Marie-Claude Sarmant

Fonctions automorphes dans un corps valué non archimédien

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 11, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 11, 8 p.

23 février 1970

FONCTIONS AUTOMORPHES DANS UN CORPS VALUÉ NON ARCHIMÉDIEN

par Marie-Claude SARMANT

1. Rappels.

Soit K un corps, et soit φ une homographie non singulière de K. On appelle fonction automorphe, d'automorphisme φ sur K, une fonction f définie sur un sous-ensemble D de K, et à valeurs dans K, telle que

$$f[\varphi(x)] = f(x) , \qquad \forall\, x \in D .$$

Nous supposerons ici que K est un corps ultramétrique valué complet et algébriquement clos.

Supposons que $\varphi(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Même si a, b, c, d sont tous différents de zéro, on peut se ramener à un cas plus simple pour étudier $f(x)$: on peut supposer que seul a est non nul. En effet, soient u et v les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On peut écrire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = AUA^{-1} , \qquad \text{où } U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} .$$

Soit X la matrice $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$; on peut noter $\varphi(X) = AUA^{-1} X$ et $f[AUA^{-1} X] = f(X)$. Posons $A^{-1} X = Y$: $f[AUY] = f(AY)$. Si nous appelons F l'opérateur $f \circ A$: $F[UY] = F[Y]$. Soit, comme $UY = \frac{u}{v} y$: $F\left(\frac{u}{v} y\right) = F(y)$.

Au lieu d'étudier la fonction $f(x)$, on peut donc étudier la fonction $F(y)$.

Nous étudierons donc le cas où $\varphi(x) = \lambda x$ avec $|\lambda| > 1$ (le cas $|\lambda| < 1$ est le même, et le cas $|\lambda| = 1$ est plus difficile).

Rappelons qu'on appelle fonction méromorphe, dans un domaine D, une fonction holomorphe en tout point de D, sauf en des points isolés qui sont supposés être des pôles.

Une fonction automorphe d'automorphisme λx admet deux points singuliers particuliers : 0 et ∞ (ce sont les transformés des points singuliers de l'homographie $\dfrac{ax + b}{cx + d}$).

Nous nous placerons dans le cas où f est une fonction méromorphe dans tout le corps K , privé seulement de 0 et ∞ (K^*) , et où $f(\lambda x) = f(x)$ si $f(x)$ existe, avec $|\lambda| > 1$; nous appellerons alors f "fonction automorphe".

2. Construction de fonctions automorphes.

Il faut rappeler que :

1° Si f est une série de Laurent convergente sur K^* , et non constante, $\frac{1}{f}$ est une fonction méromorphe sur K^* .

2° Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'éléments de K , telle que $\lim\limits_{n\to\pm\infty} a_n = 1$, alors $\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ existe.

3° Si $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de fonctions méromorphes sur un domaine D , et telles que $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f_n(x) = 1$ uniformément sur D , alors $\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)$ est une fonction méromorphe sur D .

Conséquence : Soient f et g deux séries de Laurent (dans un sens non restrictif : ce peut être des séries de Taylor ou des polynômes) convergentes sur K^* . Leur quotient est une fonction méromorphe sur K^* .

Supposons que $\dfrac{f(\lambda^n x)}{g(\lambda^n x)} \to 1$ uniformément en x si $n \to \pm\infty$. Considérons alors les suites de fonctions $\{g(\lambda^n x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\{f(\lambda^n x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Dans K^* , la suite $\{\frac{f}{g}(\lambda^n x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de fonctions méromorphes. Comme $\frac{f}{g}(\lambda^n x) \to 1$ uniformément en x si $n \to \pm\infty$, alors $\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f}{g}(\lambda^n x)$ est une fonction méromorphe sur K^* . Cette fonction est évidemment automorphe.

Nous pouvons donc construire des fonctions automorphes. Réciproquement, nous allons montrer que toutes les fonctions automorphes qui vérifient certaines conditions peuvent être mises sous cette forme.

Si $f(\lambda x) = f(x)$, f est connue par ses valeurs dans une couronne : $r \leqslant |x| < |\lambda| r$, où r est un réel quelconque. On pourra classer les fonctions automorphes d'après leur nombre de zéros et de pôles dans une telle couronne.

3. Cas d'une fonction automorphe ayant un nombre fini de zéros et de pôles dans une couronne $r \leqslant |x| < |\lambda| r$.

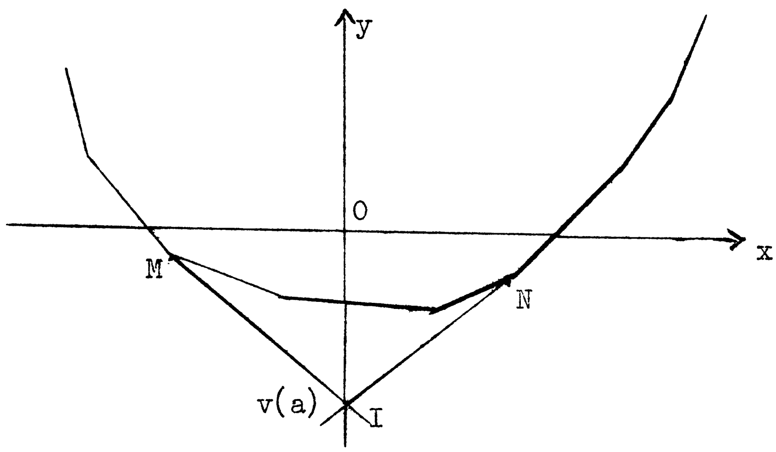
Les fonctions étudiées sont méromorphes sur K^* . Nous allons voir dans quels cas elles ne peuvent pas être automorphes, afin de faire des raisonnements par l'absurde dans le cas où elles le seraient.

LEMME 1. - <u>La somme d'une série de Laurent convergente partout sur K^* ne peut pas être une fonction automorphe.</u>

Soit $f(x)$ une série de Laurent convergente sur K^* : elle y admet une infinité de zéros, et son polygone de Newton a une infinité de côtés dont la pente tend vers $\pm\infty$ avec l'indice.

Supposons f automorphe d'automorphisme λx.

La fonction $f(x) - a$, où a est une constante quelconque appartenant à K^*, est aussi une fonction automorphe d'automorphisme λx. Son polygone de Newton est déduit du précédent par adjonction du point $I\ (0\ ,\ v(a))$. Prenons a tel que I soit au-dessous du polygone de f. Le polygone de $f - a$ sera formé des mêmes côtés que celui de f, moins un certain nombre qui seront remplacés par des côtés IM et IN issus de I :



Si le polygone de Newton de f possède un côté AB de pente α, il doit aussi avoir des côtés de pente $\alpha + n \log_p|\lambda|_p$, ceci quel que soit $n \in \underset{\sim}{Z}$, puisque f a des zéros de module $|\lambda|^n p^\alpha$. Il en est de même pour $f(x) - a$: son polygone devra contenir des côtés de pentes :

$$\left.\begin{array}{l}\text{pente de } IM + n \log_p|\lambda|_p\ ,\\ \text{pente de } IN + n \log_p|\lambda|_p\end{array}\right. \qquad \forall\ n \in \underset{\sim}{Z}_p\ .$$

Il est possible de prendre I de manière que ce ne soit pas vrai : $f(x) - a$ ne sera pas automorphe, donc $f(x)$ non plus.

Une fonction automorphe non constante méromorphe sur K^* devra donc avoir au moins un pôle sur K^*, sinon elle serait développable en série de Laurent sur K^*, donc constante, et au moins un zéro, sinon son inverse serait constante. Elle aura donc une infinité de zéros et de pôles (en particulier tous les produits de l'un d'eux par une puissance entière de λ).

LEMME 2. - Si une fonction automorphe admet un seul pôle et un seul zéro dans la couronne $r \leq |x| < |\lambda| r$, c'est une constante.

Soit f la fonction étudiée. Supposons-la munie d'un seul pôle simple a, et d'un seul zéro simple b, dans la couronne considérée : l'ensemble des pôles de f est donc $\{\lambda^n a\}_{n\in\mathbb{Z}}$, et l'ensemble de ses zéros est $\{\lambda^n b\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Etudions la fonction suivante, qui a mêmes pôles et mêmes zéros que f :

$$g(x) = \frac{\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{x}{\lambda^n b}\right) \prod_{n<0}\left(1 - \frac{\lambda^n b}{x}\right)}{\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{x}{\lambda^n a}\right) \prod_{n<0}\left(1 - \frac{\lambda^n a}{x}\right)} ;$$

$g(x)$ est méromorphe sur K^*. Ce n'est pas une fonction automorphe :

$$g(\lambda x) = \frac{\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{\lambda x}{\lambda^n b}\right) \prod_{n<0}\left(1 - \frac{\lambda^n b}{\lambda x}\right)}{\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{\lambda x}{\lambda^n a}\right) \prod_{n<0}\left(1 - \frac{\lambda^n a}{\lambda x}\right)}$$

$$= \frac{\left[\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{x}{\lambda^n b}\right)\right]\left[1 - \frac{\lambda x}{b}\right]\left[\prod_{n<0}\left(1 - \frac{\lambda^n b}{x}\right)\right]\left[1/\left(1 - \frac{b}{\lambda x}\right)\right]}{\left[\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{x}{\lambda^n a}\right)\right]\left[1 - \frac{\lambda x}{a}\right]\left[\prod_{n<0}\left(1 - \frac{\lambda^n a}{x}\right)\right]\left[1/\left(1 - \frac{a}{\lambda x}\right)\right]} ,$$

$$g(\lambda x) = \frac{\left(1 - \frac{\lambda x}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{\lambda x}\right)}{\left(1 - \frac{b}{\lambda x}\right)\left(1 - \frac{\lambda x}{a}\right)} g(x) .$$

Et $\left(1 - \frac{\lambda x}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{\lambda x}\right) \equiv \left(1 - \frac{b}{\lambda x}\right)\left(1 - \frac{\lambda x}{a}\right)$ exige $a = b$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ est une fonction méromorphe sans pôle sur K^* : c'est donc une série de Laurent ; elle n'a pas non plus de zéros sur K^* : c'est donc une constante k :

$$f(x) = kg(x) .$$

Ceci exige que $g(x)$ soit une fonction automorphe. Nous avons vu que ce n'est possible que si $a = b$, donc si $g(x) = 1$. Alors $f(x) = k$.

(Si le pôle et le zéro de f sont multiples, on peut faire exactement le même raisonnement en modifiant la fonction g.)

LEMME 3. - <u>Soit</u> $f(x)$ <u>une fonction automorphe. Supposons que</u> f <u>ait, dans la couronne</u> $r \leqslant |x| < |\lambda| r$, <u>un nombre fini</u> n <u>de pôles, et un nombre fini</u> m <u>de zéros. Alors</u> $n = m$, <u>et le produit des pôles est égal au produit des zéros.</u>

Supposons par exemple $m < n$. Nous allons essayer de construire une fonction automorphe $\mathcal{G}$ ayant n pôles et n zéros, et telle que $f(x) = k\mathcal{G}(x)$.

Soient $c_{m+1}, \ldots, c_n$ des éléments de K , tels que

$$a_1 \times \ldots \times a_m \times c_{m+1} \times \ldots \times c_n = b_1 \times \ldots \times b_n .$$

Posons

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \prod_{i=m+1}^{n} \left(1 - \frac{x}{c_i}\right) ,$$

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{b_i}\right) .$$

Alors la fonction $\mathcal{G}(x) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{g(\lambda^n x)}{h(\lambda^n x)}$ est une fonction automorphe possédant les mêmes pôles que f .

$\frac{\mathcal{G}(x)}{f(x)}$ est une fonction automorphe sans pôles sur K^* : c'est une constante k : $f(x) = \frac{1}{k} \mathcal{G}(x)$; $f(x)$ doit donc avoir les mêmes zéros et les mêmes pôles que $\mathcal{G}$, donc n zéros, ce qui contredit l'hypothèse $m < n$.

Donc $m = n$. Soit c_n tel que $a_1, \ldots, a_{n-1} c_n = b_1, \ldots, b_n$.

Posons

$$g(x) = \left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)\right] \left(1 - \frac{x}{c_n}\right) ,$$

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{b_i}\right) .$$

Alors $\mathcal{G}(x) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{g(\lambda^n x)}{h(\lambda^n x)}$ est une fonction automorphe.

$\frac{\mathcal{G}(x)}{f(x)}$ est une fonction automorphe qui a, sur la couronne $r \leqslant |x| < |\lambda| r$, un seul pôle a_n et un seul zéro c_n . C'est impossible sauf si $a_n = c_n$, et alors $\frac{\mathcal{G}(x)}{f(x)}$ est une constante : $\prod_1^n a_i = \prod_1^n b_i$.

D'autre part, la construction de $\mathcal{G}(x)$ entraîne le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit $f(x)$ une fonction automorphe. Alors si elle est pourvue, dans une couronne $r \leq |x| < |\lambda| r$ (r réel quelconque), d'un nombre fini de pôles et de zéros, il existe deux polynômes g et h de même degré, et une constante k, tels que

$$f(x) = k \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{g(\lambda^n x)}{h(\lambda^n x)} .$$

Propriétés de ces fonctions.

THÉORÈME 1 bis. - L'ensemble des fonctions automorphes méromorphes sur K^* est un corps.

Les propriétés de la multiplication sont évidentes. Les propriétés de l'addition sont facilement obtenues, à condition de montrer que cette opération est interne. Pour cela, il suffit de montrer que la somme de deux des fonctions envisagées a bien, comme elles, un nombre fini de zéros et de pôles dans une couronne $r \leq |x| < |\lambda| r$; et alors, d'après le théorème 1, le résultat est obtenu.

Soient donc

$$\mathcal{G}(x) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{g(\lambda^n x)}{g'(\lambda^n x)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}(x) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{h(\lambda^n x)}{h'(\lambda^n x)}$$

deux telles fonctions automorphes.

Nous voulons que l'équation suivante ait un nombre fini de zéros dans l'anneau $r \leq |x| < |\lambda| r$,

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{g(\lambda^n x)}{g'(\lambda^n x)} + \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{h(\lambda^n x)}{h'(\lambda^n x)} = 0 ,$$

soit

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{gh'}{g'h} (\lambda^n x) + 1 = 0 .$$

Il suffit de démontrer le lemme suivant.

LEMME 4. - Si ℓ et ℓ' sont deux polynômes en x tels que $\frac{\ell}{\ell'} (\lambda^n x) \to 1$ si $n \to \pm \infty$, alors l'équation

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\ell}{\ell'} (\lambda^n x) + 1 = 0$$

a un nombre fini de solutions dans tout anneau $r \leq |x| < |\lambda| r$.

Posons

$$\ell(x) = 1 + \ell_1 x + \ldots + \ell_\eta x^\eta ,$$

$$\ell'(x) = 1 + \ell'_1 x + \ldots + \ell_\eta x^\eta ,$$

($\ell_\eta = \ell'_\eta$, puisque $\frac{\ell}{\ell'}(x) \rightarrow 1$ si $|x| \rightarrow +\infty$).

Toutes les solutions de l'équation se déduisent de celles qui sont dans une couronne $r \leqslant |x| < |\lambda| r$ par multiplication par une puissance de λ . Cherchons donc les solutions qui se trouvent dans la couronne telle que r soit la plus petite des pentes des polygones de Newton de ℓ et ℓ' .

La fonction $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\ell}{\ell'}(\lambda^n x)$ est localement développable en série de Taylor.

Dans l'intervalle $r \leqslant |x| < |\lambda| r$, l'ensemble des polynômes $\ell'(\lambda^n x)$ admet un nombre fini de zéros, et l'ensemble des polynômes $\ell(\lambda^n x)$ aussi. L'ensemble des polygones de Newton des séries de Taylor qui représentent $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\ell}{\ell'}(\lambda^n x)$ dans cet intervalle a donc un nombre fini de côtés finis, les côtés infinis ne correspondant pas à des zéros de la série. L'ensemble des polygones de Newton des séries qui représentent $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\ell}{\ell'}(\lambda^n x) + 1$ a donc lui aussi un nombre fini de côtés finis, les autres ne correspondant pas à des zéros. L'équation considérée a donc un nombre fini de solutions.

On peut en déduire l'analogue d'un théorème sur les fonctions automorphes dans $\mathbb{C}$.

THÉORÈME 2. - Soient $\mathcal{G}(x) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{g}{g'}(\lambda^n x)$ et $\mathcal{H}(x) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{h}{h'}(\lambda^n x)$ deux fonctions automorphes, de même automorphie λx . $\mathcal{G}(x)$ et $\mathcal{H}(x)$ sont liées par une relation algébrique.

Cherchons des suites d'indices m_k et n_k et des constantes A_{m_k, n_k} telles que

$$\varphi(x) = \sum_{m_k=0}^{M} \sum_{n_k=0}^{N} A_{m_k, n_k} [\mathcal{G}(x)]^{m_k} [\mathcal{H}(x)]^{n_k} = \text{constante} .$$

Soit ω un pôle d'ordre α de $\mathcal{G}$: ce sera un pôle d'ordre $M\alpha$ de cette fonction. Nous voulons supprimer ce pôle dans cette fonction ; pour cela, nous prenons

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} A_{m_k, n_k} [\mathcal{G}(x)(x - \omega)^\alpha]_{x=\omega}^{m_k} [\mathcal{H}(\omega)]^{n_k} = 0 .$$

On fait de même pour chaque pôle de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, et on obtient un nombre fini de relations linéaires en A_{m_k, n_k} , qui ont toujours des solutions, pourvu que M et

N soient assez grands.

Les constantes A étant ainsi choisies, nous aurons pour $\omega(x)$ une fonction automorphe sans pôles dans l'anneau $r \leqslant |x| < |\lambda| r$, donc sans pôle nulle part, ce qui exige que ce soit une constante.

(Texte reçu le 20 avril 1970)

Mme Marie-Claude SARMANT
M. Ass. Fac. Sc. Paris
3 square de Port-Royal
75 - PARIS 13