

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL OLIVIER

## Répartition des valeurs de la fonction « somme des chiffres »

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 12 (1970-1971), exp. n° 15, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1970-1971\\_\\_12\\_\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A10_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION "SOMME DES CHIFFRES"

par Michel OLIVIER

1. Introduction.

1.1. - Soit  $g \geq 2$  un nombre entier. Ecrivons chaque entier  $n$  dans la base  $g$  :

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) \cdot g^k,$$

où  $e_k(n)$  est à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, g-1\}$ .

On définit la fonction "somme des chiffres" de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , par

$$s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n).$$

Il est facile de voir que si  $j$  et  $m$  sont des entiers, on a

$$\text{Card}\{n \leq x ; s(n) \equiv j \pmod{m}\} \sim x/m.$$

En 1966, A. O. GEL'FOND [2] a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Si  $\lambda, m, \lambda', m'$  sont des entiers tels que  $m \geq 2, m' \geq 2$  et  $(m, g-1) = 1$ , on a

$$\text{Card}\{n \leq x ; s(n) \equiv \lambda \pmod{m} \text{ et } n \equiv \lambda' \pmod{m'}\} \sim x/m.m'.$$

En 1967, M. MENÈS FRANCE [3] a retrouvé ce résultat en utilisant les fonctions pseudo-aléatoires.

Enfin, en 1970, J. BESINEAU [1], par cette même méthode, a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Si  $g$  et  $g'$  sont des entiers  $\geq 2$ ,  $\lambda$  et  $\lambda'$  des entiers,  $m$  et  $m'$  des entiers  $\geq 2$  tels que  $(m, g-1) = (m', g'-1) = 1$ , on a

$$\text{Card}\{x \leq n ; s(n) \equiv \lambda \pmod{m} \text{ et } s'(n) \equiv \lambda' \pmod{m'}\} \sim x/mm',$$

en appelant  $s$  et  $s'$  les fonctions "somme des chiffres" dans la base  $g$  et  $g'$ .

1.2. - Ce dernier théorème donne la solution d'un problème proposé par GEL'FOND [2]. Nous nous proposons ici de résoudre un autre problème proposé aussi par GEL'FOND.

THÉORÈME 3. - Soient  $m, g, j$  des entiers tels que  $m \geq 2, g \geq 2, (m, g-1) = 1$ . Soit

$$T_1(x) = \text{Card}\{p \leq x, s(p) \equiv j \pmod{m}\},$$

où la lettre  $p$  désigne un nombre premier. On a

$$T_1(x) = \frac{\pi(x)}{m} + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

$\pi(x)$  étant le nombre de premiers inférieurs ou égaux à  $x$ .

Notation. - Dans toute la suite,  $p$  désignera un nombre premier.

Dans le paragraphe 2, nous donnerons quelques lemmes préliminaires à la preuve de ce théorème ; et au paragraphe 3, nous esquisserons sa démonstration.

Signalons que, de la même manière, on peut montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 4. - La suite  $(xs(p))_{p \geq 2}$  est équirépartie modulo 1 si, et seulement si,  $x$  est irrationnel.

1.3. - Remarquons qu'une condition du type  $(m, g-1) = 1$ , dans les hypothèses du théorème 3, ne peut être évitée.

En effet, on a  $s(n) \equiv n \pmod{g-1}$ , et l'égalité  $s(p) \equiv 0 \pmod{g-1}$  est équivalente à  $p \equiv 0 \pmod{g-1}$ .

Par conséquent,  $T_1(x) = 0$  dès que  $g \geq 3$ , et le théorème 3 tombe.

## 2. Quelques lemmes préliminaires.

Dans toute la suite,  $\lambda$  désignera la quantité

$$\frac{1}{2 \log g} \left( \log g \sin \frac{\pi}{2m} - \log \sin \frac{\pi}{2mg} \right).$$

Il est aisé de voir que  $1/2 < \lambda < 1$ .

2.1 LEMME 1. - Soient  $v, m, g, q$  des entiers tels que  $m \geq 2, g \geq 2, (m, g-1) = 1, 1 \leq q \leq m-1, v \geq 0$ . Soit  $\alpha$  un nombre réel. On a

$$\prod_{v=0}^{k-1} |[\sin \pi g(\alpha g^v + q/m)] / [\sin \pi(\alpha g^v + q/m)]| < g^{\lambda k+1}.$$

Une démonstration de ce lemme se trouve dans [2] de façon implicite. Nous ne la donnerons pas ici.

2.2 LEMME 2. - Soient  $n, g, d, q$  des entiers tels que  $m \geq 2, g \geq 2, d \geq 1, 1 \leq q \leq m-1$ . Posons

$$S(n) = \sum_{0 \leq j \leq n/d} \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(n-dj))$$

$$f(x) = \left( \prod_v \left( \sum_{\lambda} \exp(2i\pi \frac{q}{m} \lambda) x^{\lambda g^v} \right) \right) / \left( (1-x^d) x^{g^k-b+1} \right),$$

$$0 \leq \ell \leq g-1, 0 \leq v \leq k-1,$$

où  $f$  est une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et  $\rho$  est un entier,  $1 \leq \rho \leq d$ . On a, pour tout  $k \geq 0$ , pour tout  $\rho$  :

$$S(g^k - \rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=\frac{1}{2}} f(x) dx .$$

Preuve. - Elle s'appuie essentiellement sur l'égalité suivante, que l'on démontre terme à terme facilement.

$$\prod_v \left( \sum_{\ell} \exp(2i\pi \frac{q}{m} \ell) x^{\ell g^v} \right) = \sum_n \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(n)) x^n ,$$

$$0 \leq n \leq g^k - 1, \quad 0 \leq \ell \leq g - 1, \quad 0 \leq v \leq k - 1 .$$

On termine la démonstration en calculant le résidu de  $f$  au point  $0$ , qui est le seul pôle de  $f$  dans le cercle ( $|x| = \frac{1}{2}$ ).

**2.3 LEMME 3.** - Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme 2, et  $(m, g - 1) = 1$ , on a  $|S(n)| \leq c_1 n^\lambda$ ,  $c_1$  étant une constante ne dépendant que de  $m$  et  $g$ .

Preuve. - On utilise principalement la  $g$ -additivité (au sens de GEL'FOND) de la fonction  $s$ , c'est-à-dire  $s(n_1 + n_2) = s(n_1) + s(n_2)$  si  $n_1 = g^v n_3$  et  $n_2 < g^v$ . Donnons le principe de la démonstration.

On établit facilement la relation de "récurrence" :

$$s(n + \varepsilon g^k) = \exp(2i\pi \frac{q}{m} \varepsilon) \times S(n) + S(\varepsilon g^k - \rho) ,$$

avec  $1 \leq \rho \leq d$ , si  $n < g^k$  et  $\varepsilon \in \{0, 1, \dots, g - 1\}$ .

Par conséquent, si on écrit l'entier  $n$  dans la base  $g$ ,

$$n = \varepsilon_1 g^{k_1} + \dots + \varepsilon_j g^{k_j} \quad \text{avec } k_1 > k_2 > \dots > k_j \geq 0 ,$$

la majoration de  $|S(n)|$  est ramenée à la majoration de  $|S(g^k - \rho)|$  avec  $1 \leq \rho \leq d$ .

Puis, à l'aide du lemme 2, on se ramène au calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=\frac{1}{2}} f(x) dx .$$

En remarquant que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=R} f(x) dx = 0 ,$$

on obtient  $S(g^k - \rho) = - \Sigma' \text{Res}(f, \exp(2i\pi \frac{t}{d}))$ , où  $\text{Res}(f, \exp(2i\pi \frac{t}{d}))$  désigne le résidu de la fonction  $f$  au point  $\exp(2i\pi \frac{t}{d})$ , et  $\Sigma'$  la somme étendue aux indices  $t$  tels que  $(\exp(2i\pi \frac{t}{d}))$  soit pôle de  $f$ .

Il est facile de voir que

$$|\text{Res}(f, \exp(2i\pi \frac{t}{d}))| = \frac{1}{d} \prod_v |(\sin \pi g(\frac{t}{d} g^v + \frac{q}{m})) / (\sin \pi(\frac{t}{d} g^v + \frac{q}{m}))| , \quad 0 \leq v \leq k - 1 .$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le lemme 1, et la relation de récurrence pour majorer  $|S(n)|$ .

2.4 LEMME 4. - Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme 3, on a

$$\left| \sum_{1 \leq j \leq n} \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(dj)) \right| \leq c_2 (nd)^\lambda.$$

Preuve. - C'est immédiat en vertu du lemme 3.

Remarque. - Pour la suite, il est important de constater que les constantes  $c_2$  et  $\lambda$  ne dépendent pas de  $d$ .

### 3. Principe de la démonstration du théorème 3.

Elle découle immédiatement du théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction arithmétique, vérifiant :

- (i)  $f(n) = o(1)$  pour tout  $n$  ;
- (ii) il existe deux constantes  $\lambda$  et  $c$  telles que  $0 < \lambda < 1$ ,  $c > 0$  et pour tout  $d \geq 1$  entier,

$$\left| \sum_{1 \leq j \leq Nd} f(dj) \right| \leq c (Nd)^\lambda.$$

Alors on a

$$\sum_{p \leq N} f(p) = o\left(\frac{N}{\log N}\right).$$

Preuve. - On raffine une méthode de I. M. VINOGRADOV [7]. Nous ne donnerons pas la démonstration. Elle se trouve dans [6].

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème 3. On écrit

$$T_1(x) = \frac{1}{m} \sum_q \sum_{p \leq x} \exp(2i\pi \frac{q}{m} (s(p) - j)), \quad 0 \leq q \leq m-1,$$

ou encore

$$T_1(x) = \frac{\pi(x)}{m} + \frac{1}{m} \sum_q \exp(-2i\pi \frac{q}{m} j) \sum_{p \leq x} \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(p)), \quad 1 \leq q \leq m-1.$$

La fonction  $n \rightarrow \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(n))$  vérifie les hypothèses (i) et (ii) du théorème 5 grâce au lemme 4.

Nous avons donc

$$\sum_{p \leq x} \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(p)) = o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

ce qui termine la démonstration.

4. Remarque.

4.1. - Signalons pour terminer que le théorème 3 est lié au problème suivant : Existe-t-il une infinité de nombres premiers, dans la suite de Fermat  $2^{2^n} + 1$  ?

Soit  $s$  la somme des chiffres en base 2. Dire qu'il y a une infinité de nombres de Fermat premiers, c'est dire qu'il y a une infinité de premiers  $p$  tels que  $s(p) = 2$ .

Le théorème 3 dit que, pour tout entier  $m \geq 2$ , il y a une infinité de nombres premiers  $p$  tels que  $s(p) \equiv 2 \pmod{m}$ .

4.2. - Enfin, répétons le dernier problème posé par GEL'FOND dans [2] : Evaluer  $\text{Card}\{n \leq x ; s(n^2) \equiv j \pmod{m}\}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BESINEAU (J.). - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction somme des chiffres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 453-456.
- [2] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.
- [3] MENDES FRANCE (M.). - La fonction "somme des chiffres" et autres fonctions analogues. Une caractérisation des nombres de Pisot, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 8, 10 p.
- [4] NEWMAN (D. J.). - On the numbers of binary digits in a multiple of three, Proc. Amer. math. Soc., t. 21, 1969, p. 719-721.
- [5] OLIVIER (M.). - Sur la représentation en base  $g$  des nombres premiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 937-939.
- [6] OLIVIER (M.). - Un théorème sur les fonctions arithmétiques (à paraître).
- [7] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. - London and New York, Interscience Publishers, 1954.

(Texte reçu le 23 juin 1971)

Michel OLIVIER  
 Université de Bordeaux-I  
 Mathématiques et Informatique  
 351 cours de la Libération  
 33 - TALENCE

---