \left(\frac{2}{t}\right)^{1+\rho+\dots+\rho^{m-2}} (\log X_1)^{\rho^{m-1}} \leqslant \left(\frac{2}{t}\right)^{m\rho^{m-2}} (\log X_1)^{\rho^{m-1}}$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{t}\right)^{m\rho^{m-2}} \left(\frac{2}{t}\right)^{m^3\rho^{m-1}} \leqslant \left(\frac{2}{t}\right)^{2m^3\rho^{m-1}} \leqslant (2e)^{2m^4(2\rho)^{m-1}} .$$

Soit $\rho < \rho' < 2^{(6-\alpha)/\alpha}$; alors, si m est assez grand,

$$\log X_m \leqslant \exp[\exp[m \log(2\rho')]] .$$

D'où l'on tire

$$\sigma = \sum_{h=1}^{m} \varepsilon(H_h) > m\varepsilon(H_m) \geqslant \sqrt{m}\,\frac{1}{\log(2\rho')} > 4(1+\eta')s ,$$

pour un certain $\eta' > 0$ assez petit. On choisit r_1 très grand. On choisit ensuite $m-1$ entiers positifs $r_2, \dots, r_m$ tels que

$$(r_h - 1)\log H_h < r_1 \log H_1 \leqslant r_h \log H_h \qquad (h = 2, 3, \dots, m) ,$$

de sorte que

$$\theta = \max_h \frac{1}{r_h - 1} \leqslant \frac{1}{m} .$$

Ces conditions entraînent

$$r_{h-1} > \frac{1}{t} r_h \qquad (h = 2, \dots, m) .$$

On peut appliquer le lemme 5, où $F(x)$ désigne le polynôme minimal de ξ, et où on pose

$$\rho_h = \sigma_h = r_h \qquad \text{et} \qquad \tau_h = \frac{(\lambda + \mu) r_h}{\lambda + \mu + \varepsilon(H_h)} .$$

Les conditions sont vérifiées, pourvu que m et r_1 soient assez grands. D'où l'existence d'un polynôme A vérifiant les conditions de ce lemme.

On peut aussi appliquer le lemme de Roth, pourvu que

$$H_1 \geqslant 2^{(1/t)n(m-1)(2m+1)} \quad \text{et} \quad c^{mr_1} \leqslant H_1^{(1/m)r_1 t} , \qquad \text{soit} \quad H_1 \geqslant c^{(1/t)m^2} .$$

Tout ceci est vérifié si m est assez grand, car

$$H_1 \geqslant X = \exp[\tfrac{2}{t} m^3] .$$

Il en résulte que l'indice Λ de A au point $K = (K_1, \dots, K_m)$ est $\leqslant 1$. Il existe donc ℓ tel que $A_\ell(K) \neq 0$ et $\Lambda = \frac{\ell}{r}$.

- <u>Une borne supérieure de</u> $A_{(\ell)}$. - Soit J^* l'ensemble des j tels que

$$\ell \leqslant j \leqslant r \qquad \text{et} \qquad \frac{j}{\tau} > \left(\frac{1}{2} - s\right)\frac{r}{\tau} .$$

Alors

$$A_{(\ell)} = \sum_{j \in J^*} A_j(\xi, \dots, \xi)\binom{j}{\ell}(K - \xi)^{j-\ell} ,$$

et

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant r} |A_j(\xi, \dots, \xi)|\binom{j}{\ell} \leqslant c_5^{|r|} .$$

On a défini τ_h par l'égalité

$$\frac{r_h}{\tau_h} = 1 + \frac{\varepsilon(H_h)}{\lambda + \mu} .$$

D'après le choix de H_h et de r_h, on a

$$\max_{j\in J^*} |K - \xi|^{j-\ell} \leqslant c_1^{|r|} \max_{j\in J^*} \prod_{h=1}^{m} H_h^{-(j_h-\ell_h)[\lambda+\mu+\varepsilon(H_h)]}$$
$$\leqslant c_1^{|r|} \max_{j\in J^*} H_1^{-(\lambda+\mu)r_1((j-\ell)/\tau)}$$
$$\leqslant c_1^{mr_1} H_1^{-(\lambda+\mu)r_1[(\frac{1}{2}-s)r/\tau-\ell/\tau]} .$$

Or $\frac{r}{\tau} = m + \frac{\sigma}{\lambda + \mu}$ et $\tau_h \geqslant (1 - \varepsilon)r_h \geqslant \frac{1}{2} r_h$. Donc $\frac{\ell}{\tau} \leqslant 2 \frac{\ell}{r} = 2\Lambda \leqslant 2$. Finalement, il vient

$$A_{(\ell)} \leqslant (c_1 c_5)^{mr_1} H_1^{-(\lambda+\mu)r_1[(\frac{1}{2}-s)(m+(\sigma/(\lambda+\mu)))-2]} .$$

On écrit $A_{(\ell)} = \frac{N_{(\ell)}}{D_{(\ell)}}$, avec $(N_{(\ell)}, D_{(\ell)}) = 1$. On va majorer $D_{(\ell)}$, et minimiser $N_{(\ell)}$, afin de trouver une borne inférieure de $A_{(\ell)}$.

– Une majoration de $D_{(\ell)}$. – On a

$$\frac{N_{(\ell)}}{D_{(\ell)}} = \sum_{0\leqslant i\leqslant r} a_i \binom{i}{\ell}\left(\frac{P}{Q}\right)^{i-\ell} = \sum_{i\in I} a_i \binom{i}{\ell}\left(\frac{P}{Q}\right)^{i-\ell} ,$$

où I désigne l'ensemble $\{i \mid 0 \leqslant i - \ell \leqslant r - \ell$ et $S_1 < \frac{i - \ell}{r} < S_2\}$, avec $S_1 = \left(\frac{1}{2} - s\right)m - \Lambda$ et $S_2 = \left(\frac{1}{2} - s\right)m + \Lambda$. Ainsi,

$$|D_\ell| \leqslant \underset{i\in I}{\text{p. p. c. m.}} (Q^{i-\ell}) = D \qquad \text{(disons)} .$$

Or,

$$|Q_h|_{g''} \leqslant c_4 H_h^{\mu-1} , \qquad h = 1, \dots, m .$$

On peut donc écrire Q_h sous la forme $Q_h^* Q_h^{**}$, où Q_h est une puissance de g'' qui vérifie

$$\frac{1}{c_4 g''} H_h^{1-\mu} \leqslant |Q_h^*| < \frac{1}{c_4} H_h^{1-\mu} \leqslant c_{10} H_h^{1-\mu} , \qquad \text{où } c_{10} \geqslant 1 ,$$

et

$$|Q_h^{**}| \leqslant c_4 g'' H_h^{\mu} .$$

Il est clair que $D \leqslant D^* D^{**}$, avec

$$D^* = \underset{i\in I}{\text{p. p. c. m.}}\ Q^{*i-\ell} , \qquad D^{**} = \text{p. p. c. m. } Q^{**i-\ell} .$$

En particulier,

$$D^* = \max_{i\in I} Q^* \leqslant c_5^{|r|} \max_{i\in I} (H^{i-\ell})^{1-\mu}$$

$$\leqslant c_5^{|r|} \max H_1^{(1-\mu)(1+\theta)r_1((i-\ell)/r)} \leqslant c_5^{mr_1} H_1^{(1-\mu)(1+\theta)S_2 r_1} ,$$

et

$$D^{**} \leqslant c_6^{mr_1} H_1^{\mu(r-\ell)} \leqslant H_1^{\mu(1+\theta)S_3 r_1} , \qquad \text{avec} \quad S_3 = m - \Lambda ,$$

d'où

$$|D_{(\ell)}| \leqslant c_7^{mr_1} H_1^{(1-\mu)(1+\theta)r_1[(\frac{1}{2}+s)m-\Lambda]+\mu(1+\theta)r_1(m-\Lambda)} .$$

- Une borne inférieure pour $N_{(\ell)}$. - Le même type de raisonnement que plus haut conduit à

$$|N_{(\ell)}| \geqslant c_8^{-mr_1} H_1^{(1-\lambda)S_1 r_1} \geqslant c_8^{-mr_1} H_1^{(1-\lambda)r_1[(\frac{1}{2}-s)m-\Lambda]} .$$

- Conclusion. - Il résulte de ces inégalités que

$$|A_{(\ell)}| \geqslant c_9^{-mr_1} H_1^{E^* r_1} ,$$

avec

$$E^* = (1-\lambda)\left[\left(\frac{1}{2}-s\right)m-\Lambda\right] - (1-\mu)(1+\theta)\left[\left(\frac{1}{2}+s\right)m-\Lambda\right] - \mu(1-\theta)(m-\Lambda) .$$

En comparant ceci avec la majoration précédente de $|A_{(\ell)}|$, il vient

$$H_1^E \leqslant c_{10}^m ,$$

avec

$$E = (\lambda+\mu)\left[\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(m+\frac{\sigma}{\lambda+\mu}\right) - 2\Lambda\right] + E^*$$

$$= \left(\frac{1}{2}-s\right)\sigma - [2+\theta(1-\mu)]\, ms - \left(\frac{1+\mu}{2}\right)\theta_m - (\lambda+2\mu-\theta)\Lambda .$$

Les inégalités connues sur tous ces paramètres conduisent à

$$E > \frac{\eta'}{2}\sqrt{m} - c_{20} .$$

On en déduit

$$H_1 \leqslant c_{30}^{\sqrt{m}} ,$$

ce qui contredit $H_1 \geqslant \exp[\frac{2}{t} m^3]$, si m est assez grand. Ceci achève la démonstration.

V. Applications

THÉORÈME 2. - Soient p un nombre premier, q un entier tel que

$$p > q \geqslant 2 \quad .$$

Soit $\Sigma = (n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots)$ une suite strictement croissante d'entiers > 0 tels que

$$\left|\left(\frac{p}{q}\right)^n - g_n\right| \leqslant \exp\left(-\frac{\theta_n \log p}{\sqrt{\log\log n}}\right) , \qquad \text{si } n \in \Sigma , \quad g_n \text{ entier} ,$$

avec $\theta = \frac{4}{\sqrt{a}}\sqrt{\log 3 \log 2}$ et $0 < a < 6$. Alors

$$\limsup \frac{n^{(h+1)}}{(n^h)^\rho} = \infty , \qquad \text{si } 1 < \rho < 2^{6/a-1} \quad .$$

Démonstration. - Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = \frac{p^n}{d_n}$, $Q_n = \frac{g_n}{d_n} q^n$, où

$$d_n = (p^n , g_n q^n) = (p^n , g_n) \quad .$$

d_n et P_n sont des puissances de p , q^n divise Q_n , et donc

$$n \leqslant \frac{\log Q_n}{\log q} ,$$

et il est clair que

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = 1 \quad .$$

Il existe trois constantes γ_1 , γ_2 , γ_3 telles que

$$0 < Q_n \leqslant \gamma_1 P_n \leqslant \gamma_1 p^n , \qquad \text{et donc} \qquad n \geqslant \frac{\log Q_n - \log \gamma_1}{\log p} ,$$

$$|Q_n|_q \leqslant q^{-n} \leqslant \gamma_2 Q_n^{\mu-1} ,$$

$$0 < g_n^{-1} \leqslant \gamma_3 Q_n^{-\mu} , \qquad \text{avec } \mu = \frac{\log(p/q)}{\log p} \quad .$$

Pour tout $\eta > 0$,

$$\frac{n \log p}{\sqrt{\log\log n}} \geqslant (1-\eta) \frac{\log Q_n}{\sqrt{\log\log\log Q_n}}$$

et l'inégalité

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - 1\right| = g_n^{-1}\left|\left(\frac{p}{q}\right)^n - g_n\right| \leqslant \gamma_3\, Q_n^{-\mu-M} ,$$

$$\text{avec} \quad M = \frac{4(1 - \eta)}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\log 3 \log 2}\,(\log\log\log Q_n)^{-\frac{1}{2}}$$

ont lieu si n est assez grand. On peut appliquer le théorème 1 avec

$$\xi = 1 , \quad f = 1 , \quad \lambda = 0 , \quad \mu = \frac{\log(p/q)}{\log q} , \quad g' = p , \quad g'' = q , \quad K^{(h)} = \frac{P_n^{(h)}}{Q_n^{(h)}} ,$$

d'où le fait que

$$\limsup \frac{\log Q_n^{(h+1)}}{(\log Q_n^{(h)})^{\rho}} = \infty .$$

Le théorème résulte alors des inégalités

$$\frac{\log Q_n - \log \gamma_1}{\log p} \leqslant n \leqslant \frac{\log Q_n}{\log q} .$$

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> $g \geqslant 2$ <u>un entier fixé. Soit</u> (θ_n) <u>une suite de réels de l'intervalle</u> $]0 , 1[$. <u>Soit</u> ω_n <u>une suite de réels</u> > 0 <u>qui tendent vers l'infini. Soit</u> (ν_n) <u>une suite d'entiers qui vérifient</u>

$$\nu_1 \geqslant 3 , \ldots , \nu_{n+1} \geqslant \nu_n\left(1 + \frac{\omega_n}{\sqrt{\log\log \nu_n}}\right) , \ldots .$$

<u>Soit</u> a_n <u>une suite infinie d'entiers</u> > 0 <u>premiers à</u> g <u>qui vérifient</u>

$$a_{n+1} \leqslant g^{\theta_n(\nu_{n+1}-\nu_n)} .$$

<u>Si on suppose que la suite</u> $(1 - \theta_n)\omega_n$ <u>tend vers l'infini, et qu'il existe</u> $\rho > 1$ <u>tel que</u> $(1 - \theta_n)\nu_n^{\rho}$ <u>tende vers l'infini, alors le nombre</u>

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, g^{-\nu_n}$$

<u>est transcendant.</u>

<u>Démonstration.</u> - Posons

$$P_N = g^{\nu_N} \sum_{n=1}^{N} a_n\, g^{-\nu_n} , \qquad Q_N = g^{\nu_N} , \qquad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\, g^{-\nu_n} ,$$

de sorte que

$$\xi - \frac{P_N}{Q_N} = R_N > 0 .$$

On voit facilement que $(P_N , Q_N) = 1$.

De plus,

$$0 < R_N < a_{N+1} \, g^{-\nu_{N+1}} + \sum_{m=\nu_{N+1}}^{\infty} g^{-m} \leqslant 3a_{N+1} \, g^{-\nu_{N+1}} ,$$

donc

$$0 < R_N \leqslant 3Q_N^{-1-[((1-\theta_N)\omega_N)/(\sqrt{\log \log \log Q_N/(\log g)})]}$$

$$\leqslant Q_N^{-1-\frac{1}{2}(1-\theta_N)\omega_N(\log \log \log Q_N)^{-\frac{1}{2}}} ,$$

si N est assez grand.

Supposons ξ algébrique de degré f . Appliquons le théorème avec $\rho' = \rho + 1$, ce qui est légitime car $(1 - \theta_n)\omega_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on obtient

$$\limsup \frac{\log Q_{N+1}}{(\log Q_N)^{\rho'}} = \infty , \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad \limsup \frac{\nu_{N+1}}{\nu_N^{\rho'}} = \infty .$$

Il en résulte que, pour tout a fixé,

$$(1 - \theta_N)\nu_{N+1} \geqslant (1 - \theta_N)\nu_N^{\rho+1} \geqslant a\nu_N ,$$

pour une infinité de valeurs de N . Ainsi,

$$0 < R_N < cQ_N^{-(f+1)} ,$$

pour une infinité de N . Ceci contredit le théorème de Liouville, donc ξ est transcendant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MAHLER (Kurt). - Lectures on diophantine approximations. Part 1. - Ann Arbor, University of Notre Dame, 1961.

(Texte reçu le 3 mai 1971)

Maurice MIGNOTTE
158 boulevard Galliéni
92 - VILLENEUVE-LA-GARENNE