Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Martine Pathiaux

Répartition modulo 1 de la suite $\lambda\alpha^n$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 13, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 13, 6 p.

9 mars 1970

RÉPARTITION MODULO 1 DE LA SUITE $\lambda\alpha^n$

par Martine PATHIAUX

1. Introduction.

Soit S l'ensemble des nombres de Pisot, c'est-à-dire, l'ensemble des entiers algébriques > 1 dont tous les conjugués sont intérieurs au cercle unité.

Soit T l'ensemble de Salem, des entiers algébriques > 1 dont tous les conjugués sont intérieurs ou sur le cercle unité, l'un au moins étant sur le cercle unité.

Il existe des caractérisations (C. PISOT [1] et [2], SALEM [3]) des nombres de S et de $S \cup T$ à l'aide du reste modulo 1 des suites $\lambda\alpha^n = u_n + \varepsilon_n$, où $-\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, $u_n \in \underset{\sim}{Z}$.

THÉORÈME 1 (C. PISOT [1]). - Soit $\alpha > 1$; une condition nécessaire et suffisante pour que α appartienne à S est qu'il existe $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty \quad .$$

Le théorème 1 peut être amélioré en remplaçant la condition $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty$ par $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} n\varepsilon_n^2 = 0$.

THÉORÈME 2 (C. PISOT [2]). - Soit $\alpha > 1$; une condition nécessaire et suffisante pour que α appartienne à $S \cup T$ est qu'il existe $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, $\lambda > 1$, tel que

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{2e\alpha(\alpha + 1)(1 + \log \lambda)} , \qquad \forall\, n \geqslant 0 \quad .$$

La démonstration du théorème 1 utilise les déterminants de Kronecker D_0^s , et celle du théorème 2 le principe des tiroirs.

D'autre part, la méthode utilisée dans le théorème 1 permet de conclure dans le cas où $\varepsilon_n = o(n^{1/2})$.

THÉORÈME 1'. - Soit $\alpha > 1$; une condition suffisante pour que α appartienne à S est qu'il existe $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, tel que

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{(1 + n)^{1/2}\, 2\alpha(\alpha + 1)} , \qquad \forall\, n \in \underset{\sim}{N} \quad .$$

On se propose de redémontrer les théorèmes 1, 2, 1' par une autre méthode, et de donner une généralisation du théorème 2.

THÉORÈME 3. - Soient $\alpha > 1$ et $0 \leqslant q < \frac{1}{2}$; une condition suffisante pour que α appartienne à S est qu'il existe $\lambda \leqslant \lambda_0$, tel que

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{\psi(q)}{(1+n)^q} , \qquad \text{avec} \quad \psi(q) = \frac{1}{2e^{1-q}\,\alpha(\alpha+1)(1+(\log\lambda+1)/(1-q))^{1-q}} .$$

Le principe consiste à généraliser celui du théorème 2 en utilisant t équations au lieu d'une seule.

Une valeur approchée de λ_0 est 18,6 .

2. Lemmes.

LEMME 1. - Soient $r+1$ formes linéaires indépendantes, à coefficients entiers rationnels, et à $s+1$ variables, avec $r+1 \leqslant s$,

$$y_i = \sum_{j=0}^{s} a_j\, v_{j,i} , \qquad 0 \leqslant i \leqslant r \quad ;$$

il existe une solution $(a_0 , \ldots , a_s)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{s+1}$, vérifiant

$$y_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{s} |a_i| \leqslant (r+2)(s-r)D^{1/(s-r)} ,$$

où D est un majorant des déterminants d'ordre $r+1$.

Démonstration. - Supposons par exemple que le déterminant d'ordre $r+1$ de valeur absolue maximum soit

$$D(V_0 , \ldots , V_r) = \begin{vmatrix} v_{0,0} & \cdots & v_{0,r} \\ v_{0,r} & \cdots & v_{r,r} \end{vmatrix} , \qquad \text{où} \quad V_j = \begin{vmatrix} v_{j,0} \\ \vdots \\ v_{j,r} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D = |D(V_0 , \ldots , V_r)| ,$$

et résolvons le système d'inégalités

$$\text{(I)} \quad \left\{ |y_i| < 1 , \quad i \in \{0 , \ldots , r\} \right. .$$

Complétons le système (I) par $s-r$ inéquations.

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} |y_i| < 1 , & i \in \{0 , \ldots , r\} , \\ |a_j| \leqslant A , & r+1 \leqslant j \leqslant s . \end{cases}$$

Le théorème de Minkowski permet d'affirmer que si $D \geqslant A^{s-r}$, le système (II) admet une solution $(a_0 , \dots , a_s)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{s+1}$. Posons $A = D^{1/(s-r)}$; alors $|a_j| \leqslant D^{1/(s-r)}$ pour $j \in \{r + 1 , \dots , s\}$. Mais

$$a_0 v_{0,0} + \dots + a_r v_{r,0} = -(a_{r+1} v_{r+1,0} + \dots + a_s v_{s,0}) ,$$

$$\dots$$

$$a_0 v_{r,0} + \dots + a_r v_{r,r} = -(a_{r+1} v_{r+1,r} + \dots + a_s v_{s,r}) ,$$

soit

$$|a_i| = \left|\sum_{j=r+1}^{s} a_j \frac{D(V_0 , \dots , V_{i-1} , V_j , V_{i+1} , \dots , V_r)}{D}\right| ,$$

ou encore

$$|a_i| \leqslant (s - r)D^{1/(s-r)} , \qquad \text{pour } i \in \{0 , \dots , r\} ,$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{s} |a_i| \leqslant (r + 2)(s - r)D^{1/(s-r)} .$$

LEMME 2. - Soit le système (I) :

$$(\mathrm{I}) \quad \{y_i = a_0 u_i + \dots + a_s u_{s+i} = 0 , \quad i \in \{0 , \dots , t\} ,$$

avec $t \leqslant s - 1$ et $u_i = \lambda\alpha^i - \varepsilon_i$.

Si le système est de rang $r + 1$ où $r \leqslant t$, il existe une solution de (I) appartenant à $\mathbb{Z}^{s+1}$, telle que

$$\sum_{i=0}^{s} |a_i| \leqslant (r + 2)(s - r)[(s + 1) \alpha^{2s}(\lambda + 1)^2 (1 + \alpha)^{2r} A_{s,r}]^{1/2(s-r)} ,$$

où

$$A_{s,r} = \sup_{\mu} \prod_{i=1}^{i=r} \rho_{\mu(i),s,r} ,$$

$\mu(i)$ désignant une suite de r entiers distincts compris entre 1 et t , et

$$\rho_{j,s,r} = \sup_{\nu} \sum_{i=1}^{r} \varepsilon^2_{\nu(i)} ,$$

$\nu(i)$ désignant une suite de $r + 1$ entiers distincts compris entre $j - 1$ et $j + s$.

Démonstration. - Le système est de rang $r + 1$, il est alors équivalent à

$$(\mathrm{II})\begin{cases} y_0 = 0 , \\ y_{\mu(1)} = 0 , \qquad \text{avec} \quad 1 \leqslant \mu(1) < \mu(2) < \dots < \mu(r) \leqslant t , \\ \dots \\ y_{\mu(r)} = 0 . \end{cases}$$

Les déterminants d'ordre $r + 1$ extraits du système (II) sont alors identiques à ceux d'ordre $r + 1$ extraits du système (III),

$$(\mathrm{III})\begin{cases} z_0 = 0 , \quad z_0 = y_0 , \\ z_i = \sum_{j=0}^{s} a_j \, \eta_{j,i} , \end{cases}$$

avec

$$\eta_{j,i} = u_{\mu(i)+j} - \alpha u_{\mu(i)+j-1} ,$$

ou encore

$$\eta_{j,i} = \alpha\varepsilon_{\mu(i)+j-1} - \varepsilon_{\mu(i)+j} .$$

En appliquant la majoration de Hadamard relative aux déterminants, on obtient

$$|D|^2 \leqslant (r + 1) \, \alpha^{2s}(\lambda + 1)^2 \, (1 + \alpha)^{2r} \, A_{s,r} ,$$

et le résultat du lemme s'obtient à l'aide du lemme 1.

En utilisant les notations du lemme 2, on a la condition suivante.

LEMME 3. - <u>Pour que la relation</u> $a_0 u_n + \dots + a_s u_{n+s} = 0$ <u>soit vraie quel que soit</u> $n \in \underset{\sim}{N}$, <u>il suffit que</u>, $\forall\, n \geqslant t$,

(A) $\quad (1 + \alpha)^{2s} \, \alpha^{2s}(\lambda + 1)^2 \, (r + 2)^{2(s-r)} \, (s - r)^{2(s-r)} \, (r + 1) \, \sigma_n^{2(s-r)} \, A_{s,r} < 1$,

<u>en posant</u>

$$\sigma_n = \sup_{n \leqslant i \leqslant n+s+1} |\varepsilon_i| .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit que

$$|a_0(\varepsilon_n - \alpha\varepsilon_{n-1}) + \dots + a_s(\varepsilon_{n+s} - \alpha\varepsilon_{n+s-1})| < 1 , \qquad \text{pour} \quad n \geqslant t + 1 ,$$

soit

$$\sum_{i=0}^{s} |a_i|(1 + \alpha)\sigma_n < 1 , \qquad \text{pour} \quad n \geqslant t ,$$

et en appliquant le lemme 2, on obtient la condition (A).

3. Remarques.

(a) Si $r = t = s - 1$, en utilisant l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, on a

$$A_{s,r} \leqslant S_{2(s-1)}^{s-1} \, 2^{s-1} \,, \qquad \text{où} \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 (i+1) \quad .$$

(b) Si $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon'_n$, avec ε'_n décroissant avec n , alors

$$A_{s,r} \leqslant S'^{\,r}_{2r} \, 2^r \quad .$$

En particulier, si $\varepsilon'_n = \dfrac{\psi}{(n+1)^q}$ et $0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$S'_n \leqslant 2\psi^2 (n+1)^{1-2q} \quad ,$$

et la condition (A) devient :

$$(A') \quad \frac{\psi^{2s}(1+\alpha)^{2s} \alpha^{2s} (\lambda+1)^2 \, (r+2)^{2(s-r)} \, (s-r)^{2(s-r)} \, (r+1)^{r(1-2q)+1} \, 2^{(3-2q)r}}{(t+1)^{2q(s-r)}} < 1 \ ,$$

ou encore

$$(A'') \quad \frac{(1+\alpha)^{2s} \, \alpha^{2s} \, \psi^{2s} (\lambda+1)^2 \, (r+2)^{2(s-r)} \, (s-r)^{2(s-r)} \, 2^{(3-2q)r} \, (r+1) \, s^r}{(t+1)^{2qs}} < 1 \ .$$

(c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ n'est pas une fraction rationnelle, quel que soit r_0 , il existe $r \geqslant r_0$ tel que $D_0^r \neq 0$. Soit $s = r + 1$, alors le rang du système (I) est $s - 1$. Donc quel que soit s_0 , il existe $s \geqslant s_0$ tel que $s - r = 1$.

4. Applications.

1° Si $\lim S_n = 0$, en utilisant les remarques 3 (a) et 3 (c), on retrouve le théorème 1'.

2° Si $q = \frac{1}{2}$, en utilisant les remarques 3 (b) et 3 (a) et le lemme 3, on obtient la condition :

$$\exists\, s \ , \text{ tel que } \ s - r = 1 \ \text{ et } \ \psi(1+\alpha)\, \alpha(\lambda+1)^{1/s} \, (s+1)^{1/s} \, 2 < 1 \ ;$$

et la remarque 3 (c) permet de retrouver le théorème 1'.

3° Si $q = 0$: Dans la condition (A"), t n'intervient pas. On choisit donc t de façon que r prenne le moins de valeur possible, soit $t = 0$, $r = 0$, et on obtient la condition suivante,

$$\psi(1+\alpha)\ \alpha(\lambda+1)^{1/s}\ 2s < 1 \quad ,$$

et on retrouve ainsi le théorème 2.

4° $0 < q < \frac{1}{2}$: Dans la condition (A"), les termes dépendants de r ,

$$f(s\ ,\ r) = 2^{(3-2q)r}\ (s-r)^{2(s-r)}\ s^{r}.(r+1).(r+2)^{2(s-r)}$$

est une fonction décroissante de r , si $s < 7$. En prenant $t = s - 1$, on obtient alors

$$\psi(1+\alpha)\ \alpha(\lambda+1)^{1/s}\ 2s^{1-q} < 1 \quad .$$

On détermine s de façon que ψ soit maximum, soit $s = \left[\frac{\log \lambda + 1}{1-q}\right] + 1$, et on obtient

$$\psi \leqslant \frac{1}{2e^{1-q}\ \alpha(\alpha+1)(1+(\log \lambda + 1)/(1-q))^{1-q}} \quad .$$

La condition sur $s < 7$ entraîne la restriction $\lambda \leqslant \lambda_0$ avec $\lambda_0 \simeq 18{,}6$. D'où le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math., Paris, 1938).

[2] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. math. Helvet., t. 19, 1946/47, p. 153-160.

[3] SALEM (Raphaël). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, D. C. Heath and Company, 1963 (Heath mathematical Monographs).

(Texte reçu le 8 juillet 1970)

Martine PATHIAUX
87 rue de Paris
78 - SAINT-RÉMY-les-Chevreuses