

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTHE GRANDET-HUGOT

P.-V. éléments dans un corps de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 16, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

P.-V. ÉLÉMENTS DANS UN CORPS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

par Marthe GRANDET-HUGOT

1. Introduction et notations.

On appelle nombre de Pisot-Vijayaraghavan (ou plus simplement nombre P.-V.), un entier algébrique réel supérieur à 1, dont tous les conjugués par rapport à \mathbb{Q} sont de valeur absolue strictement inférieure à 1. Nous noterons par S l'ensemble des nombres P.-V. L'ensemble S possède des propriétés remarquables, nous en rappellerons quelques-unes avant de les généraliser à d'autres ensembles de nombres algébriques.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel $\theta > 1$ appartienne à S , est qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, si l'on pose $\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$, où $u_n \in \mathbb{Z}$, $-\frac{1}{2} < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ converge, de plus $\lambda \in \mathbb{Q}(\theta)$. Ce résultat a été prouvé en associant à la suite $\{u_n\}$ la fonction à variable complexe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n ;$$

on montre alors que f est une fraction rationnelle, d'où l'on déduit que $\theta \in S$ [10].

En associant à une suite convergente d'éléments $\theta_\lambda \in S$ une famille compacte de fractions rationnelles, SALEM [11] a montré que l'ensemble S est fermé. A partir de ce résultat, on peut obtenir une caractérisation des ensembles dérivés successifs de S ([6], [8]).

On peut étendre certaines de ces propriétés, en particulier ce qui concerne la répartition modulo 1, à des ensembles d'éléments algébriques dans l'anneau des adèles de \mathbb{Q} [2].

Par ailleurs, H. G. SENGE [12] a construit des ensembles fermés de nombres algébriques sur un corps K , dont la définition rappelle celles des P.-V. éléments. Nous étudierons d'autres ensembles fermés, et en donnerons une caractérisation.

Pour un corps quadratique imaginaire, l'étude est analogue à ce qu'elle est pour le corps des rationnels [8]. Nous supposons donc que le corps de base K n'est pas un tel corps.

Nous désignerons par K un corps de nombres algébriques de degré s , dans lequel

l'anneau A des entiers algébriques est partout dense (K n'est pas un corps quadratique imaginaire), V_∞ est l'ensemble des valeurs absolues archimédiennes de K , V est un ensemble fini de valeurs absolues K contenant V_∞ . Si v est une valeur absolue sur K , on désignera par K_v la complétion de K pour cette valeur absolue, par Γ_v le groupe des valeurs absolues de K_v , et par Ω_v la complétion de sa clôture algébrique.

De plus, nous poserons

$$\Omega_V = \prod_{v \in V} \Omega_v \quad \text{et} \quad \Omega_\infty = \prod_{v \in V_\infty} \Omega_v .$$

2. Fonctions à caractéristique bornée dans Ω_V .

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de donner une généralisation du théorème suivant dû à D. CANTOR :

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in A$, $z \in \mathbb{C}$, une série de puissances. Supposons que les fonctions conjuguées $f^{(i)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} z^n$ ($i = 1, \dots, s$) soient à caractéristique bornée dans le disque $|z| < \rho_i$ (c'est-à-dire soient le quotient de deux fonctions régulières bornées), où $\prod_{i=1}^s \rho_i \geq 1$. Alors f est une fraction rationnelle.

Auparavant, nous définirons les fonctions à caractéristique bornée dans un corps valué complet.

Soit Ω un corps valué complet, soit f une fonction définie pour $\{x \in \Omega; |x| < \rho\}$; on dit que f est à caractéristique bornée dans $|x| < \rho$, si elle est le quotient de deux fonctions régulières bornées pour $|x| < \rho$.

Soit f une fonction à caractéristique bornée pour $|x| < 1$, et régulière à l'origine; alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ;$$

nous désignerons par Δ_n son déterminant de Kronecker d'ordre n ,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{2n} \end{vmatrix} .$$

D. CANTOR a montré que, si Ω est muni d'une valeur absolue archimédienne, alors

$|\Delta_n|^{1/n} = o(1)$; nous allons voir que, si la valeur absolue est ultramétrique, alors $|\Delta_n|^{1/n} = o(1)$. Ce résultat se prouve de manière analogue à celui de CANTOR.

On en déduit facilement que, si f est à caractéristique bornée pour $|x|_v < \rho$, alors

$$\begin{aligned} \rho^n |\Delta_n|^{2/n} &= o(1) , & \text{si } v \text{ est archimédienne ,} \\ \rho^n |\Delta_n|_v^{2/n} &= o(1) , & \text{si } v \text{ est ultramétrique .} \end{aligned}$$

Soit maintenant V un ensemble fini de valeurs absolues de K contenant V_∞ , nous poserons

$$K^V = \{x \in K \mid |x|_v \leq 1 \text{ pour } v \notin V\} ;$$

alors K^V est un sous-anneau de K contenant A ; nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in K^V$, une fonction à caractéristique bornée pour $|x|_0 < \rho_v$, $v \in V$, où $\prod_{v \in V} \rho_v \geq 1$. Alors f est une fraction rationnelle.

Preuve. - D'après ce qui précède, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} \rho_v^n |\Delta_n|_v^{2/n} &< \varepsilon , & \text{pour } v \in V_\infty , \\ \rho_v^n |\Delta_n|_v^{2/n} &\leq M_v , & \text{pour } v \in V - V_\infty , \\ |\Delta_n|_v &\leq 1 , & \text{pour } v \notin V , \end{aligned}$$

d'où

$$\prod_v |\Delta_n|_v \leq (M\varepsilon^s)^{n/2} \prod_{v \in V} \rho_v^{-n^2} ;$$

donc, si $\prod_{v \in V} \rho_v \geq 1$, on peut choisir ε assez petit pour que $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_v |\Delta_n|_v = 0$, donc, à partir d'un certain rang, $\Delta_n = 0$, f est donc une fraction rationnelle.

Par ailleurs, K^V , qui est une intersection d'anneaux de valuation, est un anneau de Fatou [1], donc, si $f(x) = \sum a_n x^n$, $a_n \in K^V$ est une fraction rationnelle, ses pôles sont les inverses d'entiers algébriques sur K^V .

3. Familles compactes de fractions rationnelles.

Nous allons considérer des familles de fractions rationnelles analogues à celles qui ont été associées à l'ensemble S ([6], [11]).

DÉFINITION 1. - Soit $\mathfrak{F}(K, V, r, h, \delta)$ la famille des fractions rationnelles non constantes ayant les propriétés suivantes :

- (1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de l'origine, et $a_n \in K^V$, $x \in \Omega$;
- (2) f a au plus h_v pôles où $0 \leq h_v$ dans le disque $|x|_v < r_v$, $v \in V$, et ces pôles sont dans la couronne $0 < \delta_v < |x|_v < r_v$;
- (3) Pour $|x|_v = r_v$, $|f(x)|_v \leq 1$ si $v \in V_{\infty}$, et pour $r'_v < |x|_v < r_v$, $|f(x)|_0 \leq 1$ si $v \in V - V_{\infty}$;
- (4) $\prod_{v \in V} r_v \geq 1$.

Cette définition est légèrement différente de celle de SENGE [12].

Nous allons poser

$$h = \{h_v\}_{v \in V}, \quad r = \{r_v\}_{v \in V}, \quad \delta = \{\delta_v\}_{v \in V}.$$

Nous allons alors démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - La famille $\mathfrak{F}(K, V, r, h, \delta)$ est compacte.

Preuve. - Soit $(f_{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(K, V, r, h, \delta)$; nous supposons que toutes les fonctions f_{λ} ont exactement k_v pôles ($0 \leq k_v \leq h_v$) dans la couronne

$$0 < \delta_v \leq |x|_v < r_v, \quad v \in V \text{ de } \Omega_v ;$$

nous désignerons ces pôles par $\alpha_{1,\lambda}, \dots, \alpha_{k_v,\lambda}$.

(a) $v \in V_{\infty}$. Posons

$$\varphi_{\lambda}(x) = \prod_{i=1}^{k_v} \frac{(\alpha_{i,\lambda} - x)r}{r^2 - \bar{\alpha}_{i,\lambda} x} ;$$

si $k_v = 0$, nous poserons simplement $\varphi_{\lambda}(x) = 1$. Alors φ_{λ} est holomorphe pour $\{x \in \Omega_{\infty} \mid |x|_v < r_v\}$, et $|x|_v = r_v \implies |\varphi_{\lambda}(x)|_v = 1$. Il en résulte que

$$|\varphi_{\lambda}(x) f_{\lambda}(x)|_v \leq 1, \quad \text{pour } \{x \in \Omega_{\infty} \mid |x|_v = r_v\} ;$$

ces fonctions forment donc une famille compacte $\{\varphi_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$, de laquelle on peut extraire une suite uniformément convergente dans tout compact de $\{x \in \Omega_{\infty} \mid |x|_v < r_v\}$;

nous désignerons par F la limite de cette suite.

Par ailleurs, quitte à extraire de la suite donnée une suite partielle, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_{i,\lambda} = \alpha_i, \quad \text{avec } 0 < \delta_v \leq |\alpha_i|_v \leq r_v \quad \text{pour } v \in V_\infty.$$

Il en résulte que la suite $\{\varphi_\lambda\}$ converge uniformément vers φ définie par

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^k \frac{(\alpha_i - x)r}{r^2 - \bar{\alpha}_i x},$$

et $|x|_v = r_v \implies |\varphi(x)|_v = 1$. Soit $f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x)$, alors $f(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x)}$, et f admet au plus h_v pôles dans la couronne $\delta_v \leq |x|_v < r_v$.

Considérons maintenant les développements de Taylor de f_λ et f au voisinage de l'origine :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda,n} x^n, \quad a_{\lambda,n} \in K^V,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$

étant donnée la convergence uniforme de la suite f_λ vers f dans tout compact de $|x|_v < \delta_v$, on a

$$a_n = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_{\lambda,n}.$$

Soit $\eta_v < \delta_v$, alors

$$\max_{|x|_v = \eta_v} |f_\lambda(x)| = \max_{|x|_v = \eta_v} \left| \frac{F_\lambda(x)}{\varphi_\lambda(x)} \right|_v.$$

Or F_λ est holomorphe pour $|x|_v \leq r_v$, et $|F_\lambda(x)|_v \leq 1$ pour $|x|_v = r_v$. Par ailleurs, la suite $\{\alpha_{i,\lambda}\}$ converge vers α_i , $|\alpha_i|_v \leq r_v$, donc

$$|\varphi_\lambda(x)|_v \geq \left| \frac{r_v(\delta_v - \eta_v)}{r_v^2 + \eta_v r_v} \right|_v^{k_v}, \quad \text{pour } |x|_v = \eta_v.$$

On peut donc trouver une constante M_v telle que

$$\max_{|x|_v = \eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leq M_v;$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy,

$$|a_{\lambda,n}|_v \leq \frac{M_v}{\eta_v^n}, \quad \text{pour } v \in V_\infty.$$

(b) $v \in V - V_\infty$. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x) &= \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{x}{\alpha_{i,\lambda}}\right), & \text{si } k_v \neq 0, \\ \varphi_\lambda(x) &= 1, & \text{si } k_v = 0; \end{aligned}$$

les $|\alpha_{i,\lambda}|_v$ sont bornées, et $\varphi_\lambda(x) \in K_v[x]$, et K_v étant à valuation discrète, on peut supposer, quitte à extraire une suite partielle, qu'à partir d'un certain rang tous les φ_λ ont même polygone de Newton, ils forment donc une famille compacte.

Soit $\eta_v \in \Gamma_v$, $\eta_v < \delta_v$, et soit r_v'' un nombre tel que $r_v' < r_v'' < r_v$; alors, pour $x \in \hat{\Omega}_v$,

$$\begin{aligned} \max_{|x|_v = \eta_v} |f_\lambda(x)|_v &= \max_{|x|_v = \eta_v} |\varphi_\lambda(x) f_\lambda(x)|_v \\ &= \max_{|x|_v = \eta_v} |F_\lambda(x)|_v; \end{aligned}$$

si l'on pose $F_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x) f_\lambda(x)$, et, puisque F_λ est holomorphe pour $|x|_v < r_v$,

$$\max_{|x|_v = \eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leq \max_{|x|_v = r_v''} |F_\lambda(x)|_v \leq \max_{|x|_v = r_v''} |\varphi_\lambda(x)|_v,$$

donc

$$\max_{|x|_v = \eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leq \left(\frac{r_v}{\delta_v}\right)^{k_v},$$

et, d'après les inégalités de Cauchy,

$$|a_{\lambda,n}|_v \leq \left(\frac{r_v}{\delta_v}\right)^{k_v} \frac{1}{\eta_v^n}.$$

(c) Pour $v \notin V$, on a $|a_{\lambda,n}|_v \leq 1$.

On déduit des résultats précédents que

$$H(a_{\lambda,n}) = \prod_v \max(1, |a_{\lambda,n}|_v) \leq M_n.$$

M_n ne dépendant pas de λ , les $a_{\lambda,n}$ appartiennent à un ensemble de hauteur

bornée, et forment donc une suite discrète, et, à partir d'un certain rang,
 $a_{\lambda,n} = a_n$ et

$$a_n = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_{\lambda,n} \in K^V .$$

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Nous avons vu que $|f_{\lambda}(x)|_V$ est uniformément bornée pour $|x|_V \leq r_V$, de plus les séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda,n} x^n$ convergent faiblement vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donc, pour $|x|_V \leq r_V$, la suite $\{f_{\lambda}\}$ converge uniformément vers f ([7], p. 9, lemme 1.3).

De plus, de la suite des polynômes $\{\varphi_{\lambda}\}$, on peut extraire une suite partielle convergeant vers un polynôme φ . Et la suite des fonctions $\{F_{\lambda}\}$, qui est uniformément bornée dans $|x|_V \leq r_V$, converge faiblement vers F , donc converge uniformément, et F est holomorphe et bornée pour $|x|_V < r_V$.

Il résulte de ce qui précède que $r = \frac{F}{\varphi}$ est à caractéristique bornée pour $|x|_V < r_V$, donc est une fraction rationnelle dont les pôles éventuels sont les inverses d'entiers algébriques sur K^V . Et $f \in \mathfrak{F}(K, V, r, h, \delta)$.

Nous allons maintenant étudier des sous-familles compactes de $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(K, V, r, h, \delta)$, et à certaines d'entre elles nous pourrions associer des ensembles fermés de nombres algébriques.

DÉFINITION 2. - Nous désignerons par $\mathfrak{F}_1(K, V, r, h, \delta)$ la sous-famille de \mathfrak{F} ainsi définie :

- (1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in K^V$;
- (2) f admet au plus h_V pôles dans $|x|_V < r_V$ qui sont situés dans la couronne $0 < \delta_V \leq |x|_V < r_V$;
- (3) $|f(x)|_V \leq 1$, pour $|x|_V = r_V$ si $v \in V_{\infty}$, et pour $r'_V < |x|_V < r_V$ si $v \in V - V_{\infty}$;
- (4) $\prod_{r \in V} r_V \geq 1$;
- (5) $|f(0)|_V \geq 1$, pour tout $v \in V$.

Il est clair que cette famille est compacte, puisque, si $|f_{\lambda}(0)|_V \geq 1$, alors $|f(0)|_V \geq 1$.

De plus, la condition (5) entraîne que, pour $v \in V_{\infty}$, f a au moins un pôle dans $|x|_V \leq r_V$, tandis que, pour pouvoir affirmer l'existence d'au moins un pôle dans $|x|_V < r_V$ et $v \in V - V_{\infty}$, il faudrait une condition supplémentaire.

DÉFINITION 3. - Soit V' un sous-ensemble quelconque de V ; nous désignerons par $\mathfrak{F}_{V'}(K, V, r, h, \delta)$ la sous-famille de \mathfrak{F} vérifiant $|f(0)|_v \geq 1$ pour $v \in V'$.

On a également une famille compacte de fractions rationnelles, et on peut affirmer que, pour $v \in V' \cap V_\infty$, f admet au moins un pôle dans $|x|_v \leq r_v$ [5].

4. Ensembles fermés d'entiers algébriques.

Si $V = V_\infty$, alors, pour $f \in \mathfrak{F}$, $a_n \in A$, et les pôles de f sont les inverses d'entiers algébriques.

DÉFINITION 4. - Nous désignerons par $S_{V'}(K)$ l'ensemble suivant : $\theta \in S_{V'}(K)$ si, et seulement si :

- (1) $\theta \in \Omega_\infty$, et est entier algébrique sur A ;
- (2) $|\theta|_v > 1$, si $v \in V'$;
- (3) Tous les conjugués de θ_v dans Ω_v (autre que lui-même pour $v \in V'$) sont de valeur absolue strictement inférieure à 1 .

A cet ensemble, on peut associer la famille de fractions rationnelles $\mathfrak{F}(K, V, 1, h, \delta)$. A une suite convergente de $\theta_\lambda \in S_{V'}(K)$, on peut faire correspondre une famille $f_\lambda \in \mathfrak{F}(K, V, 1, h, \delta)$, et, de cette famille, on peut extraire une suite partielle convergeant vers une fonction $f \in \mathfrak{F}(K, V_\infty, 1, h, \delta)$; nous allons étudier les propriétés de la fonction limite.

Soit $\theta \in S_{V'}(K)$, et soit P son polynôme minimal ; posons

$$P(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n , \quad P(x) \in A[x] ,$$

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + q_1 x + \dots + q_n x^n .$$

Il est facile de voir que, si P n'est pas réciproque,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathfrak{F}(K, V_\infty, 1, h, \delta) ;$$

or, dans une suite convergente, il n'y a qu'un nombre fini de tels éléments que nous pouvons supprimer sans modifier la limite.

Alors $f(0) = q_n$ et $\prod_{v \in V_\infty} |f(0)|_v \geq 1$; on ne peut donc pas affirmer que $|f(0)|_v \geq 1$ pour tout $v \in V'$, on peut seulement affirmer que :

- (1) $|f(0)|_v < 1$ pour $v \in V_\infty - V'$, car sinon f ne serait pas holomorphe dans $|x|_v \leq 1$;

(2) Pour au moins un $v_0 \in V'$, on a $|f(0)|_{v_0} > 1$.

Toutes ces considérations ne permettent pas de dire si l'ensemble $S_{V'}(K)$ est fermé ou non. Toutefois, nous pouvons en obtenir un sous-ensemble fermé avec la définition suivante :

DÉFINITION 5. - $S_{V'}^*(K)$ est le sous-ensemble de $S_{V'}(K)$, tel que, pour $\theta \in S_{V'}^*(K)$, on puisse associer une fraction rationnelle $f \in \mathfrak{F}_{V'}(K, V, 1, h, \delta)$.

On voit alors facilement que les ensembles $S_{V'}^*(K)$ sont des ensembles fermés.

Remarques. - Si $k = \text{Card } V'$, on voit que les éléments de $S_{V'}(K)$ considérés comme entiers algébriques sur \mathbb{Q} sont des P.-V. k -triples [3], et, si $k = 1$, alors on obtient des nombres P.-V. qui sont aussi entiers algébriques sur K .

Dans le cas où V' est réduit à un seul élément, nous obtiendrons les résultats suivants :

DÉFINITION 6. - Soit v_0 une valeur absolue réelle de K (s'il en existe) ; nous désignons par $S_{v_0}(K)$ l'ensemble $S_{V'}(K)$ où $V' = \{v_0\}$; alors $|f(0)|_{v_0} \geq 1$, donc $f \in \mathfrak{F}_{v_0}(K, V_\infty, 1, h, \delta)$, et :

Les ensembles $S_{v_0}(K)$ sont des ensembles fermés d'entiers algébriques.

Remarques. - Un élément $\theta \in S_{v_0}(K)$, si on le considère comme entier algébrique sur \mathbb{Q} , appartient à l'ensemble S des nombres P.-V. ; toutefois, les conditions imposées pour que $f \in \mathfrak{F}_{v_0}$ montrent que cette fraction ne peut pas être celle qui lui était associée dans le domaine réel, ce qui entraîne que le polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$ associé à θ n'est pas irréductible dans $A[x]$; les ensembles $S_{v_0}(K)$ sont donc des sous-ensembles fermés de S distincts de S .

De plus, si $f(x) = \sum a_n x^n$ est associée à $\theta \in S_{v_0}(K)$, alors, pour $v \neq v_0$, $|a_n|_v < 1$, il en résulte que $|a_n|_{v_0} > 1$, donc $a_n \in S \cap A$. Donc les coefficients du développement de Taylor de $f \in \mathfrak{F}_{v_0}(K, V_\infty, 1, h, \delta)$ appartiennent à l'ensemble S .

Nous pouvons également construire des ensembles fermés analogues aux ensembles $S \cup \overline{S}_2$ de KELLY [9], en prenant pour v_0 une valeur absolue complexe. On obtient alors un sous-ensemble fermé de $S \cup \overline{S}_2$, et les coefficients a_n sont des éléments de cet ensemble.

5. Caractérisation des ensembles $S_{V'}(K)$.

Soit V' un sous-ensemble de V_∞ ; nous allons donner des éléments de $S_{V'}(K)$ une caractérisation analogue à celle donnée par C. PISOT [10] pour l'ensemble S .

THÉORÈME 3. - Pour qu'un élément $\theta \in \Omega_\infty$, tel que $|\theta|_v > 1$ pour $v \in V'$, appartienne à $S_{V'}(K)$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \Omega_\infty$ et une suite u_n d'éléments de A tels que

$$\lambda \theta^n = u_n + \varepsilon_n ,$$

où

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|_v^2 < \infty , \quad \text{pour } v \in V' ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|_v^2 < \infty , \quad \text{pour } v \in V_\infty - V' .$$

Preuve. - Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$; alors f est à caractéristique bornée pour $|x|_v \leq 1$, $v \in V_\infty$. C'est donc une fraction rationnelle dont le seul pôle dans $|x|_v \leq 1$, $v \in V'$, est $\frac{1}{\theta}$, et qui est holomorphe pour $|x|_v \leq 1$ si $v \in V_\infty - V'$. Donc, d'après le lemme de Fatou, $\theta \in S_{V'}(K)$ et $\lambda \in K(\theta)$.

Il est immédiat que, si $\theta \in S_{V'}(K)$, et si $\lambda \in A[\theta]$, alors la suite $\{\lambda \theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède la propriété précédente.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZAGHOU (Benali). - Algèbres de Hadamard, Bull. Soc. math. France, t. 98, 1970, p. 209-252 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).
- [2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, 104 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).
- [3] CANTOR (David G.). - On sets of algebraic integers whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.
- [4] CANTOR (David G.). - Power series with integral coefficients, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 362-366.
- [5] CHAMFY (Christiane). - Fonctions méromorphes dans le cercle-unité et leurs séries de Taylor, Chap. 4, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 8, 1958, p. 237-245.
- [6] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité, Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92.

- [7] DWORK (Bernard). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 5-85).
- [8] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 82, 1965, p. 1-35 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [9] KELLY (John B.). - A closed set of algebraic integers, Amer. J. of Math., t. 72, 1950, p. 565-572.
- [10] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248.
- [11] SALEM (R.). - A remarkable class of algebraic integers, proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.
- [12] SENGE (H. G.). - Closed sets of algebraic numbers, Duke math. J., t. 34, 1967, p. 307-323.

(Texte reçu le 1er mars 1971)

Marthe GRANDET-HUGOT
7 rue Joyeuse
14 - CAEN
