PIERRE DELIGNE

Les constantes des équations fonctionnelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1969-1970), exp. nº 19 bis, p. 16-28

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_2_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 19 bis (*)

LES CONSTANTES DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

par Pierre DELIGNE

§ 0. Notations.

On fixe pour toute la suite un corps global K , un corps de nombres E , et un plongement σ_0 de E dans $\underset{\sim}{C}$.

On désignera par K_v un corps local, et par $\bar{K}_v$ une clôture algébrique de K_v . Si K_v est non archimédien, on désignera par $\mathcal{O}_v$ l'anneau de la valuation v de K_v , par k_v le corps résiduel de K_v , et par q_v le nombre d'éléments de k_v . Le corps résiduel de $\bar{K}_v$ est une clôture algébrique $\bar{k}_v$ de k_v . On désignera par I_v le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$. On dispose d'une suite exacte

(0.1) $$0 \to I_v \to \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v) \to 0 \quad .$$

On désignera par $\varphi_v \in \mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ une substitution de Frobenius :

$$\varphi_v(x) = x^{q_v} \quad .$$

On pose $\mathrm{Fr}_v = \varphi_v^{-1}$, et on appelle Fr_v le Frobenius géométrique.

§ 1. Données locales.

1.1. - Soit M un motif sur K à multiplication complexe par E (voir ci-dessous).

Lorsque quelques conjectures sont vraies pour M , on veut lui associer une fonction $Z_M(s)$ vérifiant une équation fonctionnelle conjecturale

$$Z_{\check{M}}(1 - s) = \varepsilon(s)\ Z_M(s) \quad ,$$

où ε_s est le produit d'une constante par un facteur exponentiel. On veut de plus donner une formule plausible pour $\varepsilon(s)$.

1.2. - Si X est une variété projective non singulière purement de dimension n

---

(*) Cet exposé complète l'exposé n° 19 de J.-P. Serre. Il ne correspond à aucun exposé oral.

sur un corps k , on désignera par $E_0(X)$ l'anneau des classes de correspondances de X dans X : $E_0(X)$ est l'ensemble des classes d'équivalence algébriques (définies sur k) de cycles algébriques de dimension n sur $X \times X$. On pose $E(X) = \underset{\sim}{Q} \otimes_{\underset{\sim}{Z}} E_0(X)$.

A titre exemplatif et non limitatif, on appellera <u>motif effectif sur</u> k <u>à multiplication complexe par</u> E la donnée de :

a) Une variété projective non singulière X sur k ,

b) Un entier m ,

c) Un homomorphisme ρ , ne respectant pas nécessairement les unités, de E dans $E(X)$.

Se donner un tel homomorphisme ρ revient à se donner un idempotent $e = \rho(1)$ de $E(X)$ et un homomorphisme unifère de E dans $e.E(X).e$.

Pour toute théorie cohomologique raisonnable H , à valeurs dans les vectoriels sur un corps de caractéristique 0 , l'anneau $E(X)$ agit sur $H^*(X)$. On désignera par $H(M)$ l'image $\mathrm{Im}(\rho(1) : H^m(X) \to H^m(X))$, munie de l'action de E définie par ρ .

Pour d'autres détails, et pour la notion, dont nous n'aurons pas à faire usage, de motif non nécessairement effectif, on renvoie à [1] ou [4].

1.3. - Soit K_v un corps local non archimédien.

Le <u>groupe de Weil</u> $W(\overline{K}_v/K_v)$ de K_v est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ formé des éléments dont l'image (0.1) dans $\mathrm{Gal}(\overline{k}_v/k_v)$ est une puissance entière de φ_v . On dispose d'une suite exacte

$$0 \to I_v \to W(\overline{K}_v/K_v) \to \underset{\sim}{Z} \to 0 \quad .$$

Soit K_v un corps local archimédien. Le <u>groupe de Weil</u> $W(\overline{K}_v/K_v)$ est l'extension suivante de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ par $\overline{K}_v^*$:

a) Si K_v est complexe, alors $W(\overline{K}_v/K_v) = \overline{K}_v^*$;

b) Si K_v est réel, alors $W(\overline{K}_v/K_v)$ est engendré par $\overline{K}_v^*$ et par un élément F , vérifiant les relations

$$F\, x\, F^{-1} = \overline{x} \qquad (x \in \overline{K}_v^*)$$

$$F^2 = -1 \quad .$$

Ce dernier groupe est isomorphe au normalisateur de $\underset{\sim}{C}^*$ dans $\underset{\sim}{H}^*$.

1.4. - Si K'_v est une extension finie de K_v contenue dans $\overline{K}_v$, alors $W(\overline{K}_v/K'_v)$ s'identifie à un sous-groupe de $W(\overline{K}_v/K_v)$. Si K'_v est galoisien sur K_v , ce sous-groupe est distingué, et on a

$$W(\overline{K}_v/K_v) \;/\; W(\overline{K}_v/K'_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K'_v/K_v) \quad .$$

1.5. - Le plus grand quotient abélien $W^{ab}(\overline{K}_v/K_v)$ de $W(\overline{K}_v/K_v)$ est isomorphe à K_v^* par un isomorphisme canonique r . Dans le cas non archimédien, $W^{ab}(\overline{K}_v/K_v)$ est un sous-groupe du groupe de Galois d'une extension abélienne maximale K_v^{ab} de K_v , et r est l'isomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes local. Pour $x \in K_v^*$, l'image de $r(x)$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{k}_v/k_v)$ est $\varphi_v^{v(x)}$.

Dans le cas complexe, on prend pour r l'identité. Dans le cas réel, r se déduit de l'unique homomorphisme

$$N : W(\overline{K}_v/K_v) \to K_v^*$$

tel que $N|\overline{K}_v^* = N_{\overline{K}_v/K_v}$ et que $N(F) = -1$.

1.6. - Soient K_v un corps local non archimédien et $\overline{K}_v$ une clôture algébrique de K_v . Par définition, un v-<u>faisceau complexe</u> F consiste en :

a) Une représentation continue de $W(\overline{K}_v/K_v)$ dans un espace vectoriel complexe de dimension finie F^1 ;

b) Une représentation continue de $W(\overline{K}_v/K_v)/I_v \approx \mathbb{Z}$ dans un espace vectoriel complexe de dimension finie F^0 ;

c) Un homomorphisme de $W(\overline{K}_v/K_v)$-représentations

$$s_F : F^0 \to F^1 \quad .$$

Un v-faisceau complexe F est dit <u>semi-simple</u> si les représentations F^0 et F^1 sont semi-simples.

On dit que F est <u>non ramifié</u> si s_F est un isomorphisme.

1.7. - Soient K_v un corps local archimédien et $\overline{K}_v$ une clôture algébrique de K_v . Par définition, un v-<u>faisceau complexe</u> F consiste en une représentation continue de $W(\overline{K}_v/K_v)$ dans un espace vectoriel complexe de dimension finie F .

Un v-faisceau complexe F est dit <u>semi-simple</u> si la représentation F est semi-simple. On pose $F = F^1$.

1.8. – L'ensemble des classes d'isomorphisme de v-faisceaux complexes ne dépend pas du choix de $\overline{K}_v$. Dans le cas non archimédien, la catégorie des v-faisceaux complexes elle-même ne "dépend" pas de ce choix.

1.9. – D'après 1.5, si K_v est archimédien (resp. non archimédien), un v-faisceau complexe F tel que $F = \underset{\sim}{C}$ (resp. tel que $F^0 = F^1 = \underset{\sim}{C}$ et que s soit un isomorphisme) est entièrement décrit par un quasi-caractère χ de K_v^* (resp. par un quasi-caractère non ramifié $(\chi(\mathcal{O}_v^*) = 1)$). On désignera par $1(s)$ le v-faisceau complexe de ce type décrit par le quasi-caractère $x \longmapsto \|x\|_v^{-s}$. Pour tout v-faisceau F , on pose $F(s) = F \otimes 1(s)$.

1.10. – Soit M un motif effectif à multiplication complexe par E sur un corps local non archimédien K_v de clôture algébrique $\overline{K}_v$. On se propose d'associer à M une classe d'isomorphisme de v-faisceaux complexes semi-simples $h(M)$.

Soit λ une place finie de E de caractéristique résiduelle ℓ distincte de la caractéristique résiduelle de K_v . Avec les notations de 1.2, la cohomologie ℓ-adique de M est définie par

$$H(M , \underset{\sim}{Q}_\ell) = \mathrm{Im}(\rho(1) : H^m(X \otimes_{K_v} \overline{K}_v , \underset{\sim}{Q}_\ell) \to H^m(X \otimes_{K_v} \overline{K}_v , \underset{\sim}{Q}_\ell)) .$$

Cette cohomologie est un E-module, et même un module sur $E_\ell = E \otimes_{\underset{\sim}{Q}} \underset{\sim}{Q}_\ell$. On pose

$$H_\lambda(M) = H(M , \underset{\sim}{Q}_\ell) \otimes_{E_\ell} E_\lambda .$$

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ agit continûment sur $H_\lambda(M)$, qui est un vectoriel de dimension finie sur E_λ . Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)/I_v$ agit sur la sous-représentation $H_\lambda(M)^{I_v}$. Soient χ^0 et χ^1 les caractères des représentations $H_\lambda(M)$ et $H_\lambda(M)^{I_v}$. On sait que χ^0 et χ^1 sont des fonctions localement constantes à valeur dans E_λ . On conjecture que leur restriction à $W(\overline{K}_v/K_v)$ est à valeurs dans E et indépendante de λ . Nous l'admettrons ici.

<u>Définition</u> 1.11. – <u>On désigne par</u> $h(M)$ <u>l'unique classe d'isomorphisme des v-faisceaux complexes semi-simples</u>

$$s : h^0(M) \to h^1(M)$$

<u>tels que</u> s <u>soit injectif, que</u> $h^1(M)$ <u>ait pour caractère</u> $\sigma_0 \circ \chi^1$ <u>et que</u> $h^0(M_v)$ <u>ait pour caractère</u> $\sigma_0 \circ \chi^0$.

Appliquons les constructions qui précèdent au module galoisien $H_\lambda(M)^*$ dual (sur E_λ) de $H_\lambda(M)$. On désigne par $h(M^\vee)$ la classe d'isomorphisme de v-faisceaux complexes semi-simples ainsi obtenue.

1.12. - Soit M un motif effectif à multiplication complexe par E sur le corps local archimédien K_v , de clôture algébrique $\overline{K}_v$. Avec les notations de 1.2, la cohomologie de l'espace topologique $X(\overline{K}_v)$ à coefficients dans $\overline{K}_v$ est bigraduée :

(1) $H^m(X(\overline{K}_v) , \overline{K}_v) = \sum_{p+q=m} H^{p,q}$;

(2) $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$.

La formule (2) implique qu'il existe une et une seule représentation du groupe $\overline{K}_v^*$ sur $H^*(X(\overline{K}_v) , \underset{\sim}{R})$ telle que $h(z)$ coïncide avec l'homothétie de rapport $z^p \bar{z}^q$ sur

$$H^{pq} \subset H^{p+q}(X(\overline{K}_v) , \overline{K}_v) = H^{p+q}(X(\overline{K}_v) , \underset{\sim}{R}) \otimes_{\underset{\sim}{R}} \overline{K}_v \quad .$$

Cette représentation laisse stable le sous-espace

$$H(M , \underset{\sim}{R}) = \mathrm{Im}(\rho(1) : H^m(X(\overline{K}_v) , \underset{\sim}{R}) \longrightarrow H^m(X(\overline{K}_v) , \underset{\sim}{R}))$$

de la cohomologie, et commute à l'action de E sur ce sous-espace. On pose

$$H_v(M) = H(M , \underset{\sim}{R}) \otimes_{E,\sigma_0} \underset{\sim}{C} \quad .$$

Si K_v est complexe, l'action de K_v^* sur $H_v(M)$ munit $H_v(M)$ d'une structure de v-faisceau complexe semi-simple. On désigne par $h(M)$ sa classe d'isomorphisme.

Supposons K_v réel, et soit W_1 le groupe engendré par $\overline{K}_v^*$ et par un élément F_1 qui vérifie

$$F_1 \, x \, F_1^{-1} = \bar{x} \quad ,$$

$$F_1^2 = 1 \quad .$$

La conjugaison complexe sur $X(\overline{K}_v)$ induit sur $H^*(X(\overline{K}_v) , \underset{\sim}{R})$ une involution Fr dont l'extension à $H^*(X(\overline{K}_v) , \overline{K}_v)$ vérifie

$$\mathrm{Fr}(H^{pq}) = H^{qp} \quad .$$

Pour $z \in \overline{K}_v^*$, on a donc $\mathrm{Fr}\, h(z)\, \mathrm{Fr}^{-1} = h(\bar{z})$. Il existe dès lors une et une seule représentation h_1 de W_1 sur $H_v(M)$ telle que $h_1 | K_v^* = h$ et que $h_1(F_1) = \mathrm{Fr}$. Soit $i \in \overline{K}_v$ un élément de carré -1 . Il existe une unique représentation h_i de $W(\overline{K}_v/K_v)$ sur $H_v(M)$ telle que

$$h_i | K_v^* = h \quad ,$$

$$h_i(F) = h(i)F \quad .$$

La classe d'isomorphisme $h(M)$ de h_i ne dépend pas du choix de i .

Pour K_v archimédien, on désignera par $h(M^\vee)$ la classe d'isomorphisme des contragrédientes des représentations de $W(\overline{K}_v/K_v)$ de classe $h(M)$.

1.13. - Soit M un motif effectif sur K à multiplication complexe par E . Pour chaque place v de K , soit M_v le motif sur K_v qui s'en déduit par extension des scalaires. On désignera par $h_v(M)$ et par $h_v(M^\vee)$ les classes d'isomorphisme de v-faisceaux complexes semi-simples $h(M_v)$ et $h(M_v^\vee)$ construites en 1.10, 1.11 et 1.12.

§ 2. La théorie de Langlands.

2.1. - Dans ce §, on expose les résultats de Langlands [3] sur les constantes locales. La formulation choisie se déduit de celle de Langlands et de la connaissance de la valeur absolue complexe des sommes de Gauss par des calculs purement algébriques, qui ne seront pas donnés.

2.2. - Soient K_v un corps local, ψ_v un caractère complexe continu du groupe additif de K_v , et $\chi : K_v^* \to \underset{\sim}{C}^*$ un quasi-caractère continu. On se propose de définir une "somme de Gauss"

$$\varepsilon(\psi_v , \chi) \in \underset{\sim}{C}^* \quad .$$

Si K_v est non archimédien, on désignera par n_v le plus grand entier n tel que $\psi_v | \pi_v^{-n} \mathcal{O}_v = 1$, par $Sw(\chi)$ le conducteur de Swan de χ et on pose

$$m_v(\chi) = 1 + Sw(\chi) \quad .$$

Si χ est non ramifié, alors $m_v(\chi) = 1$. Si χ est ramifié, alors $m_v(\chi)$ est le conducteur de χ . On désignera par γ_v un élément de K_v^* tel que

$$v(\gamma_v) = m_v(\chi) + n_v(\psi_v) \quad .$$

On pose

(2.2.1) $$\varepsilon(\psi_v , \chi) = \|\pi_v\|_v^{-n_v} \left[\int_{\gamma_v^{-1}\mathcal{O}_v^*} \psi_v(x)\, \chi_v(x)\, dx\right]^{-1} \quad .$$

Si K_v est archimédien, il existe $w \in K_v^*$ tel que

$$\psi_v(z) = \exp(2\pi i \ \mathrm{Tr}_{K_v/\mathbb{R}}(wz)) \quad .$$

Si K_v est réel, il existe $m = 0$ ou 1 et $r \in \mathbb{C}$ tels que

$$\chi(z) = (\mathrm{sgn}\ z)^m \ \|z\|^r \quad .$$

Si K_v est complexe, il existe $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C}$ et un isomorphisme $\rho : K_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ tels que

$$\chi(z) = \rho(z)^m \ \|z\|^r \quad .$$

On pose

(2.2.2) $$\varepsilon(\psi_v , \chi) = i^m \ \chi(w) \quad .$$

2.3. - Dans tous les cas, on a

(2.3.1) $$\varepsilon(\psi_v(az) , \chi) = \chi(a) \ \varepsilon(\psi_v(z) , \chi) \quad .$$

Si K_v est non archimédien et χ non ramifié, on a

(2.3.2) $$\varepsilon(\psi_v , \chi) = - \chi(\gamma_v) \quad .$$

Posons provisoirement

$$A(\psi_v , \chi) = \varepsilon(\psi_v(z) , \chi) . \varepsilon(\psi_v(- z) , \chi^{-1} . \|x\|^{-1}) \quad .$$

Si K_v est archimédien, on a

(2.3.3') $$A(\psi_v , \chi) = \|w\|^{-1} \quad .$$

Si K_v est non archimédien et si χ est ramifié, on a

(2.3.3") $$A(\psi_v , \chi) = q_v^{n_v} \quad .$$

Si K_v est non archimédien et si χ est non ramifié, on a

(2.3.3"') $$A(\psi_v , \chi) = q_v^{1+n_v} \quad .$$

Théorème 2.4 (Langlands [3]). - *Il existe une et une seule fonction* ε *vérifiant les conditions* (L 1) *à* (L 3) *ci-dessous, qui associe un nombre* $\varepsilon(\psi_v , V) \in \mathbb{C}^*$ *à chaque classe d'isomorphisme de quintuples* $(K_v , \overline{K}_v , \psi_v , V , \rho)$ *formés d'un corps local* K_v , *d'une clôture algébrique* $\overline{K}_v$ *de* K_v , *d'un caractère additif non* trivial $\psi_v : K_v \to \mathbb{C}^*$, d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et d'une représentation $\rho : W(\bar{K}_v/K_v) \to GL(V)$.

(L 1) Pour toute suite exacte de représentations

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0 \quad ,$$

on a $\varepsilon(\psi_v , V) = \varepsilon(\psi_v , V').\varepsilon(\psi_v , V'')$.

Cette condition montre que $\varepsilon(\psi_v , V)$ ne dépend que de la classe de V dans le groupe de Grothendieck des représentations de $W(\bar{K}_v/K_v)$ et permet de donner un sens à $\varepsilon(\psi_v , V)$ pour V seulement une représentation virtuelle.

(L 2) Si K'_v est une extension finie de K_v et si V est la représentation virtuelle de $W(\bar{K}_v/K_v)$ induite par une extension virtuelle de dimension zéro V' de $W(\bar{K}_v/K'_v)$, on a

$$\varepsilon(\psi_v , V) = \varepsilon(\psi_v \circ \mathrm{Tr}_{K'_v/K_v} , V') \quad .$$

(L 3) Si $\dim V = 1$ et si V est définie par un quasi-caractère χ de $W^{ab}(\bar{K}_v/K_v)$ (identifié à K_v^* (1.5)), on a

$$\varepsilon(\psi_v , V) = \varepsilon(\psi_v , \chi) \quad .$$

2.5. - Soit F un v-faisceau complexe. Si K_v est archimédien, F est une représentation de $W(\bar{K}_v/K_v)$ et on désigne par $\varepsilon(\psi_v , F)$ le nombre construit en 2.4.

Si K_v est non archimédien, on pose

(2.5.1) $$\varepsilon(\psi_v , F) = \varepsilon(\psi_v , F^1).\det(- Fr_v , F^0) \quad .$$

Si la représentation de $W(\bar{K}_v/K_v)$ sur la puissance extérieure maximale de F^1 est définie par un caractère χ de K_v^* , on a (cf. 2.3.1)

(2.5.2) $$\varepsilon(\psi_v(az) , F) = \chi(a).\varepsilon(\psi_v(z) , F) \quad .$$

Si K_v est non archimédien et si F est non ramifié (1.6), on a (cf. 2.3.2)

(2.5.3) $$\varepsilon(\psi_v , F) = \det(Fr^{-n_v} , F^0) \quad .$$

Toujours pour K_v non archimédien, on désignera par $Sw(F^1)$ le conducteur de Swan de F^1 . On pose

$$m_v = \dim F^1 - \dim F^0 + Sw(F^1) \quad .$$

Si F^1 est de dimension d , on a

(2.5.4)
$$\varepsilon(\psi_v , F(s)) = q_v^{(m_v+dn_v)s} . \varepsilon(\psi_v , F) .$$

Pour M un motif effectif sur K_v, posons provisoirement

$$A(\psi_v , M) = \varepsilon(\psi_v(z) , h(M)) . \varepsilon(\psi_v(- z) , h(M^\vee)(1)) .$$

Soit d la dimension de $h^1(M)$. Avec les notations de 2.2, si K_v est archimédien, on a (cf. 2.3.3)

(2.5.5')
$$A(\psi_v , M) = \|w\|^{-d} .$$

Si K_v est non archimédien, on a

(2.5.5")
$$A(\psi_v , M) = q_v^{dn_v} .$$

§ 3. Facteurs locaux.

3.1. - Soient K_v un corps local et F un v-faisceau complexe. On se propose de définir une fonction de variable complexe $Z_v(F , s)$ vérifiant les conditions suivantes :

(Z.1) Pour toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, on a

$$Z_v(F , s) = Z_v(F' , s) . Z_v(F'' , s) ;$$

(Z.2) $Z_v(F(t) , s) = Z_v(F , s + t)$;

(Z.3) Si K'_v est une extension finie de K_v, et si F est induit par un v'-faisceau complexe F', on a

$$Z_v(F , s) = Z_{v'}(F' , s) .$$

3.2. - Si K_v est non archimédien, on pose

(3.2.1) $Z_v(F , s) = \det(1 - Fr_v\, q_v^{-s} , F^0)^{-1}$.

Si K_v est archimédien, et si $\dim(F) = 1$, la représentation F de $W(\overline{K}_v/K)$ est définie par un caractère χ de K_v^*. Les $Z(F , s)$ sont uniquement déterminés par (Z.1), (Z.2), (Z.3) et par la condition d'être donnés par les formules ci-dessous lorsque $\dim(F) = 1$ et que χ est l'un des caractères suivant :

(3.2.2) Si K_v est réel, et si

$$\chi(x) = \mathrm{sgn}(x)^m \qquad (m = 0 \text{ ou } 1) ,$$

on a $Z_v(F\ ,\ s) = \Gamma_{\underset{\sim}{R}}(s+m)$, avec $\Gamma_{\underset{\sim}{R}}(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)$.

(3.2.3) Si K_v est complexe, si $\rho = K_v \xrightarrow{\sim} \underset{\sim}{C}$ est un isomorphisme, si $m \in \underset{\sim}{N}$ et si

$$\chi(x) = \rho(x)^m \quad ,$$

on a $Z_v(F\ ,\ s) = 2\Gamma_{\underset{\sim}{C}}(s)$, avec $\Gamma_{\underset{\sim}{C}}(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)$.

§ 4. L'équation fonctionnelle.

4.1. - Soit Σ l'ensemble des places de K . Pour chaque $v \in \Sigma$, soit F_v un v-faisceau complexe. On suppose que :

(4.1.1) Il existe une partie finie S de Σ telle que F_v soit non ramifié pour $v \notin S$;

(4.1.2) La dimension d de F_v^1 est indépendante de v ;

(4.1.3) Il existe un quasi-caractère χ du groupe des classes d'idèles de K tel que, pour chaque $v \in \Sigma$, la représentation de $W(\overline{K}_v/K_v)$ sur $\overset{d}{\bigwedge} F_v^1$ soit définie par le caractère χ_v de K_v^* .

Soit $F = (F_v)_{v\in\Sigma}$ la famille des F_v , et soit $F(s) = (F_v(s))_{v\in\Sigma}$. La famille $F(s)$ vérifie encore (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3). C'est trivial pour (4.1.1) et (4.1.2). Pour (4.1.3), on note que la représentation de $W(\overline{K}_v/K_v)$ sur

$$\overset{d}{\bigwedge}(F_v^1(s)) = \Big(\overset{d}{\bigwedge} F_v^1\Big)(ds)$$

est définie par le caractère $(\chi.\|\ \|^{-ds})_v$.

4.2. - On pose

$$Z(F\ ,\ s) = \prod_{v\in\Sigma} Z_v(F_v\ ,\ s) \quad .$$

D'après (Z.2), on a

$$Z(F(t)\ ,\ s) = Z(F\ ,\ s+t) \quad .$$

4.3. - Soit ψ un caractère du groupe des classes d'adèles $\underset{\sim}{A}(K)/K$ de K et, pour chaque $v \in \Sigma$, soit ψ_v le caractère additif correspondant de K_v .

D'après (4.1.1) et (2.5.2), presque tous les facteurs du produit

$$\varepsilon(\psi\ ,\ F) = \prod_v \varepsilon(\psi_v\ ,\ F_v)$$

sont égaux à un. D'après (4.1.3) et (2.5.3), $\varepsilon(\psi , F)$ ne dépend pas du choix de ψ . Tout autre caractère ψ' s'écrit en effet sous la forme

$$\psi'(x) = \psi(ax) , \qquad \text{avec} \quad a \in K^* ,$$

et

$$\varepsilon(\psi' , F) = \prod_v \varepsilon(\psi(a_v x) , F_v) = \prod_v \chi_v(a_v).\varepsilon(\psi , F)$$

$$= \chi(a).\varepsilon(\psi , F) = \varepsilon(\psi , F) .$$

D'après 4.1, on peut donc poser

(4.3.1) $$\varepsilon(F , s) = \varepsilon(\psi , F(s)) .$$

4.4. - Si K est de caractéristique 0 , on désigne par D la valeur absolue du discriminant de $K/\underset{\sim}{Q}$. Si K est un corps de fonction de genre g dont le corps des constantes a q éléments, on pose

$$D = q^{2g-2} .$$

4.5. - Soit M un motif sur K à multiplication complexe par E . On désignera par $h(M)$ la famille des $h_v(M)$, et par $h(M^\vee)$ la famille des $h_v(M^\vee)$. On conjecture que ces familles vérifient les conditions (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3). Si l'on admet cette conjecture, on peut poser

$$Z(M , s) = Z(h(M) , s) ,$$

$$Z(M^\vee , s) = Z(h(M^\vee) , s) ,$$

$$\varepsilon(M , s) = \varepsilon(h(M) , s) ,$$

et

$$\varepsilon(M^\vee , s) = \varepsilon(h(M^\vee) , s) .$$

Soit d la dimension commune des $h_v^1(M)$ (4.1.2). On conjecture que les produits qui définissent $Z(M , s)$ et $Z(M^\vee , s)$ sont convergents pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ et que $Z(M , s)$ et $Z(M^\vee , s)$ se prolongent en des fonctions méromorphes de s .

On conjecture de plus une équation fonctionnelle

$$Z(M^\vee , 1 - s) = D^{-d/2}.\varepsilon(M , s).Z(M , s) .$$

§ 5. Exemples.

A. Comparaison avec Langlands [3].

Soit $\sigma : W(\overline{K}/K) \to GL(V)$ une représentation complexe semi-simple du "groupe de Weil" de K. Pour chaque place v de K, soit $F_v(\sigma)$ le v-faisceau complexe suivant :

a) v archimédien : $F_v(\sigma)$ est la représentation du groupe de Weil de K_v déduite de σ.

b) v non archimédien : $F_v^1(\sigma)$ est la représentation du groupe de Weil de K_v déduite de σ, et $F_v^0(\sigma) = F_v^1(\sigma)^{I_v}$.

Les facteurs locaux $L_v(s, \sigma)$ que considère Langlands sont les facteurs locaux définis ici au § 3, relatifs aux v-faisceaux $F_v(\sigma^\vee)$ déduits de la contragrédiente de σ

$$(5.1) \qquad L_v(s, \sigma) = Z_v(F_v(\sigma^\vee), s) \; .$$

Les facteurs locaux ε^L utilisés par Langlands sont reliés aux nôtres par la formule

$$(5.2) \qquad \varepsilon(\psi_v, F_v(\sigma)) = [\varepsilon^L(\sigma \otimes \|x\|^{-1/2}, \psi_v) \, \|\pi_v\|^{n_v . \dim(\sigma)}]^{-1} \; .$$

B. Constantes locales à l'infini.

Soit M un motif effectif sur K_v à multiplication complexe par $\mathbb{E}$. On suppose que K_v est archimédien et on pose

$$(5.3) \qquad \psi_v(x) = \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}_{K_v/\mathbb{R}}(x)) \; .$$

Si v est complexe, choisissons un isomorphisme entre K_v et $\mathbb{C}$. Le vectoriel $H(M)$ est alors bigradué :

$$H(M) = \bigoplus H^{p,q} \; .$$

Posant $h^{pq} = \dim H^{p,q}$, on a

$$(5.4) \qquad \varepsilon(\psi_v, h(M)) = i^{N_v}, \qquad \text{avec } N_v = \sum_{p,q} h^{p,q}(\sup(p, q) - \inf(p, q)) \; .$$

Si v est réel, on définit comme dans l'exposé précédent des nombres $h^{p,q}$ $(p \neq q, \; h^{pq} = h^{qp})$, h_+^{pp} et h_-^{pp}. On a

$$(5.5) \qquad \varepsilon(\psi_v\ ,\ h(M)) = i^{N_v}\ , \qquad \text{avec}\ \ N_v = \sum_{p<q} h^{p,q}(q-p+1) + h^{pp}_{-}\ .$$

C. Le cas semi-stable.

On dit que le motif M sur K est semi-stable si pour toute place finie v de K, la représentation $h_v^1(M)$ de $W(\bar{K}_v/K_v)$ est non ramifiée. En d'autres termes, ceci signifie que I_v agit de façon unipotente sur $H_\lambda(M)$ (1.10). Si F_v est un élément de $W(\bar{K}_v/K_v)$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ est le Frobenius géométrique, on a alors

$$\varepsilon(\psi_v\ ,\ h_v(M)) = \sigma_0(\det(F_v^{-n_v}\ ,\ H_\lambda(M)).\det(-F_v\ ,\ H_\lambda(M)/H_\lambda(M)^{I_v})^{-1})\ .$$

Supposons que ψ soit donné, à l'infini, par la formule (5.3). Soit χ le caractère (4.1.3) du groupe des classes d'idèles de K défini par M. On a alors

$$(5.5) \qquad \varepsilon(M\ ,\ 0) = \chi\Big(\prod_{v\in\Sigma_f} \pi_v^{n_v}\Big).\prod_{v\in\Sigma_\infty} i^{N_v}.\prod_{v\in\Sigma_f} \sigma_0(\det(-F_v\ ,\ H_\lambda(M)/H_\lambda(M)^{I_v})^{-1})\ .$$

Si $K = \underset{\sim}{Q}$, le premier facteur est égal à 1.

Prenons par exemple pour M le H^1 d'une courbe elliptique X sur $\underset{\sim}{Q}$, et faisons $E = \underset{\sim}{Q}$. Si, en chaque place p de $\underset{\sim}{Q}$, X a bonne réduction ou une réduction de type multiplicatif, et si m est le nombre de places où X admet une réduction selon une cubique plane ayant un point double à tangentes distinctes rationnelles, alors le signe de la constante de l'équation fonctionnelle conjecturale de M est $(-1)^{m+1}$.

Bibliographie

[1] DEMAZURE (M.). - Motifs des variétés algébriques, Séminaire BOURBAKI, 1969/70, exposé 365.

[2] DWORK (B.). - On the Artin root number, Amer. J. of Math., 78, 1956, p. 444-472.

[3] LANGLANDS (R. P.). - On the functional equation of the Artin L-functions, Notes polycopiées, Yale Univ. (en préparation).

[4] MANIN (Y.). - Correspondences, motives and monoidal transformation, Matematičeski Sbornik, 77 (119), n° 4, p. 475-507.

[5] WEIL (A.). - Basic number theory, Springer-Verlag, 1967.

(Texte reçu le 27 juin 1970)

Pierre DELIGNE
I. H. E. S.
35 route de Chartres
91 - BURES-sur-Yvette