Michel Fliess

Application des variables non commutatives à divers produits de séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1969-1970), exp. nº 21, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 21, 10 p.

8 juin 1970

APPLICATION DES VARIABLES NON COMMUTATIVES À DIVERS PRODUITS DE SÉRIES FORMELLES

par Michel FLIESS

1. Introduction.

Les séries formelles rationnelles et algébriques en variables non commutatives ont été introduites par M. P. SCHÜTZENBERGER [17] pour généraliser la théorie des langages formels de N. CHOMSKY. Les séries rationnelles correspondent aux langages définis par des automates ayant un nombre fini d'états, les séries algébriques aux langages "context-free" définis par des automates à mémoire en pile (cf. [3], [21]). Il est possible de diviser l'étude de ces séries en trois directions, d'ailleurs non indépendantes entre elles. On peut essayer de généraliser aux séries des propriétés connues des langages ; souvent la démonstration en est entièrement différente (dans cette voie, signalons [14], [19], [22], [10]). On peut aussi considérer ces séries comme formant des anneaux non commutatifs, et les étudier, par exemple, à la lumière des résultats acquis par P. M. COHN [5] ; en [8], on obtient diverses propriétés de factorisations ; en [9], on détermine le commutant d'une série rationnelle.

Enfin, on peut essayer de leur généraliser des notions classiques en théorie des fonctions analytiques ; la plus importante, jusqu'à présent, est le produit de Hadamard étudié par M. P. SCHÜTZENBERGER [20]. C'est cette dernière voie que nous exploitons ici en étudiant notamment le produit de Hurwitz (cf. [6], [7]). Nous montrons, par ailleurs, que les variables non commutatives peuvent aider à obtenir de manière simple des résultats nouveaux dans le cadre classique des variables commutatives.

2. Rappels.

Soit X un ensemble fini non vide, appelé alphabet, qui engendre le monoïde libre X^*. Un élément de X^* est appelé mot ; l'élément neutre, noté $\langle\!\langle 1 \rangle\!\rangle$, est le mot vide.

Soit A un anneau commutatif unitaire. $A\langle X\rangle$ et $A\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ désignent les A-algèbres des polynômes et des séries formels en les variables associatives X (non commutatives, si $\operatorname{card} X \geqslant 2$). Un élément s de $A\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ est noté

$$s = \sum\{(s\ ,\ f)f \mid f \in X^*\}\ , \qquad \text{où } (s\ ,\ f) \in A\ .$$

$A[X]$ et $A[[X]]$ sont les A-algèbres des polynômes et des séries formelles en les variables commutatives X.

$A[[X]]$ et $A\langle\langle X\rangle\rangle$ sont des algèbres topologiques complètes, grâce à la filtration définie par l'idéal (X) des séries de terme constant nul.

On sait qu'une série de $A[[X]]$ ou $A\langle\langle X\rangle\rangle$ est inversible si, et seulement si, son terme constant est inversible dans A. Une série s de terme constant nul est dite <u>quasi-inversible</u>, le quasi-inverse de s est la série $\bar{s} = \sum_{n\geq 1} s^n$ (cette somme infinie a un sens pour la topologie définie plus haut). Le quasi-inverse est aussi défini par la relation suivante :

$$s\bar{s} + s = \bar{s}s + s = \bar{s} \ .$$

Une sous-algèbre R de $A[[X]]$ ou $A\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite <u>rationnellement close</u> si, et seulement si, l'inverse (resp. le quasi-inverse) de tout élément inversible (resp. quasi-inversible) de R appartient aussi à R.

DÉFINITION. - <u>L'algèbre $A^{rat}[[X]]$ (resp. $A^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$) des séries rationnelles est la plus petite sous-algèbre de $A[[X]]$ (resp. $A\langle\langle X\rangle\rangle$) rationnellement close qui contienne $A[X]$ (resp. $A\langle X\rangle$).</u>

Lorsque A est un corps K, il est clair que $K^{rat}[[X]]$ n'est autre que l'algèbre des séries de Taylor, développements à l'origine des fractions rationnelles régulières.

Dans le cas d'une seule variable, on sait que les coefficients d'une série rationnelle sont liés par une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. M. P. SCHÜTZENBERGER ([17], [18], [20]) l'a généralisé dans le cas des séries en variables non commutatives. Une <u>représentation</u> de X^* dans $A^{N\times N}$ est un homomorphisme du monoïde X^* dans le monoïde multiplicatif $A^{N\times N}$ des matrices carrées $N \times N$ à éléments dans A. Un projecteur π de $A^{N\times N}$ est un élément du A-module dual du A-module $A^{N\times N}$; c'est-à-dire une application linéaire de $A^{N\times N}$ dans A.

THÉORÈME. - <u>Pour qu'une série r de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ soit rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe un entier N, une représentation $\mu : X^* \to A^{N\times N}$, un projecteur $\pi : A^{N\times N} \to A$, tels que</u>

$$r = (r\ ,\ 1) + \sum\{(\pi\mu f)f \mid f \in XX^*\}\ ,$$

<u>où $(r\ ,\ 1)$ est le terme constant.</u>

J. RICHARD [15] a récemment précisé la démonstration et le résultat de ce théorème.

Soit $\Xi = \{\xi_1 , \dots , \xi_M\}$ un nouvel ensemble fini de variables, et soit $p_1 , \dots , p_M$ un ensemble de M polynômes de $A[X \cup \Xi]$ (resp. $A\langle X \cup \Xi\rangle$), dont les termes constants et les coefficients des variables ξ_j $(j = 1 , \dots , M)$ sont nuls. Le système algébrique $\xi_i = p_i$ $(i = 1 , \dots , M)$ peut être résolu par approximations successives (cf. [17], [20]). Une composante de la solution est une série de $A[[X]]$ (resp. $A\langle\langle X\rangle\rangle$), dite algébrique propre. Une série algébrique est la somme d'une série algébrique et d'un terme constant. L'ensemble des séries algébriques forme une sous-algèbre $A^{alg}[[X]]$ (resp. $A^{alg}\langle\langle X\rangle\rangle$) rationnellement close.

Remarque. - Soit K un corps commutatif. Une fonction algébrique est solution d'une équation de la forme $c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \dots + c_{n-1} y + c_n = 0$, où $c_0 , \dots , c_n \in K[X]$. Supposons $y(0 , \dots , 0) = 0$. L'origine est un point régulier si $c_n(0 , \dots , 0) = 0$ et $c_{n-1}(0 , \dots , 0) \neq 0$. On remarque alors que le développement de Taylor à l'origine est une série algébrique au sens défini plus haut. Cependant, l'on ne sait démontrer en toute généralité que le développement de Taylor, s'il existe, d'une fonction algébrique est une série algébrique. Réciproquement, il est clair qu'une série algébrique de $K[[X]]$ est le développement de Taylor d'une fonction algébrique.

Le produit de Hadamard de deux séries s_1 et s_2 de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ est la série $s_1 \odot s_2$, définie par

$$s_1 \odot s_2 = \sum\{(s_1 , f)(s_2 , f)f \mid f \in X^*\} .$$

Généralisant un résultat élémentaire en théorie des fonctions analytiques d'une variable, M. P. SCHÜTZENBERGER [20] a montré le théorème fondamental suivant.

THÉORÈME. - Le produit de Hadamard d'une série rationnelle et d'une série algébrique (resp. rationnelle) de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ est une série algébrique (resp. rationnelle).

3. Liens entre variables commutatives et non commutatives.

Soit α l'épimorphisme canonique de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ sur $A[[X]]$.

PROPOSITION. - La restriction de α à $A^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$ (resp. $A^{alg}\langle\langle X\rangle\rangle$) est un épimorphisme sur $A^{rat}[[X]]$ (resp. $A^{alg}[[X]]$).

Preuve. - Remarquons d'abord que la série dont l'image commutative est donnée est définie au noyau près de l'épimorphisme α .

Toute série algébrique sans terme constant de $A[[X]]$ est composante de la solution d'un système d'équations $\xi_j = p_j$ $(j = 1 , \dots , M)$. Considérons un monôme du polynôme $p_j \in A[X \cup \Xi]$, et fixons aux lettres un ordre arbitraire. On obtient un monôme non commutatif, et ainsi un système algébrique non commutatif, dont une composante de la solution a l'image commutative désirée.

Une série rationnelle de $A[[X]]$ est engendrée, à partir d'un nombre fini de polynômes, par un nombre fini d'additions, de produits, d'inversions, et de quasi-inversions. Pour obtenir la série non commutative cherchée, on prend des polynômes de $A\langle X\rangle$ ayant les précédents pour images commutatives, et on effectue sur eux, dans un ordre identique, les mêmes opérations d'additions, de produits, d'inversions, et de quasi-inversions.

4. Sur la diagonalisation.

On pose $X = \{x_1 , \dots , x_k\}$. Soit t une nouvelle indéterminée. On appelle <u>diagonale</u> de la série $s = \sum s_{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ de $A[[X]]$, la série $\mathbb{D}s = \sum s_{n \dots n} t^n$. Lorsque A est le corps des nombres complexes, connaissant les singularités de s , R. H. CAMERON et W. T. MARTIN [2] ont étudié les singularités de divers types de diagonales de s .

On suppose, dans la suite de ce paragraphe, card $X = 2$.

THÉORÈME. - <u>La diagonale d'une série rationnelle de</u> $A[[x_1 , x_2]]$ <u>est une série algébrique.</u>

Ce théorème a été démontré par H. FURSTENBERG [11] dans deux cas :

- Lorsque A est le corps des complexes, en utilisant la formule des résidus pour les intégrales complexes ;
- Lorsque A est un corps de caractéristique non nulle, le nombre de variables est alors quelconque.

Nous allons donner ici une démonstration très simple, valable quelle que soit la nature de A .

La série rationnelle r de $A[[x_1 , x_2]]$ est image commutative de la série rationnelle r' de $A\langle\langle x_1 , x_2\rangle\rangle$. Soit d la série de $A\langle\langle x_1 , x_2\rangle\rangle$, définie par

$$d = \sum\{f \mid |f|_{x_1} = |f|_{x_2}\} ,$$

où $|f|_{x_i}$ désigne le nombre d'occurences de x_i $(i = 1 , 2)$ dans le mot f . Elle est algébrique (cf. [3], [14]), comme première composante de la solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \xi = (x_1 x_2 + x_2 x_1 + x_1 \xi'_{x_1} x_2 + x_2 \xi'_{x_2} x_1)(1+\xi) \ , \\ \xi_{x_1} = x_1 \xi'_{x_1} x_2 + x_1 x_2 \ , \\ \xi_{x_2} = x_2 \xi'_{x_2} x_1 + x_2 x_1 \ , \\ \xi'_{x_1} = (x_2 x_1 + x_2 \xi'_{x_2} x_1)(1+\xi'_{x_1}) \ , \\ \xi'_{x_2} = (x_1 x_2 + x_1 \xi'_{x_1} x_2)(1+\xi'_{x_2}) \ . \end{cases}$$

Le produit de Hadamard $r \odot d$ est une série algébrique. Soit φ l'épimorphisme de $A\langle\langle x_1 , x_2\rangle\rangle$ sur $A[[t]]$, défini par $\varphi x_i = t$ $(i = 1 , 2)$. Il vient $\mathcal{D}r = \varphi(r' \odot d)$, d'où la nature de la diagonale.

5. Le produit de Hurwitz et quelques autres produits.

Soient f et g deux mots de X^* ; on appelle produit de Hurwitz de f et g, le polynôme homogène de $A\langle X\rangle$, défini par

$$f \amalg g = \sum\{f_1 g_1 \dots f_k g_k \mid f_1 , g_1 , \dots , g_k \in X^* , \ f = f_1 \dots f_k , \ g = g_1 \dots g_k\} \ .$$

Par linéarité, on étend ce produit à $A\langle X\rangle$ et $A\langle\langle X\rangle\rangle$,

$$s_1 \amalg s_2 = \sum\{(s_1 , f)(s_2 , g) \, f \amalg g \mid f \in X^* \text{ et } g \in X^*\} \ .$$

On vérifie aisément qu'il est associatif, commutatif et distributif par rapport à l'addition. $A\langle X\rangle$ et $A\langle\langle X\rangle\rangle$ peuvent être ainsi munis d'une nouvelle structure d' A-algèbre, dite algèbre de Hurwitz. Dans la littérature américaine, ces algèbres ont pour nom "shuffle algebras" ; elles interviennent comme algèbres duales de certaines co-algèbres vérifiant une propriété universelle (cf. [23]). Le nom que nous leur donnons a pour origine une opération classique sur les séries à une variable, définie par A. HURWITZ et S. PINCHERLE,

$$a = \sum_{n\geq 0} a_n/z^{n+1} \ , \qquad b = \sum_{n\geq 0} b_n/z^{n+1} \ ,$$

$$a \amalg b = c = \sum c_n/z^{n+1} \ , \qquad \text{où } c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \ .$$

En effet, comme

$$1 \amalg 1 = 1 \ , \qquad 1 \amalg x = x \amalg 1 = x \ , \qquad \text{et} \qquad (fx \amalg gx') = (f \amalg gx')x + (fx \amalg g)x' \ ,$$

on montre par récurrence que $x^k \amalg x^{n-k} = \binom{n}{k} x^n$.

J. LAMPERTI [13] a généralisé les produits de Hadamard et de Hurwitz de la manière suivante : soient α , β , γ trois éléments de A , f et g deux mots de X^* ; le produit de Lamperti de f et g relativement aux constantes α , β , γ , est le polynôme homogène

$$f \mathcal{L}_{\alpha,\beta,\gamma}\, g = \sum \alpha^{n_1} \beta^{n_2} \gamma^{n_3} f_1 g_1 h_1 \dots f_k g_k h_k \ ,$$

où

$$f = f_1 h_1 \dots f_k h_k \ , \qquad g = g_1 h_1 \dots g_k h_k \ ,$$

$$n_1 = |f_1 \dots f_k| \ , \qquad n_2 = |g_1 \dots g_k| \ , \qquad n_3 = |h_1 \dots h_k|$$

($|w|$ désigne la longueur du mot w).

Lorsque $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, on obtient le produit de Hadamard, lorsque $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, le produit de Hurwitz.

Le produit de Lamperti des deux séries $a = \sum a_n/z^{n+1}$ et $b = \sum b_n/z^{n+1}$ est la série

$$c = \sum c_n/z^{n+1} \ , \qquad \text{où } c_n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!\ j!\ k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k a_{i+k}\, b_{j+k} \ .$$

Lorsque A est le corps des complexes, et lorsque a et b ont des rayons de convergence R et R' finis (c'est-à-dire

$$\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = R < \infty \ , \qquad \overline{\lim} |b_n|^{1/n} = R' < \infty \quad) \ ,$$

J. RICHARD m'a indiqué la formule suivante :

$$a \mathcal{L}_{\alpha,\beta,\gamma}\, b(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma)} a(t)\ b\left(\frac{z - \alpha t}{\beta + \gamma t}\right) \frac{dt}{\beta + \gamma t}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma')} a\left(\frac{z - \beta t}{\alpha + \gamma t}\right) b(t)\ \frac{dt}{\alpha + \gamma t} \ .$$

(Γ) et (Γ') sont des courbes simples extérieures au cercle centré à l'origine de rayon RR' . On généralise ainsi deux formules bien connues (cf. [16]) concernant :

- Le produit de Hadamard,

$$a \odot b(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma)} a(z)\ b(z/t)\ \frac{dt}{t} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma')} a(z/t)\ b(t)\ \frac{dt}{t} \ ,$$

- Le produit de Hurwitz,

$$a \sqcup\!\sqcup b(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma)} a(t)\, b(z-t)\, dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma')} a(z-t)\, b(t)\, dt \quad .$$

THÉORÈME. - Le produit de Lamperti d'une série rationnelle et d'une série algébrique (resp. rationnelle) de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ est une série algébrique (resp. rationnelle).

Preuve. - La méthode est inspirée de S. GINSBURG et E. H. SPANIER [12]. Introduisons les alphabets $\overline{X} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$ et $\overline{\overline{X}} = \{\overline{\overline{x}} \mid x \in X\}$, tels que

$$X \cap \overline{X} = \overline{X} \cap \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} \cap X = \emptyset \quad .$$

Remplaçons respectivement, dans les séries a et b de $A\langle\langle X\rangle\rangle$, toute variable $x \in X$ par les séries rationnelles $(\alpha x \operatorname{car} \overline{\overline{X}}^* + \gamma\overline{x})$ et $(\beta(\operatorname{car} X^*)\overline{\overline{x}} + \overline{x})$, où

$$\operatorname{car} X^* = \sum\{f \mid f \in X^*\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{car} \overline{\overline{X}}^* = \sum\{\overline{\overline{f}} \mid \overline{\overline{f}} \in \overline{\overline{X}}^*\} \quad .$$

On obtient les séries a' et b' de $A\langle\langle X \cup \overline{X} \cup \overline{\overline{X}}\rangle\rangle$, dont on vérifie aisément qu'elles sont rationnelles ou algébriques si a et b le sont. Soit φ l'épimorphisme de $A\langle\langle X \cup \overline{X} \cup \overline{\overline{X}}\rangle\rangle$ sur $A\langle\langle X\rangle\rangle$, défini par $\varphi x = \varphi\overline{x} = \varphi\overline{\overline{x}} = x$ pour tout $x \in X$. Il vient

$$a \,\mathfrak{L}_{\alpha,\beta,\gamma}\, b = \varphi(a' \odot b') \quad .$$

D'où le théorème.

Remarque. - Supposons les séries a et b rationnelles données par les représentations matricielles,

$$a = \sum\{(\pi\mu f)f \mid f \in XX^*\} \quad ,$$

$$b = \sum\{(\pi'\mu' f)f \mid f \in XX^*\} \quad ,$$

où $\mu : X^* \to A^{N\times N}$, $\mu' : X^* \to A^{N'\times N'}$. Soient 1_N et $1_{N'}$ les représentations qui, à tout mot de X^* , font correspondre les matrices identités de $A^{N\times N}$ et $A^{N'\times N'}$. Soit $\nu : X^* \to A^{NN'\times NN'}$ la représentation définie par

$$\nu f = \nu x_1 \ldots x_n = \prod_{x_i} (\alpha(\mu \otimes 1_{N'}) + \beta(1_N \otimes \mu') + \gamma(\mu \otimes \mu'))x_i \quad .$$

Il est clair que

$$a \,\alpha_{\alpha,\beta,\gamma}\, b = \sum\{(\pi \otimes \pi'\nu f)f \mid f \in XX^*\} \quad .$$

6. Une application aux variables commutatives.

De nombreux auteurs ont cherché à généraliser pour plusieurs variables commutatives les propriétés simples de composition des singularités obtenues en une seule variable avec les produits de Hadamard et de Hurwitz. Nous nous intéresserons ici aux travaux de S. BOCHNER et W. T. MARTIN [1], qui définissent dans $A[[X]]$ les produits suivants : a_n et b_n étant les polynômes homogènes de $A[X]$ de degré n , tels que

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n \ , \qquad b = \sum_{n \geq 0} b_n \ ,$$

on pose

$$a \; H \; b = \sum_{n \geq 0} a_n \, b_n \qquad \text{(produit de Hadamard-Bochner-Martin)} \ ,$$

$$a \; \mathcal{H} \; b = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \, b_{n-k} \right) \qquad \text{(produit de Hurwitz-Bochner-Martin)} \ .$$

THÉORÈME. - Le produit de Hadamard-Bochner-Martin ou de Hurwitz-Bochner-Martin d'une série rationnelle et d'une série algébrique (resp. rationnelle) de $A[[X]]$ est une série algébrique (resp. rationnelle).

Preuve. - Donnons, par exemple, la preuve pour le produit de Hadamard. Soit α l'épimorphisme canonique de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ sur $A[[X]]$. a et b , séries rationnelles ou algébriques de $A[[X]]$, sont images par α de séries a' et b' de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ de même nature. Introduisons l'alphabet $\overline{X} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$. Substituons respectivement à toute variable $x \in X$ les polynômes $x(\sum \overline{y} \mid \overline{y} \in \overline{X})$ et $(\sum y \mid y \in X)\overline{x}$. On obtient des séries de même nature a' et b'' appartenant à $A\langle\langle X \cup \overline{X}\rangle\rangle$. Soit ψ l'épimorphisme de $A\langle\langle X \cup \overline{X}\rangle\rangle$ sur $A[[X]]$ défini, pour tout $x \in X$, par $\varphi x = \varphi \overline{x} = x$. Il vient

$$a \; H \; b = \varphi(a'' \odot b'') \ .$$

7. Le produit de Hurwitz sur un corps parfait de caractéristique non nulle.

On sait que le produit de Hadamard de deux séries algébriques sur le corps des complexes n'est pas nécessairement une série algébrique. H. FURSTENBERG [11] a pu montrer (*) que, sur un corps parfait de caractéristique non nulle, le produit de Hadamard de deux séries algébriques à une variable est une série algébrique ; pour cela, il montre que toute série algébrique est diagonale d'une série rationnelle en deux variables commutatives. Signalons que G. CHRISTOL [4] a démontré ce dernier résultat lorsque le corps de base est local de caractéristique zéro.

(*) H. FURSTENBERG suppose le corps de base fini, mais n'utilise cette propriété que pour la proposition 1, et sous la forme suivante : l'existence, pour tout élément, d'une racine d'ordre égal à la caractéristique. Or cette propriété caractérise les corps parfaits.

THÉORÈME. - K *étant un corps parfait de caractéristique non nulle, le produit de Hurwitz de deux séries algébriques de* $K[[x]]$ *est une série algébrique.*

En effet, soient a et b deux séries algébriques de $K[[x]]$, respectivement diagonales des séries rationnelles r et s de $K[[u , v]]$ et $K[[u' , v']]$. Le produit de Hadamard-Bochner-Martin de r et s est une série rationnelle de $K[[u , v , u' , v']]$,

$$r \mathcal{H} s = \sum_{n_1,n_2,n_1',n_2' \geq 0} \alpha_{n_1,n_2,n_1',n_2'} u^{n_1} v^{n_2} u'^{n_1'} v'^{n_2'} .$$

La série $\sum_{n,n' \geq 0} \alpha_{n,n,n',n'} x^{m+n}$ n'est autre que $r \text{Ш} s$. Le théorème est alors une conséquence immédiate du lemme suivant, dont la démonstration est une adaptation simple de celle du théorème 1 de [11].

LEMME. - K *étant un corps de caractéristique non nulle,* w *étant la série rationnelle de* $K[[u , v , u' , v']]$,

$$w = \sum w_{n_1,n_2,n_1',n_2'} u^{n_1} v^{n_2} u'^{n_1'} v'^{n_2'} ,$$

alors

$$\omega'_w = \sum w_{n,n,n',n'} u^n u'^{n'}$$

est une série algébrique de $K[[u , u']]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER (S.) and MARTIN (W. T.). - Singularities of composite functions in several variables, Annals of Math., t. 38, 1937, p. 293-302.

[2] CAMERON (R. H.) and MARTIN (W. T.). - Analytic continuation of diagonals and Hadamard compositions of multiple power series, Trans. Amer. math. Soc., t. 44, 1938, p. 1-7.

[3] CHOMSKY (N.) and SCHÜTZENBERGER (M. P.). - The algebraic theory of context-free languages, "Computer programming and formal systems" (P. Braffort et D. Hirschberg, editors), p. 118-161. - Amsterdam, North-Holland, 1963 (Studies in Logic) [en traduction française dans Langages, n° 8, mars 1968, p. 77-118].

[4] CHRISTOL (G.). - Non publié.

[5] COHN (P. M.). - Factorization in non-commutative power series rings, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 58, 1962, p. 452-464.

[6] FLIESS (M.). - Transductions et séries formelles (Thèse 3e cycle, Math., Paris, 1969).

[7] FLIESS (M.). - Du produit de Hurwitz de deux séries formelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 535-537.

[8] FLIESS (M.). - Inertie et rigidité des séries rationnelles et algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 221-223.

[9] FLIESS (M.). - Commutant d'une série rationnelle non commutative (à paraître).

[10] FLIESS (M.). - Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques, Bull. Sc. math., t. 94, 1970 (à paraître).

[11] FURSTENBERG (H.). - Algebraic functions over finite fields, J. of algebra, t. 7, 1967, p. 271-277.

[12] GINSBURG (S.) and SPANIER (E. H.). - Mappings of languages by two-tape devices, J. Assoc. for Comp. Mach., t. 12, 1965, p. 423-434.

[13] LAMPERTI (J.). - On the coefficients of reciprocal power series, Amer. math. Monthly, t. 65, 1958, p. 90-94.

[14] NIVAT (M.). - Transductions des langages de Chomsky, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 18, 1968, fasc. 1, p. 339-455.

[15] RICHARD (J.). - Représentations matricielles des séries rationnelles en variables non commutatives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 224-227.

[16] SCHOTTLÄNDER (S.). - Der Hadamardsche Multiplikationssatz und weitere Kompositionssätze der Funktionentheorie, Math. Nachrichten, t. 11, 1954, p. 239-294.

[17] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Un problème de la théorie des automates, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 13e année, 1959/60, n° 3, 6 p.

[18] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On the definition of a family of automata, Information and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.

[19] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Finite counting automata, Information and Control, t. 5, 1962, p. 91-107.

[20] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a theorem of R. Jungen, Proc. Amer. math. Soc., t. 13, 1962, p. 885-890.

[21] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Certain elementary families of automata, "Proceedings of the Symposium on Mathematical theory of automata" [1962. New York], p. 139-153. - Brooklyn, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1963.

[22] SHAMIR (E.). - A representation theorem for algebraic and context-free power series in non-commuting variables, Information and Control, t. 11, 1967, p. 239-254.

[23] SWEEDLER (M. E.). - Hopf algebras. - New York, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

(Texte reçu le 8 juin 1970)

Michel FLIESS
50 rue de Charonne
75 - PARIS 11