Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Aribaud

Représentations linéaires *p*-adiques des groupes compacts totalement discontinus

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1969-1970), exp. nº 16, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_2_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 16, 24 p.
20 avril 1970

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES p-ADIQUES DES GROUPES COMPACTS TOTALEMENT DISCONTINUS

par François ARIBAUD

1. Introduction.

On se fixe une fois pour toutes un corps p-adique K , c'est-à-dire une extension algébrique, de degré fini, du complété $\underset{\sim}{Q}_p$ du corps des rationnels $\underset{\sim}{Q}$, pour la valeur absolue p-adique. On désignera par A l'anneau des entiers de K , par k le corps résiduel de K , par q le nombre d'éléments de k , et par v la valuation canonique de K (à valeurs dans l'anneau des entiers). On supposera que K est muni de sa valeur absolue normalisée :

$$|x| = q^{-v(x)} \quad .$$

Soit E un K-espace vectoriel. Une ultranorme sur E est une application $x \to \|x\|$ de E dans l'ensemble $\underset{\sim}{R}_+$ des nombres réels positifs, telle que :

(U1) Pour tout x dans E , l'égalité $\|x\| = 0$ équivaut à $x = 0$;

(U2) Pour tous x et y dans E , on a

$$\|x + y\| = \max(\|x\| , \|y\|) \quad ;$$

(U3) Pour tout x dans E , et tout a dans K , on a

$$\|ax\| = |a| \; \|x\| \quad .$$

On appelle espace de Banach sur K (ou plus simplement espace de Banach p-adique), un K-espace vectoriel ultranormé qui est complet pour la distance ultramétrique $d(x , y) = \|x - y\|$.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étudier les représentations linéaires continues d'un groupe compact dans un espace de Banach p-adique. Etant un espace ultramétrique, un espace de Banach p-adique est totalement discontinu. Par suite, la composante connexe du groupe est représentée par l'automorphisme identique dans toute représentation linéaire continue p-adique du groupe. Autrement dit, on peut se limiter aux représentations des groupes compacts totalement discontinus, ce que nous ferons dans ce qui suit.

DÉFINITION 1. - Soient G un groupe compact totalement discontinu, et E un espace de Banach p-adique. Une représentation de G dans E est une application U

de G dans l'espace des automorphismes continus de E, telle que :

1° Si e est l'élément neutre de G, $U(e) = id_E$;

2° Quels que soient g et h dans G, on a $U(gh) = U(g)\,U(h)$;

3° L'application $g \longmapsto U(g)x$ est une application continue de G dans E, quel que soit $x \in E$;

4° L'application $x \longmapsto U(g)x$ est une application continue, quel que soit $g \in G$.

LEMME 1 (Théorème de Banach-Steinhaus). - Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F, E et F étant des espaces de Banach p-adiques. Supposons que, pour tout $x \in E$, on ait $\sup\limits_i \|u_i(x)\| < \infty$. Alors $\sup\limits_i \|u_i\| < \infty$.

Comme E est un espace de Baire, étant un espace métrique complet, la démonstration du théorème de Banach-Steinhaus "réel ou complexe" se transpose aussitôt.

COROLLAIRE 1. - Soit U une représentation continue du groupe compact G dans l'espace de Banach E. L'application $(g, x) \longmapsto U(g)x$ est une application continue de $G \times E$ dans E.

L'application $g \longmapsto U(g)x$ étant continue, on a, puisque G est compact, $\sup\limits_g \|U(g)x\| < \infty$ pour tout x. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, on a $\sup\limits_g \|U(g)\| = C < \infty$. Pour tous g, $g_0 \in G$ et tous x, $x_0 \in E$, on a

$$\|U(g)x - U(g_0)x_0\| = \|U(g)(x - x_0) + [U(g) - U(g_0)]\,x_0\| \quad ,$$

et

$$\|U(g)x - U(g_0)x_0\| \leqslant \max(\|U(g)(x - x_0)\| \, , \, \|[U(g) - U(g_0)]\,x_0\|) \quad .$$

Or

$$\|U(g)(x - x_0)\| \leqslant C\|x - x_0\| \, , \qquad \text{quel que soit } g \in G \quad ,$$

et

$$\|U(g)x - U(g_0)x_0\| \leqslant \max(C\|x - x_0\| \, , \, \|U(g)x_0 - U(g_0)x_0\|) \quad ,$$

d'où aussitôt le corollaire.

Q. E. D.

COROLLAIRE 2. - Les notations étant celles du corollaire 1, il existe un $C > 0$ tel que, pour tout $g \in G$, on ait

$$\frac{1}{C} \leqslant \|U(g)\| \leqslant C \quad .$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une constante $C > 0$, telle que $\|U(g)\| \leqslant C$ pour tout $g \in G$. D'autre part, il résulte de l'identité

$$U(g)\, U(g^{-1}) = U(e) = \mathrm{id}_E \quad ,$$

que l'on a

$$\|U(g)\|\ \|U(g^{-1})\| \geqslant \|U(e)\| = 1 \ , \qquad \text{pour tout } g \in G \ .$$

Comme $\|U(g^{-1})\| \leqslant C$, on a $\|U(g)\| \geqslant \frac{1}{C}$.

Q. E. D.

COROLLAIRE 3. - <u>Les notations étant toujours celles du corollaire</u> 1, <u>la topologie de</u> E <u>peut être définie par une ultranorme pour laquelle la représentation</u> U <u>est unitaire (i. e. pour laquelle tous les</u> $U(g)$ <u>sont de norme</u> 1).

Posons, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|' = \sup_g \|U(g)x\| \quad .$$

Il est immédiat que $\|x\|'$ est une ultranorme sur E pour laquelle les $U(g)$ sont tous unitaires. D'autre part, dans les notations du corollaire 2, on a

$$\|x\| = \|U(e)x\| \leqslant \sup \|U(g)x\| = \|x\|' \leqslant C\|x\| \quad .$$

Q. E. D.

Nous dirons qu'une représentation linéaire continue d'un groupe compact G dans un espace de Banach p-adique est <u>algébriquement</u> (resp. <u>topologiquement</u>) <u>irréductible</u>, si les seuls sous-espaces (resp. fermés), stables sous l'action de G, sont (0) et E.

Nous nous proposons de démontrer d'abord le théorème suivant.

THÉORÈME (A). - <u>Si</u> U <u>est une représentation linéaire continue algébriquement irréductible du groupe compact</u> G <u>dans un espace de Banach</u> p-<u>adique</u> E, E <u>est de dimension finie</u>.

On ne sait pas si le résultat analogue est valable pour les représentations topologiquement irréductibles. <u>En particulier, une représentation topologiquement irréductible est-elle algébriquement irréductible</u> ?

Il existe une classe particulière de représentations pour laquelle la réponse à la question précédente est triviale. Nous dirons qu'<u>une représentation</u> U <u>est de type</u> I, si son noyau (i. e. le sous-groupe H de G des h tels que $U(h) = \mathrm{id}$) est ouvert. Le deuxième objet du présent travail est de caractériser les groupes compacts dont toutes les représentations topologiquement irréductibles dans un espace p-adique sont de type I.

Soit $\underset{\sim}{C}(G , K)$ l'espace vectoriel des applications continues de G dans K, qui est un espace de Banach p-adique pour l'ultranorme $\|f\| = \sup_g |f(g)|$. Il existe une représentation naturelle de G dans $\underset{\sim}{C}(G , K)$, à savoir celle qui associe la fonction $f(g^{-1} x)$ à la fonction $f(x)$ et à l'élément g de G. Une forme linéaire sur $\underset{\sim}{C}(G , K)$ sera dite invariante, si elle prend la même valeur sur une fonction f, et sur sa translatée, par un élément quelconque de G. Une forme linéaire continue et invariante sur $\underset{\sim}{C}(G , K)$, qui prend la valeur 1 sur la fonction constante égale à 1, sera appelée une mesure de Haar sur G.

Le deuxième théorème que nous établissons est le suivant.

THÉORÈME (B). - Soit G un groupe compact totalement discontinu. Il y a équivalence entre :

(i) Les p-sous-groupes de Sylow de G sont finis ;

(ii) Il existe une mesure de Haar sur le groupe G, et cette mesure de Haar est unique (c'est la limite projective des moyennes des quotients finis de G) ;

(iii) Toute représentation de G est semi-simple, i. e. tout sous-espace fermé, stable par l'action de G, de l'espace d'une représentation, admet un supplémentaire topologique également stable par l'action de G.

De plus, si G satisfait à l'une des trois conditions équivalentes précédentes, toute représentation topologiquement irréductible de G est de type I (i. e. provient d'un quotient fini de G).

2. Quelques résultats d'analyse fonctionnelle p-adique.

DÉFINITION 2. - Soit E un espace de Banach p-adique. On dit que l'ultranorme de E est régulière si, pour tout $x \in E$, il existe un $a \in K$ tel que $\|x\| = |a|$.

Il revient au même de dire que tout élément non nul de E possède un homothétique sur la sphère unité.

LEMME 2. - Soit E un espace de Banach p-adique. La topologie de E peut être définie par une ultranorme régulière.

Pour tout x non nul dans E, désignons par L_x l'ensemble des nombres réels positifs h de la forme $h = |a|$ pour un $a \in K$, tels que $|a| \geqslant \|x\|$. On vérifie sans difficulté que l'on définit une ultranorme régulière par $p(x) = \inf L_x$

si $x \neq 0$, et $p(0) = 0$. On a $\|x\| \leqslant p(x)$. Comme 0 est le seul point d'accumulation de l'ensemble des nombres réels qui peuvent se représenter comme valeurs absolues d'éléments de K , $p(x)$ tend vers 0 avec x ; par suite, p est compatible avec la topologie de E .

Q. E. D.

Soit I un ensemble quelconque. On désigne par $c(I)$ l'ensemble des familles (c_i) indexées par l'ensemble I d'éléments de K , telles que c_i tende vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie L de I , telle que $|c_i| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \notin L$.

Pour de telles familles (c_i) , on a $\sup|c_i| < \infty$. On définit une ultranorme sur $c(I)$ par

$$\|(c_i)\| = \sup_i |c_i| \quad .$$

LEMME 3. - Muni de l'ultranorme précédente, qui est régulière, $c(I)$ est un espace de Banach p-adique.

Que l'ultranorme soit régulière résulte de ce que, K étant de valuation discrète, l'ensemble des nombres réels, qui sont des valeurs absolues d'éléments de K , n'a pas d'autre point d'accumulation que 0 . La vérification du fait que $c(I)$ est un espace de Banach est standard.

Q. E. D.

PROPOSITION 1. - Soit E un espace de Banach p-adique dont l'ultranorme est régulière. Il existe un isomorphisme isométrique de E sur un espace $c(I)$.

Pour la démonstration, on se reportera à [3], § 1. La proposition 1 peut également se traduire sous la forme d'un résultat d'existence de bases orthonormales.

PROPOSITION 1 bis. - Soit E un espace de Banach p-adique dont l'ultranorme est régulière. Il existe une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de norme 1 de E , telle que :

(i) Si $(c_i)_{i\in I}$ est un élément de $c(I)$, la famille $(c_i\, e_i)$ est sommable dans E , et

$$\|\sum c_i\, e_i\| = \sup_i |c_i| \quad ;$$

(ii) Pour tout x dans E , il existe $(c_i)_{i\in I}$ dans $c(I)$, tel que x soit la somme de la famille sommable $(c_i\, e_i)$.

De la proposition 1, on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - *Soit E un espace de Banach p-adique dont l'ultranorme est régulière. Si F est un sous-espace fermé de E, il existe un projecteur continu de E sur F, dont la norme est $\leqslant 1$.*

DÉFINITION 3. - *Un sous-ensemble S de l'espace de Banach p-adique E est ultraconvexe si, pour tous s et t dans S, et tous a et b entiers dans K (i. e. de valeur absolue $\leqslant 1$), on a $as + bt \in S$.*

Un ensemble ultraconvexe n'est pas autre chose qu'un sous-A-module (A , anneau des entiers de K) du A-module E.

LEMME 4. - *Soit S un ensemble ultraconvexe dans l'espace de Banach p-adique E. Si S a un point intérieur, S est ouvert.*

L'ensemble S ayant un point intérieur, il existe un $s \in S$ et un $\varepsilon > 0$ tels que tout t distant de s de moins de ε soit dans S. Considérons un $s' \in S$ quelconque. Comme S est un module sur l'anneau des entiers A de K, on a $s - s' \in S$. Si t' est un élément de E distant de s' de moins de ε, on a $\|s - (t' + s - s')\| < \varepsilon$, soit $t' + s - s' \in S$. Or $s - s' \in S$, d'où $t' \in S$. Autrement dit, la boule ouverte de centre s' et de rayon ε est contenue dans S.

Q. E. D.

Soit C un ensemble de E. L'intersection des ensembles ultraconvexes fermés de E qui contiennent C est un ensemble ultraconvexe fermé, que l'on appelle *l'enveloppe ultraconvexe fermée* de C, et que l'on note $u(C)$; on voit aussitôt que $u(C)$ est l'adhérence dans E du A-module engendré par C. Si tout élément de C est de norme $\leqslant r$, tout élément de $u(C)$ est également de norme $\leqslant r$.

THÉORÈME 1. - *Soit C un ensemble fermé d'un espace de Banach p-adique E d'ultranorme régulière. Pour que C soit compact :*

(i) *Il faut que, pour toute base orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ de E, il existe une famille $(b_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I, telle que, pour tout élément $c = \sum c_i e_i$ de C, on ait $|c_i| \leqslant b_i$ pour tout i ;*

(ii) *Il suffit qu'il existe une base orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ de E, et une famille $(b_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs, tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I, telles que tout élément $c = \sum c_i e_i$ de C satisfasse aux conditions $|c_i| \leqslant b_i$ pour tout i.*

La condition est <u>nécessaire</u> : Soit C un ensemble compact de E. Pour tout $c = \sum c_i e_i$, on a $|c_i| \leqslant \|c\|$ pour tout i ; il en résulte que, pour tout i, la famille des c_i, c parcourant C, est bornée. On posera $b_i = \sup\limits_{c \in C} |c_i|$. Soit ε un nombre réel > 0 quelconque. L'ensemble C étant compact, on peut trouver des éléments $c_1, \ldots, c_n$ en nombre fini de C, tels que C soit recouvert par les n boules ouvertes de centres c_i et de rayons ε. D'autre part, pour tout $1 \leqslant p \leqslant n$, on peut trouver un ensemble $L_p \subset I$, tel que, si $c_p = \sum c_{p,j} e_j$, on ait $|c_{p,j}| \leqslant \varepsilon$ pour $j \notin L_p$. On posera $L = \bigcup\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} L_p$, qui est un sous-ensemble fini de I. Soit alors c un élément quelconque de C, et soit i un élément quelconque de I n'appartenant pas à L. On peut trouver un p tel que

$$\|c - c_p\| < \varepsilon \quad ,$$

soit, si $c = \sum c_i e_i$ et $c_p = \sum c_{p,i} e_i$,

$$\sup_i |c_i - c_{p,i}| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |c_i| \leqslant \max(|c_{p,i}| \, , \, \varepsilon) \quad .$$

Si i n'appartient pas à L, on a $|c_{p,i}| \leqslant \varepsilon$ et $|c_i| \leqslant \varepsilon$. Comme $b_i = \sup |c_i|$, on a également $|b_i| \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini L de I, tel que $b_i \leqslant \varepsilon$ pour tout i n'appartenant pas à L, ce qui revient à dire que la famille b_i tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I.

La condition est <u>suffisante</u> : On va montrer que, si la condition (ii) est satisfaite, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, recouvrir C par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε, ce qui établira la compacité de C puisque C est complet.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver un sous-ensemble fini L de I, tel que $|b_i| \leqslant \varepsilon$ pour $i \notin L$. L'ensemble des combinaisons linéaires $\sum\limits_{\ell \in L} a_\ell e_\ell$ des e_ℓ, pour $\ell \in L$ à coefficients a_ℓ de valeur absolue $\leqslant b_\ell$, est compact. On peut donc trouver des éléments en nombre fini $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de C, tels que, pour tout $c \in C$, il existe un p pour lequel $\sup\limits_{\ell \in L} |c_\ell - c_{p,\ell}| \leqslant \varepsilon$. D'autre part, pour $i \notin L$, on a

$$|c_i - c_{p,i}| \leqslant \max(|c_i| \, , \, |c_{p,i}|) \leqslant b_i \quad ,$$

d'où

$$\|c - c_p\| = \sup\Big(\sup_{\ell \in L} |c_\ell - c_{p,\ell}| \, , \, \sup_{i \notin L} |c_i - c_{p,i}|\Big) \leqslant \varepsilon \quad .$$

Autrement dit, l'ensemble C peut être recouvert par les boules ouvertes de centres c_i et de rayons ε.

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. - <u>Soient</u> E <u>un espace de Banach</u> p-<u>adique d'ultranorme régulière, et</u> $(e_i)_{i\in I}$ <u>une base orthonormale de</u> E . <u>On considère un ensemble compact</u> C <u>dans</u> E , <u>et on pose, pour tout</u> $i \in I$, $b_i = \sup_{c\in C} |c_i|$, <u>où</u> c_i <u>est défini par</u> $c = \sum c_i\ e_i$. <u>L'enveloppe ultraconvexe fermée</u> $u(C)$ <u>de</u> C <u>est composée d'éléments</u> $x = \sum x_i\ e_i$ <u>de</u> E , <u>tels que</u> $|x_i| \leqslant b_i$ <u>pour tout</u> i . <u>En particulier,</u> $u(C)$ <u>est compacte</u>.

Il suffit de remarquer que le sous-ensemble de E des $x = \sum x_i\ e_i$, tels que $|x_i| \leqslant b_i$ pour tout i , est un ensemble ultraconvexe qui est compact d'après le théorème précédent.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> C <u>un ensemble compact d'un espace de Banach</u> p-<u>adique. Si le sous-espace vectoriel</u> F <u>des éléments de</u> E , <u>qui sont absorbés par l'enveloppe ultraconvexe fermée</u> $u(C)$ <u>de</u> C , <u>est fermé, le sous-espace de</u> E <u>engendré par</u> C <u>est de dimension finie, et coïncide avec</u> F .

Montrons d'abord que F est un sous-espace vectoriel de E . Il est évident que F est stable par la multiplication par un scalaire. Soient y_1 et y_2 deux éléments de F ; il existe a_1 et a_2 dans K de valeur absolue $\geqslant 1$, tels que $y_i \in a_i\ u(C)$ pour $i = 1$, 2 . On a alors

$$y_1 + y_2 \in a_1\ a_2\left(\frac{1}{a_2} D + \frac{1}{a_1} D\right) \in a_1\ a_2(D + D) \subset a_1\ a_2\ D , \qquad \text{avec}\quad D = u(C) \ .$$

Soit t une uniformisante de K , i. e. un générateur de l'idéal maximal de l'anneau des entiers de K . Tout élément s de K peut s'écrire sous la forme $s = ut^n$, où u est un entier "inversible" (i. e. dont l'inverse est un entier), et où n est un entier positif ou négatif. Comme $D = u(C)$ est stable par la multiplication par un entier, écrire que D absorbe F revient à écrire que $F = \bigcup t^{-n}\ D$, n parcourant tous les entiers positifs. Chaque $t^{-n}\ D$ est compact, et est en particulier fermé. Comme F est fermé, donc complet, il résulte du théorème de Baire que l'un des $t^{-n}\ D$ a un point intérieur, et est donc ouvert d'après le lemme 4. Comme $t^{-n}\ D$ est également compact, F est localement compact, et il résulte du théorème de Riesz (cf. BOURBAKI [1], chap. 1, § 2, n° 4, théorème 3) que F est de dimension finie. L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de C étant partout dense dans F , et F étant de dimension finie, il en résulte que F est l'espace vectoriel engendré par C .

Q. E. D.

3. Démonstration du théorème (A).

Soit U une représentation algébriquement irréductible du groupe compact G dans l'espace de Banach p-adique E, et soit $x \neq 0$ dans E. L'ensemble

$$C = (U(g)x \mid g \in G)$$

est compact, et il en est de même de son enveloppe ultraconvexe fermée $D = u(C)$. Soit F le sous-espace de E des éléments absorbés par D. L'espace F est non nul, puisqu'il contient $x \neq 0$. Comme C est stable par l'action de G, il en est de même de $D = u(C)$, et de F qui est ainsi un sous-espace vectoriel de E stable par G. Comme U est algébriquement irréductible, on a $F = E$, et F est donc complet. D'après le corollaire 2 du théorème 1, $F = E$ est de dimension finie.

Q. E. D.

On remarquera que le raisonnement qui précède ne peut s'appliquer aux représentations U topologiquement irréductibles ; on sait alors seulement que F est partout dense dans E, et l'exemple des espaces d'applications montre qu'il existe des espaces vectoriels, de dimension infinie, qui contiennent un ensemble compact C, tel que les combinaisons linéaires d'éléments de C soient partout denses.

4. Unicité de la mesure de Haar.

Soit G un groupe compact totalement discontinu. Le groupe G possède un système fondamental de voisinages de l'élément neutre e, composé de sous-groupes normaux ouverts ; si H est un tel sous-groupe ouvert, le quotient G/H est fini. Si E est un K-espace de Banach p-adique, on désignera par $\underset{\sim}{C}(G, E)$ l'espace de Banach p-adique des applications continues de G dans E, muni de l'ultranorme

$$\|f\| = \sup_g |f(g)| \quad .$$

Soit H un sous-groupe invariant ouvert de G, et soit p l'homomorphisme canonique de G sur G/H. L'homomorphisme p se transpose en une application continue de $\underset{\sim}{C}(G/H, E)$ dans $\underset{\sim}{C}(G, E)$, qui est injective. L'espace $\underset{\sim}{C}(G/H, E)$ s'identifie, par cette application qui est isométrique, au sous-espace fermé $\underset{\sim}{C}(G, E)^H$ des applications invariantes par H.

LEMME 5. - *La réunion des $\underset{\sim}{C}(G, E)^H$, lorsque H parcourt le filtre des sous-groupes ouverts normaux de G, est partout dense dans $\underset{\sim}{C}(G, E)$.*

Soit f une application continue de G dans E. Comme G est compact, f est uniformément continue et, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un sous-groupe invariant ouvert H , tel que $\|f(gh) - f(g)\| < \varepsilon$ pour tout $h \in H$ et tout $g \in G$. Choisissons un système de représentants (g_i) de G/H dans G , et posons $k(g) = f(g_i)$ si $g \in g_i H$. La fonction k , qui est localement constante, est continue. D'autre part, si $g \in g_i H$, on a

$$\|f(g) - k(g)\| = \|f(g_i h) - f(g_i)\| < \varepsilon \quad .$$

Q. E. D.

Soit m une mesure de Haar sur G de norme c : pour toute $f \in \underset{\sim}{C}(G , K)$, on a $|m(f)| \leqslant c\|f\|$. D'après le lemme 5, m est entièrement déterminée par sa restriction à chacun des $\underset{\sim}{C}(G , K)^H = \underset{\sim}{C}(G/H , K)$, et on est donc ramené à l'étude des mesures de Haar sur un groupe fini.

Nous supposons, dans l'alinéa qui suit, que G est un groupe fini d'ordre $o(G)$. Soit d_g la fonction sur G égale à 1 en g , et à 0 ailleurs. On a $1 = \sum_g d_g$, soit $\sum m(d_g) = m(1) = 1$. Mais d_g n'est autre que la translatée de d_e par g^{-1} , d'où $m(d_g) = m(d_e)$ et $o(G)\, m(d_e) = 1$, d'où $m(d_e) = \dfrac{1}{o(G)}$. Toute $f \in \underset{\sim}{C}(G , K)$ peut s'écrire d'une façon, et d'une seule, sous la forme $f = \sum a_g d_g$ avec $a_g \in K$. On a donc $m(\sum a_g d_g) = \dfrac{1}{o(G)} \sum a_g$, ce qui montre que m coïncide avec la moyenne sur le groupe fini G , et qui entraîne l'unicité de m . On remarquera d'autre part que, puisque $\|d_e\| = 1$, on a $|m(d_e)| \leqslant c$ (= norme de m) , soit $\left|\dfrac{1}{o(G)}\right| \leqslant c$, où $|o(G)|$ est la valeur absolue p-adique de l'entier $o(G)$. On a d'ailleurs $c = \left|\dfrac{1}{o(G)}\right|$: comme la boule unité de $\underset{\sim}{C}(G , K)$ est compacte, il existe des éléments a_g de K de norme $\leqslant 1$, un a_g au moins étant de norme 1 , tels que

$$c = |m(\sum a_g d_g)| = |\sum a_g| \left|\frac{1}{o(G)}\right| \quad .$$

Mais $|\sum a_g| \leqslant \sup|a_g| = 1$, d'où $c \leqslant \left|\dfrac{1}{o(G)}\right|$.

Revenant à la situation générale d'un groupe profini quelconque G , on voit que, pour tout sous-groupe normal ouvert H de G , on a $|o(G/H)| \geqslant \dfrac{1}{c}$: en effet, m induit sur G/H une mesure de Haar de norme inférieure à la norme de m , c'est-à-dire à c . Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G . On sait (cf. [4], chap. I, § 1, n° 4, prop. 4) que, pour tout sous-groupe invariant ouvert H de G , $P/P \cap H$ est un p-sous-groupe de Sylow de G/H ; on a donc $|o(P/P \cap H)| \geqslant 1/c$ pour tout H , d'où $|o(P)| \geqslant 1/c$, i. e. P est fini.

DÉFINITION 4. - Un groupe compact totalement discontinu est dit p-régulier, si ses p-sous-groupes de Sylow sont finis.

Nous pouvons résumer ce qui précède par le lemme suivant.

LEMME 6. - <u>S'il existe une mesure de Haar</u> p-<u>adique sur le groupe compact totalement discontinu</u> G , G <u>est</u> p-<u>régulier</u>.

On en déduit, en particulier, qu'il n'existe aucune mesure de Haar p-adique sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

4. Existence d'une mesure de Haar sur un groupe p-régulier.

On considère, dans tout ce qui suit, un groupe compact totalement discontinu p-régulier G . Si $o(P)$ est l'ordre d'un p-sous-groupe de Sylow, on posera $c = \left|\frac{1}{o(G)}\right|$, où $|o(G)|$ est la valeur absolue de l'entier $o(G)$ considéré comme élément de K .

Soit H un sous-groupe ouvert normal de G , et soit E un espace de Banach p-adique. Si f est une application continue de G dans E , invariante par H (i. e. une application qui provient d'une application $\bar{f}$ de G/H dans E), on posera

$$M_H(f) = \frac{1}{o(G/H)} \sum_{\bar{g}\in G/H} \bar{f}(\bar{g}) \quad .$$

On obtient ainsi une application linéaire continue de $\underset{\sim}{C}(G , E)^H$, muni de l'ultranorme de la convergence uniforme, dans E . On vérifie, comme au paragraphe précédent, que cette application est de norme

$$\left|\frac{1}{o(G/H)}\right| \leqslant \left|\frac{1}{o(G)}\right| = c \quad .$$

Soit L un sous-groupe ouvert invariant de G , qui est contenu dans H . On a $\underset{\sim}{C}(G , E)^H \subset \underset{\sim}{C}(G , E)^L$.

LEMME 7. - M_L <u>induit</u> M_H <u>sur</u> $C(G , E)^H$.

Choisissons un système de représentants (s_i) de H dans G , et un système de représentants (t_j) de L dans H . Les $(s_i\, t_j)$ forment un système de représentants de L dans G . Pour toute $f \in \underset{\sim}{C}(G , E)^H$, on a

$$M_L(f) = \frac{1}{o(G/L)} \sum_{i,j} f(s_i\, t_j) = \frac{o(H/L)}{o(G/L)} \sum_i f(s_i) \quad ,$$

puisque, f étant invariante par H , on a $f(s_i\, t_j) = f(s_i)$. Par suite,

$$M_L(f) = \frac{1}{o(G/H)} \sum_i f(s_i) = M_H(f) \quad .$$

Q. E. D.

Le lemme 6 montre qu'il existe une application linéaire unique M de $\cup \underset{\sim}{C}(G, E)^H$ dans E, telle que la restriction de M à $\underset{\sim}{C}(G, E)^H$ soit M_H. Comme $\|M_H\| \leqslant c$ pour tout H, on a également $\|M\| \leqslant c$, en considérant M comme une application linéaire de l'espace ultranormé non complet $\cup \underset{\sim}{C}(G, E)^H$ (pour l'ultranorme de la convergence uniforme) dans E. D'après le lemme 5, $\cup \underset{\sim}{C}(G, E)^H$ est partout dense dans $\underset{\sim}{C}(G, E)$, et M se prolonge par continuité en une application linéaire continue, de norme $\leqslant c$, de $\underset{\sim}{C}(G, E)$ dans E. Il est immédiat que M est invariante par G, puisque chaque M_H l'est, et que l'image, par M, de la fonction constante sur G, égale à a, est a. En prenant pour E le corps K lui-même, on obtient une forme linéaire sur $\underset{\sim}{C}(G, E)$ qui est une mesure de Haar. On a donc établi l'existence d'une mesure de Haar pour un groupe compact totalement discontinu p-régulier, et plus généralement l'existence d'une application linéaire continue invariante m_E de $\underset{\sim}{C}(G, E)$ dans E, prenant la valeur x sur l'application constante qui associe x à tout $g \in G$. Une telle application m_E est d'ailleurs unique, comme on le voit en reprenant les raisonnements du paragraphe 3 ; elle est la limite projective des applications moyennes définies sur les quotients finis.

<u>On remarquera que l'existence d'une mesure de Haar peut aussi s'établir pour un groupe compact totalement discontinu semi-simple</u>, au sens de l'alinéa (iii) du théorème (B). Soit G un tel groupe, et considérons la représentation naturelle par translations de G dans l'espace des fonctions continues $\underset{\sim}{C}(G, K)$. Les fonctions constantes forment un sous-espace de $\underset{\sim}{C}(G, K)$, qui est stable sous l'action de G ; on désignera par F un supplémentaire topologique de ce sous-espace, stable sous l'action de G. Si $h \in \underset{\sim}{C}(G, K)$, on peut écrire $h = k + f$, où k est une fonction constante, et où f est dans F. Les applications $h \mapsto k$ et $h \mapsto f$ sont des applications linéaires continues et, pour tout $g \in G$, on a, en désignant par h_g et f_g les translatées par g de h et de f, $h_g = k + f_g$. Il en résulte que la forme linéaire continue sur $\underset{\sim}{C}(G, K)$, définie par

$$m(h) = \text{unique valeur prise par la fonction constante } k \quad ,$$

est une mesure de Haar p-adique.

Nous pouvons résumer les paragraphes 3 et 4 par les lemmes suivants.

LEMME 8. - <u>Pour qu'il existe une mesure de Haar</u> p-<u>adique sur le groupe compact totalement discontinu</u> G, <u>il faut et il suffit que</u> G <u>soit</u> p-<u>régulier. La mesure de Haar est alors unique, et plus généralement, pour tout espace de Banach</u> p-<u>adique</u>

E , <u>il existe une mesure de Haar unique</u> m_E <u>sur</u> G <u>à valeurs dans</u> E .

On écrira encore $\int_G f(x)\,dx$ au lieu de $m_E(f)$, pour toute application continue de G dans E .

LEMME 9. - <u>Tout groupe compact totalement discontinu semi-simple, au sens de l'alinéa</u> (iii) <u>du théorème</u> (B), <u>est</u> p-<u>régulier</u>.

5. Représentations linéaires p-adiques des groupes compacts p-réguliers.

Dans tout ce paragraphe, on désigne par G un groupe compact p-régulier. La norme de l'unique mesure de Haar p-adique sur G sera notée c .

LEMME 10. - <u>Soit</u> A <u>une algèbre de Banach</u> p-<u>adique, c'est-à-dire un espace de Banach</u> p-<u>adique sur lequel est défini un produit</u> ab <u>tel que</u> $\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|$. <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont deux applications continues de</u> G <u>dans</u> E , <u>l'application de</u> G <u>dans</u> E , <u>définie par</u>

$$h(x) = \int_G f(xy)\, g(y^{-1})\, dy \quad ,$$

<u>est continue, et on a</u>

$$\|h\| \leqslant c\|f\|\,\|g\| \quad .$$

On a, pour tout x ,

$$|h(x)| \leqslant c \sup_y \|f(xy)\, g(y^{-1})\| \leqslant c \sup_y \|f(xy)\| \sup_y \|g(y^{-1})\|$$

$$\leqslant c\|f\|\,\|g\| \quad .$$

Pour tout $x \in G$, posons $f_x = f(xy)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un sous-groupe invariant ouvert H , tel que $\|f(xy) - f(x'y)\| < \varepsilon$ dès que $xx'^{-1} \in H$, et cela quel que soit y (uniforme continuité) ; autrement dit, $\|f_x - f_{x'}\| \leqslant \varepsilon$ dès que $xx'^{-1} \in H$. On a, si $xx'^{-1} \in H$,

$$\|h(x) - h(x')\| = \left\|\int_G [f(xy) - f(x'y)]\, g(y^{-1})\, dy\right\|$$

$$\leqslant c \sup_y \|f(xy) - f(x'y)\| \sup_y \|g(y^{-1})\| \leqslant c\varepsilon\|g\| \quad .$$

Q. E. D.

Si l'on modifie la norme de $\underset{\sim}{C}(G\ ,\ A)$ en posant $\|h\|' = c\|h\|$, il résulte du lemme précédent que $\underset{\sim}{C}(G\ ,\ A)$ est une algèbre de Banach p-adique pour le produit de composition. Ce qui précède s'applique évidemment à $\underset{\sim}{C}(G\ ,\ K)$.

Soit U une représentation continue de G dans un espace de Banach p-adique E. Pour tout x dans E, l'application, qui à $f \in \underset{\sim}{C}(G, K)$ fait correspondre l'application $h \longmapsto f(h)\, U_h\, x$ de G dans E, est une application linéaire continue, que l'on peut donc "intégrer" par rapport à la mesure de Haar p-adique à valeurs dans E. D'après le corollaire 2 du lemme 1, il existe une constante D telle que $\|U_g\| \leqslant D$ pour tout $g \in G$ et, par conséquent, $\|U_g\, x\| \leqslant D\|x\|$. D'autre part, comme m_E, mesure de Haar à valeurs dans E, est de norme $\leqslant c$, on a

$$\left\|\int_G f(h)\, U_h\, x\, dm_E(h)\right\| \leqslant c \sup_h \|f(h)\, U_h(x)\|$$

$$\leqslant c \sup_h |f(h)| \sup_h \|U_h(x)\|$$

$$\leqslant c\|f\|\, D\|x\| \quad ,$$

d'où il résulte que l'on définit un endomorphisme linéaire continu U_f de E par

$$U_f(x) = \int_G f(h)\, U_h(x)\, dh \quad .$$

LEMME 11. - <u>Soit</u> C <u>un ensemble ultraconvexe fermé de</u> E, <u>stable par l'action de</u> G. <u>Pour toute</u> $f \in \underset{\sim}{C}(G, K)$ <u>telle que</u> $\|f\| = \sup_g |f(g)| \leqslant \frac{1}{c}$, <u>et tout</u> $d \in C$, <u>on a</u> $U_f(d) \in C$.

En modifiant au besoin l'ultranorme de E, on peut supposer que les U_g sont unitaires. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel positif quelconque. On peut trouver un sous-groupe invariant ouvert H de G, tel que

$|f(gh) - f(g)| < \varepsilon$ et $|U_{gh}(d) - U_g(d)| < \varepsilon$, pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$.

Soit (g_i) un système de représentants de G/H dans G, et posons

$$\left.\begin{aligned} s(g) &= f(g_i) , \\ V_g &= U_g , \end{aligned}\right\} \quad \text{si } g \in g_i H .$$

Les applications s et V sont localement constantes, donc continues, et on a $\|s\| \leqslant \frac{1}{c}$, $\|f - s\| < \varepsilon$, et $\|U_g(d) - V_g(d)\| < \varepsilon$ pour tout g. Par suite,

$$\left\|\int_G f(z)\, U_z(d)\, dz - \int_G s(z)\, V_z(d)\, dz\right\|$$

$$\leqslant \left\|\int_G [f(z) - s(z)]\, U_z(d)\, dz + \int_G s(z)[U_z(d) - V_z(d)]\, dz\right\|$$

$$\leqslant \max\left(\left\|\int_G [f(z) - s(z)]\, U_z(d)\, dz\right\| , \left\|\int_G s(z)[U_z(d) - V_z(d)]\, dz\right\|\right) \quad .$$

Mais

$$\left\|\int_G [f(z) - s(z)]\, U_z(d)\, dz\right\| \leqslant c\|f - s\|\,\|d\| \leqslant c\varepsilon\|d\| \quad ,$$

$$\left\|\int_G s(z)[U_z(d) - V_z(d)]\, dz\right\| \leqslant c\|s\| \sup_z \|U_z(d) - V_z(d)\|$$

$$\leqslant \varepsilon \quad .$$

D'autre part,

$$\int_G s(z)\, V_z(d)\, dz = \frac{1}{o(G/H)} \sum s(g_i)\, V_{g_i}(d)$$

$$= \frac{1}{o(G/H)} \sum f(g_i)\, U_{g_i}(d) \quad .$$

Comme $\left|\frac{1}{o(G/H)}\right| \leqslant c$, on a $\left|\frac{f(g_i)}{o(G/H)}\right| \leqslant 1$, et $\frac{1}{o(G/H)} \sum f(g_i)\, U_{g_i}(d)$ appartient à l'ensemble ultraconvexe C . Comme, d'après ce qui précède, $\int_G f(g)\, U_g(d)\, dg$ peut être approché d'aussi près qu'on veut par des éléments de la forme

$$\frac{1}{o(G/H)} \sum f(g_i)\, U_{g_i}(d) \quad ,$$

on a $\int_G f(g)\, U_g(d)\, dg \in C$.

Q. E. D.

LEMME 12. - <u>Soit</u> C <u>un ensemble compact de</u> E . <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un sous-groupe invariant ouvert</u> H <u>de</u> G , <u>tel que, pour tout</u> $d \in C$ <u>et tout</u> $h \in H$, <u>on ait</u> $\|U_h\, d - d\| < \varepsilon$.

D'après le corollaire 1 du lemme 1 du paragraphe 1, l'application $(g , d) \longmapsto U_g\, d$ de $G \times C$ dans E est continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $d \in C$, on peut trouver un voisinage V_d de d dans C , et un sous-groupe invariant $H_{d,\varepsilon}$ de G tel que $\|U_h\, z - z\| < \varepsilon$ pour tout $z \in V_d$ et tout $h \in H_{d,\varepsilon}$. On peut recouvrir C par un nombre fini de V_d , soit V_{d_1} , ... , V_{d_n} . On posera $H = \bigcap H_{d_i,\varepsilon}$. Pour tout $z \in C$, il existe un d_i tel que $z \in V_{d_i}$; si $h \in H \subset H_{d_i,\varepsilon}$, on a $\|U_h\, z - z\| < \varepsilon$.

Q. E. D.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> U <u>une représentation linéaire continue, du groupe compact totalement discontinu</u> p-<u>régulier</u> G , <u>dans l'espace de Banach</u> p-<u>adique</u> E .

<u>L'application $f \longmapsto U_f$ est une représentation continue, de l'algèbre de Banach $\underset{\sim}{C}(G, K)$, dans l'algèbre de Banach $\underset{\sim}{L}(E)$ des endomorphismes linéaires continus de E, munie de l'ultranorme de la convergence uniforme.</u>

Il est évident que l'application $f \longmapsto U_f$ est linéaire. D'autre part, elle est continue puisque, comme on l'a vu plus haut, on a, pour tout $x \in E$ et toute $f \in \underset{\sim}{C}(G, K)$,

$$\|U_f\, x\| \leqslant c\|f\| \sup_g \|U_g\| \, \|x\| \quad ,$$

d'où

$$\|U_f\| \leqslant c\|f\| \sup_g \|U_g\| \quad .$$

Reste à voir que cette application est compatible avec les produits.

En modifiant si besoin est l'ultranorme de E, on supposera les U_g unitaires. Soient f et g deux fonctions continues sur G. Il faut montrer que, pour tout $b \in E$, on a $U_{f \star g}(b) = U_f(U_g(b))$. Le produit de composition étant continu, on peut supposer que f et g sont invariantes par un sous-groupe normal ouvert L de G. Comme U est linéaire, on peut également supposer que $\|f\| \leqslant \frac{1}{c}$ et $\|g\| \leqslant \frac{1}{b}$; on a alors, d'après le lemme 10, $\|f \star g\| \leqslant \frac{1}{c}$. On désignera par C l'enveloppe ultraconvexe fermée des $U_x\, b$, $x \in G$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 12, on peut trouver un sous-groupe ouvert normal H de G, tel que $\|U_h\, d - d\| < \varepsilon$ pour tout $h \in H$ et tout $d \in C$, et on peut supposer que $H \subset L$ (i. e. on peut supposer que les fonctions f et g sont invariantes par H). Choisissons un système de représentants (x_j) de G/H dans G, et posons $V_x = U_{x_i}$ si $x \in x_i\, H$; on a donc $\|V_x\, d - U_x\, d\| < \varepsilon$, pour tout $x \in G$ et tout $d \in C$ (on a supposé les U_x unitaires, etc.), et $V_x\, V_{x'} = V_{xx'}\, U_{h(x,x')}$ avec $h(x, x') \in H$. Par suite, si $d \in C$,

$$\left\|\int_G f \star g(x)\, U_x(d)\, dx - \int_G f \star g(x)\, V_x(d)\, dx\right\| \leqslant c\|f\| \, \|g\| \sup_x \|U_x(d) - V_x(d)\|$$

$$\leqslant c\|f\| \, \|g\| \varepsilon \leqslant \frac{1}{c}\, \varepsilon \quad .$$

Mais f et g étant invariantes par H, il en est de même de

$$f \star g(x) = \int_G f(xy)\, g(y^{-1})\, dy = \frac{1}{o(G/H)} \sum_j f(xx_j)\, g(x_j^{-1}) \quad ,$$

et

$$\int_G f \star g(x)\, V_x(d)\, dx = \frac{1}{o(G/H)} \sum_i (f \star g)(x_i)\, V_{x_i}(d)$$

$$= \frac{1}{o(G/H)^2} \sum_{i,j} f(x_i\, x_j)\, g(x_j^{-1})\, V_{x_i}(d) \quad .$$

$$\left\|\int_G f \star g(x)\, V_x(d)\, dx - \int_G f(x)\, V_x\, dx\left(\int_G g(x)\, V_x(d)\, dx\right)\right\|$$

$$= \Big\|\frac{1}{o(G/H)^2} \sum_{i,j} f(x_i\, x_j)\, g(x_j^{-1})\, V_{x_i}(d)$$

$$- \frac{1}{o(G/H)^2} \sum_{i,j} f(x_i\, x_j)\, g(x_j^{-1})\, V_{x_i x_j}\, V_{x_j^{-1}}(d)\Big\|$$

$$= \Big\|\frac{1}{o(G/H)^2} \Big[\sum_{i,j} f(x_i\, x_j)\, g(x_j^{-1})[V_{x_i}(d) - V_{x_i}\, U_{h(x_i x_j, x_j^{-1})}(d)]\Big]\Big\|$$

$$\leqslant c^2\|f\|\ \|g\| \sup_x \|U_x\| \sup_{h\in H} \|d - U_h\, d\| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Pour tout $d \in C$, on a

$$\left\|\int_G f(x)\, U_x(d)\, dx - \int_G f(x)\, V_x(d)\, dx\right\| \leqslant c\|f\| \sup \|U_x(d) - V_x(d)\| \leqslant \varepsilon \quad ,$$

et de même

$$\left\|\int_G g(x)\, U_x(d)\, dx - \int_G g(x)\, V_x(d)\, dx\right\| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Si $d \in C$, on a également $\int_G g(x)\, V_x(d)\, dx \in C$, d'après le lemme 11, et

$$\left\|\int_G f(x)\, U_x\, dx\left(\int_G g(x)\, U_x(d)\, dx\right) - \int_G f(x)\, V_x\, dx\left(\int_G g(x)\, V_x(d)\, dx\right)\right\|$$

$$= \Big\|\int_G f(x)(U_x - V_x)\, dx\left(\int_G g(x)\, U_x(d)\, dx\right)$$

$$+ \int_G f(x)\, V_x\, dx\left(\int_G g(x)(U_x(d) - V_x(d))\, dx\right)\Big\|$$

$$\leqslant \max\Big(c\|f\| \sup_y \left\|(U_y - V_y)\left(\int_G g(x)\, U_x(d)\, dx\right)\right\| \,,$$

$$c\|f\| \sup_y \|U_y\|\ c\|g\| \sup_x \|U_x(d) - V_x(d)\|\Big)$$

$$\leqslant \max(\varepsilon\ ,\ \varepsilon) = \varepsilon \quad .$$

Finalement, pour tout $d \in C$,

$$\|U_{f\star g}(d) - U_f(U_g(d))\| \leqslant \max\Big(\Big\|U_{f\star g}(d) - \int_G f \star g(x)\, V_x(d)\, dx\Big\| ,$$

$$\Big\|\int_G f \star g(x)\, V_x(d)\, dx - \Big(\int_G f(x)\, V_x\, dx\Big)\Big(\int_G g(x)\, V_x(d)\, dx\Big)\Big\|$$

$$\Big\|\int_G f(x)\, V_x\, dx\Big(\int_G g(x)\, V_x(d)\, dx\Big) - \Big(\int_G f(x)\, U_x\, dx\Big(\int_G g(x)\, U_x(d)\, dx\Big)\Big)\Big\|\Big)$$

$$\leqslant \max\Big(\frac{1}{c}\,\varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\Big) = \frac{1}{c}\,\varepsilon\ .$$

Mais ε est arbitraire.

Q. E. D.

Il est facile de déterminer la structure de l'algèbre de convolution $\underset{\sim}{C}(G , K)$. Introduisons d'abord la définition suivante.

DÉFINITION 5. - Soient E un espace de Banach p-adique, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces fermés de E . On dit que E est somme directe topologique de la famille des (E_i) , si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout $x \in E$, il existe une famille sommable, et une seule, $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E , telle que $x_i \in E_i$ pour tout i et $x = \sum x_i$;

(ii) L'application $x \longmapsto x_i$ est continue (et linéaire), quel que soit i .

Soit A une algèbre de Banach p-adique, et soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'idéaux bilatères fermés de A . On dit que A est composée directe des B_i , si l'espace A est somme directe des sous-espaces B_i . Il est immédiat que si $x_i \in B_i$ et $x_j \in B_j$, $i \neq j$, on a $x_i\, x_j = 0$. On en déduit que, si x et $y \in A$, et si $x = \sum x_i$ et $y = \sum y_j$ sont "les développements en série" de x et y , $xy = \sum x_i\, y_i$.

PROPOSITION 3. - Soit G un groupe compact totalement discontinu p-régulier. L'algèbre de convolution $\underset{\sim}{C}(G , K)$ est composée directe d'idéaux bilatères B_i . Pour tout i , B_i est une K-algèbre simple de dimension finie, et il existe au moins un sous-groupe ouvert normal H_i de G , tel que B_i ne comprenne que des fonctions invariantes par H_i .

(i) Pour tout sous-groupe normal ouvert H de G , $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$ est un idéal bilatère de $\underset{\sim}{C}(G , K)$.

Supposons par exemple que g soit invariante par H , et soit f une fonction continue sur G . On a, si $h \in H$,

$$f \star g(xh) = \int f(xhy)\, g(y^{-1})\, dy = \int f(x(hy))\, g((hy)^{-1} h)\, dy$$

$$= \int f(xy)\, g(y^{-1} h)\, dy = \int f(xy)\, g(y^{-1})\, dy = f \star g(x) \quad .$$

On montre de même que $g \star f$ est invariante par H .

(ii) Tout idéal bilatère de $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$ est un idéal bilatère de $\underset{\sim}{C}(G , K)$.

Soit d_H la fonction sur H , égale à 1 sur H , et nulle à l'extérieur de H . Cette fonction est continue, et elle est élément neutre pour le produit de convolution dans $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$. Si g appartient à un idéal bilatère I de $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$, et si $f , f' \in \underset{\sim}{C}(G , K)$, on a

$$f \star g = f \star (d_H \star g) = (f \star d_H) \star g \qquad (\text{resp. } g \star f' = g \star (d_H \star f')) \quad .$$

Comme $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$ est un idéal bilatère de $\underset{\sim}{C}(G , K)$, $f \star d_H$ (resp. $d_H \star f'$) appartient à $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$. Enfin, comme I est un idéal bilatère de $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$,

$$(f \star d_H) \star g = f \star g \qquad (\text{resp. } g \star (d_H \star f') = g \star f')$$

est un élément de I .

(iii) Soit $\underset{\sim}{D} = \bigcup_H \underset{\sim}{C}(G , K)^H$ l'algèbre de convolution des fonctions sur G qui sont invariantes par au moins un sous-groupe ouvert distingué de G . L'algèbre $\underset{\sim}{D}$ est composée directe (au sens algébrique) d'idéaux bilatères, qui sont des K-algèbres simples de dimension finie.

Considérons l'ensemble $(B_\ell)_{\ell \in L}$ des idéaux bilatères de $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{C}(G , K)$, qui sont des K-algèbres simples de dimension finie. Cet ensemble n'est pas vide : soit H un sous-groupe ouvert distingué propre de G ; l'idéal $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$, qui s'identifie à $\underset{\sim}{C}(G/H , K)$, est, puisque K est de caractéristique 0 , une K-algèbre semi-simple de dimension finie, et elle est composée directe d'idéaux bilatères simples. Si $\ell \neq \ell'$, le fait que B_ℓ et $B_{\ell'}$ soient simples entraîne que $B_\ell . B_{\ell'} = 0$. Comme pour tout sous-groupe ouvert distingué H de G , $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$ est composée directe de B_ℓ , et comme toute f de $\underset{\sim}{D}$ appartient à une $\underset{\sim}{C}(G , K)^H$, toute f de $\underset{\sim}{D}$ est somme d'éléments appartenant chacun à un B_ℓ ; comme $B_\ell . B_{\ell'} = 0$ si $\ell \neq \ell'$, une décomposition de f en éléments appartenant aux B_ℓ est unique.

(iv) Il existe une constante a telle que, pour tout ℓ et toute $f \in \underset{\sim}{D}$, on ait $\|f_\ell\| \leqslant a\|f\|$, si f_ℓ est la composante de f sur B_ℓ.

Si $f \in \underset{\sim}{D}$, il existe un sous-groupe ouvert distingué H de G, tel que $f \in \underset{\sim}{C}(G , K)^H$. La fonction f peut s'interpréter comme une fonction sur G/H. A tout idéal bilatère simple B_ℓ de $\underset{\sim}{C}(G/H , K)$, correspond un idempotent central e_ℓ de l'algèbre $\underset{\sim}{C}(G/H , K)$. Soit K' une extension de degré fini de K, qui est corps de décomposition de G/H. Chaque e_ℓ est somme d'idempotents centraux de $\underset{\sim}{C}(G/H , K')$,

$$e_\ell = e_\ell^{(1)} + \dots + e_\ell^{(n)} .$$

On a

$$\|e_\ell\| = \sup_x |e_\ell(x)| \leqslant \max_i \sup_x |e_\ell^{(i)}(x)| .$$

On connaît les idempotents centraux de $\underset{\sim}{C}(G/H , K')$: pour tout $e_\ell^{(i)}$, il existe un caractère $\chi_\ell^{(i)}$ de degré $r_\ell^{(i)}$ tel que, pour tout $x \in G/H$,

$$e_\ell^{(i)}(x) = r_\ell^{(i)} \chi_\ell^{(i)}(x)$$

(ce résultat se déduit des relations d'orthogonalité pour les caractères, cf. [5], chap. V, § 22, qui se transcrit aussitôt pour les représentations absolûment irréductibles d'un groupe fini sur un corps de caractéristique 0). Par suite

$$|e_\ell^{(i)}(x)| \leqslant |\chi_\ell^{(i)}(x)| .$$

Or $\chi_\ell^{(i)}(x)$ est une somme de racines de l'unité dans K' ; on a donc $|\chi_\ell^{(i)}(x)| \leqslant 1$ pour tout x, et on obtient finalement $\|e_\ell\| \leqslant 1$. Comme pour tout ℓ, on a $f_\ell = f \quad e_\ell$, il résulte du lemme 10 que $\|f_\ell\| \leqslant c\|f\|$, où c est la norme de la mesure de Haar sur G.

(v) Démonstration de la proposition : D'après le lemme 5, l'algèbre $\underset{\sim}{D}$ est partout dense dans $\underset{\sim}{C}(G , K)$. Toute $f \in \underset{\sim}{C}(G , K)$ est la limite d'une suite de Cauchy $f^{(i)}$ de $\underset{\sim}{D}$. Décomposons chaque $f^{(i)}$ sur les B_ℓ. Pour tout ℓ, tous i et j, on a, d'après (iv),

$$\|f_\ell^{(i)} - f_\ell^{(j)}\| \leqslant c\|f^{(i)} - f^{(j)}\| .$$

Pour tout ℓ, la suite en i, $(f_\ell^{(i)})$, est une suite de Cauchy ; elle est convergente, et on notera sa limite f_ℓ.

La limite f_ℓ ne dépend pas du choix de la suite de Cauchy $f^{(i)}$ convergeant vers f : il suffit de voir que si $f^{(i)}$ tend vers 0, on a $f_\ell = 0$; or $\|f_\ell^{(i)}\| \leqslant c\|f^{(i)}\|$.

La famille des f_ℓ est sommable : pour tout i , tout j , et tout sous-ensemble fini L' de l'ensemble L des idéaux B_ℓ , on a

$$\|\sum_{\ell\in L'} f_\ell^{(i)} - \sum_{\ell\in L'} f_\ell^{(j)}\| \leqslant \max_{\ell\in L'} \|f_\ell^{(i)} - f_\ell^{(j)}\| \leqslant c\|f^{(i)} - f^{(j)}\| \quad .$$

Passons à la limite sur j ; par prolongement, on obtient l'inégalité

$$\|\sum_{\ell\in L'} f_\ell^{(i)} - \sum_{\ell\in L'} f_\ell\| \leqslant c\|f^{(i)} - f\| \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un i tel que $\|f^{(i)} - f\| \leqslant \varepsilon$. Comme $f^{(i)} \in \underset{\sim}{D}$, il existe un sous-ensemble fini J de l'ensemble L des B_ℓ , tel que, si $L' \cap J$ est vide, $f_\ell = 0$ pour tout $\ell \in L'$. Pour un tel L' , on a $\|\sum_{\ell\in L'} f_\ell\| \leqslant c\varepsilon$. A tout $\varepsilon > 0$, on peut donc associer un ensemble fini J , tel que $J \cap L' = \emptyset$ entraîne $\|\sum_{\ell\in L'} f_\ell\| \leqslant c\varepsilon$. La famille des (f_ℓ) est donc sommable.

Reprenant l'inégalité

$$\|\sum_{\ell\in L'} f_\ell^{(i)} - \sum_{\ell\in L'} f_\ell\| \leqslant c\|f^{(i)} - f\| \quad ,$$

et passant à la limite sur L' , on trouve, puisque $f^{(i)} = \sum_{\ell\in L} f_\ell^{(i)}$, $f^{(i)}$ étant une fonction de $\underset{\sim}{D}$,

$$\|f^{(i)} - \sum_{\ell\in L} f_\ell\| \leqslant c\|f^{(i)} - f\| \quad .$$

En passant à la limite sur i , on en tire $f = \sum_{\ell\in L} f_\ell$.

Enfin l'inégalité $\|f_\ell\| \leqslant c\|f\|$, valable d'après (iv) pour les fonctions de $\underset{\sim}{D}$, se prolonge à la limite. Elle montre que, pour tout ℓ , l'application $f \longmapsto f_\ell$ est continue.

La démonstration de la proposition 3 est ainsi achevée.

Q. E. D.

PROPOSITION 4. - Toute représentation topologiquement irréductible d'un groupe compact totalement discontinu p-régulier, dans un espace de Banach p-adique, est de type I (i. e. est définie par une représentation irréductible d'un quotient fini du groupe). Toute représentation continue d'un groupe compact totalement discontinu p-régulier, dans un espace de Banach p-adique, est semi-simple (i. e. tout sous-espace fermé invariant possède un supplémentaire topologique qui est également invariant).

(i) Il existe une constante $d \geqslant 0$, ne dépendant que de l'espace E et de la représentation U de G dans E , telle que tout sous-espace fermé de E , invariant par l'action de G , soit l'image d'un projecteur p de norme $\leqslant d$ invariant par G (i. e. tel que $U_g\, p = pU_g$ pour tout $g \in G$).

D'après le corollaire de la proposition 1, il existe une constante $a \geqslant 0$, telle que tout sous-espace fermé de E soit l'image d'un projecteur de norme $\leqslant a$. Soit, en particulier, p un projecteur de norme $\leqslant a$, dont l'image est le sous-espace F considéré. Décomposons l'espace E sous la forme $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$. Par rapport à cette décomposition, on peut représenter U_g par une matrice

$$\begin{pmatrix} S_g & W_g \\ 0 & T_g \end{pmatrix} \quad ;$$

on a $S_g = pU_g\, p$, $W_g = pU_g(1-p)$, et $T_g = (1-p)\, U_g(1-p)$, d'où

$$\|S_g\| \leqslant a^2 \sup_g \|U_g\| \;, \qquad \|T_g\| \leqslant a^2 \sup_g \|U_g\| \;,$$

et

$$\|W_g\| \leqslant a^2 \sup_g \|U_g\| \;.$$

Comme $U_{gh} = U_g\, U_h$, on a

$$\begin{pmatrix} S_{gh} & W_{gh} \\ 0 & T_{gh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_g & W_g \\ 0 & T_g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_h & W_h \\ 0 & T_h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_g\, S_h & S_g\, W_h + W_g\, T_h \\ 0 & T_g\, T_h \end{pmatrix} \;,$$

et en particulier $W_{gh} = S_g\, W_h + W_g\, T_h$. Posons

$$M = \int_G W_h\, T_{h^{-1}}\, dh \;,$$

qui est une application de $\operatorname{Ker} p$ dans $\operatorname{Im} p$ dont la norme est, d'après la proposition 2, inférieure ou égale à

$$c \sup_g \|W_g\| \sup_g \|T_g\| \leqslant ca^4\Big(\sup_g \|U_g\|\Big)^2 \;.$$

On a

$$MT_g = \int W_h \, T_{h^{-1}g} \, dh = \int W_{g(g^{-1}h)} \, T_{(g^{-1}h)^{-1}} \, dh$$

$$= \int W_{gh} \, T_{h^{-1}} \, dh = \int (S_g \, W_h + W_g \, T_h) T_{h^{-1}} \, dh = S_g \, M + W_g \quad ,$$

d'où

(1) $$MT_g = S_g \, M + W_g \quad .$$

Soit q l'endomorphisme qui, dans la décomposition $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p$, est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\|q\| \leqslant \sup(1 \, , \, \|M\|) \leqslant \sup\left(1 \, , \, ca^4\left(\sup_g \|U_g\|\right)^2\right) \quad .$$

Cette dernière constante ne dépend que de l'espace E et de la représentation U ; on la notera d. Comme

$$q^2 = \begin{pmatrix} 1 & -M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = q \quad ,$$

q est un projecteur. Enfin

$$U_g \circ q = \begin{pmatrix} S_g & W_g \\ 0 & T_g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_g & -S_g M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_g & W_g - MT_g \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

d'après l'identité (1), d'où

$$U_g \circ q = \begin{pmatrix} 1 & -M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_g & W_g \\ 0 & T_g \end{pmatrix} = q \circ U_g \quad .$$

L'assertion (i) est démontrée.

(ii) Si U est une représentation continue de G dans E, et si $x \in E$ est $\neq 0$, il existe un idéal bilatère simple B de l'algèbre de convolution $\underset{\sim}{C}(G \, , \, K)$, tel que $U(b)x \neq 0$ pour un $b \in B$ au moins.

Il suffit de remarquer que la somme directe (algébrique) des idéaux bilatères simples de $\underset{\sim}{C}(G \, , \, K)$ est partout dense.

(iii) Si F est un sous-espace fermé de E invariant par G, il existe un projecteur $p \neq 0$ invariant par G (i. e. $U_g\, p = pU_g$ pour tout $g \in G$), de norme $\leqslant d$, dont l'image est l'espace d'une représentation topologiquement irréductible de G. Le sous-groupe normal H de G des h, tels que $U_h\, p = p$, est ouvert.

Soit $x \neq 0$ un élément de E. D'après (ii), il existe un idéal bilatère simple B de $\underline{C}(G, K)$, tel que $U(B)x \neq 0$. L'ensemble $U(B)x$ est un sous-espace de dimension finie de E, donc un B-module de dimension finie somme directe d'un nombre fini de B-modules simples. Mais B est un idéal bilatère de l'algèbre $\underline{C}(G/H, K)$ d'un quotient fini de G, et tout B-module simple peut aussi s'interpréter comme un (G/H)-module irréductible. Si l'on prend pour p un projecteur de norme $\leqslant d$, invariant par G (cf. (i)), dont l'image est un composant simple de $U(B)x$, on obtient un projecteur qui satisfait aux conditions de (iii).

La proposition est une conséquence immédiate des assertions (i) et (iii).

Q. E. D.

Avec la démonstration de la proposition 4, s'achève la démonstration du théorème (B).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[2] MONNA (A. F.) and SPRINGER (T. A.). - Intégration non archimédienne, Koninkl. nederl. Akad. Wetens., Proceedings, t. 66, 1963, p. 634-653, et Indagationes Mathematicae, t. 25, 1963, p. 634-653.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie galoisienne. - Berlin, Springer-Verlag, 1964 (Lecture Notes in Mathematics, 5).

[5] WEIL (André). - L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. 2e édition. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 869-1145 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 4).

(Texte reçu le 20 avril 1970)

François ARIBAUD
M. Conf. Fac. Sc. Paris
134 boulevard Brune
75 - PARIS 14