Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Friederich I. Mautner

Fonctions sphériques et opérateurs de Hecke

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 10, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 11e année, 1969/70, n° 10, 17 p.

2 et 9 février 1970

FONCTIONS SPHÉRIQUES ET OPÉRATEURS DE HECKE [1]

par Friederich I. MAUTNER

§ 1. - Soient $\underset{\sim}{G}$ un groupe topologique localement compact, et G un sous-groupe fermé. Supposons que sur l'espace homogène $G \setminus \underset{\sim}{G}$, il existe une mesure invariante, et considérons l'espace $L^2(G \setminus \underset{\sim}{G})$ des fonctions à valeurs complexes et à carré intégrable relatif à cette mesure. Soit $\mathrm{end}_{\underset{\sim}{G}}(L^2)$ l'algèbre de toutes les transformations continues linéaires T de cet L^2 qui commutent, avec multiplications à droite R_g par les éléments g de $\underset{\sim}{G}$. Si l'espace $G \setminus \underset{\sim}{G}$ est une variété réelle, ou p-adique, telle que la théorie des distributions de L. SCHWARTZ (ou sa généralisation par F. BRUHAT) est valable, on sait que T est donné par une distribution $t \in \mathcal{D}'(G \setminus \underset{\sim}{G})$ qui est invariante par multiplications à droite par les éléments du sous-groupe G.

Si le sous-groupe G est compact, nous écrivons $\underset{\sim}{K}$ au lieu de G, et nous observons que nos distributions t sont bi-invariantes par $\underset{\sim}{K}$; donc nous avons des distributions (qui ne sont pas des fonctions en général) sphériques qui forment l'algèbre $\mathrm{end}_{\underset{\sim}{G}} L^2(\underset{\sim}{K} \setminus \underset{\sim}{G})$.

Si le sous-groupe est discret, nous écrivons Γ. Supposons qu'il existe une double classe $\Gamma g \Gamma$ dans $\underset{\sim}{G}$, qui est réunion <u>finie</u> des classes Γg_j :

$$(1.1) \qquad \Gamma g \Gamma = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma g_j \ , \qquad \text{avec} \quad h < \infty \ .$$

Soient $\delta_{\Gamma g_j}$ la mesure de Dirac du point Γg_j de l'espace homogène $\Gamma \setminus \underset{\sim}{G}$, et t la somme finie

$$(1.2) \qquad t = \sum_{j=1}^{h} \delta_{\Gamma g_j} \ .$$

Evidemment t est une distribution (mesure) sur $\Gamma \setminus \underset{\sim}{G}$, invariante à droite par les éléments γ de Γ : $R_\gamma t = t$.

<u>Exemple</u> : Soient Ω un corps de caractéristique zéro, $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{G}_\Omega$ le groupe projectif $GP(N , \Omega)$, et $\Gamma = GP(N , \underset{\sim}{Z})$ le groupe modulaire. Considérons, sur l'espace

---

[1] Voir [2].

homogène $\Gamma \setminus \underset{\sim}{G}$, la distribution t suivante : Dans le groupe $GL(N\ ,\ \Omega)$, nous prenons l'ensemble de toutes les matrices avec coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ et déterminante $n > 0$ fixe. Son image naturelle (mod scalaires) dans le groupe projectif $GP(N\ ,\ \Omega)$ est évidemment un ensemble bi-invariant par le groupe modulaire Γ , et c'est une réunion finie des classes Γg_j . Soit t_n la distribution (1.2) correspondante.

Donc nous obtenons, pour chaque entier positif n , une transformation linéaire T_n , définie par

$$(1.3) \qquad (T_n\, f)(g) = (t_n \star f)(g) = \sum_{j=1}^{h} f(g_j^{-1}\, g) \quad ;$$

comme valeurs de f , on peut prendre ici un semi-groupe arbitraire commutatif (additif). Ce sont les opérateurs de Hecke T_n , considérés déjà (implicitement) par KRONECKER et (explicitement) par HURWITZ comme correspondances algébriques. Remarquons que, dans notre définition (1.3) de T_n , le corps Ω (de caractéristique zéro) est essentiellement arbitraire ; en particulier, T_n est déjà défini sur le corps $\underset{\sim}{Q}$ des nombres rationnels, comme transformation linéaire sur l'espace homogène $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}}$. Remarquons aussi que la définition (1.3) est facilement adaptée aux autres groupes classiques.

§ $\underset{\sim}{2}$. - Jusque récemment, T_n était considéré surtout comme transformation linéaire de l'espace de Hilbert $L^2(\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{R}})$. Mais dans ce cas, les opérateurs de Hecke T_n n'engendrent pas l'algèbre de tous les $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{R}}$-endomorphismes de L^2 . Cette algèbre est non commutative déjà dans le cas $L^2(SL(2\ ,\ \underset{\sim}{Z}) \setminus SL(2\ ,\ \underset{\sim}{R}))$, parce que la série discrète des représentations unitaires irréductibles de $SL(2\ ,\ \underset{\sim}{R})$ [BARGMANN] se trouve dans la décomposition de cet espace de Hilbert avec une multiplicité > 1 en général, cette multiplicité étant égale à la dimension$_{\underset{\sim}{C}}$ de l'espace des formes modulaires holomorphes paraboliques.

Les $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{R}}$-endomorphismes de cet espace $L^2(SL(2\ ,\ \underset{\sim}{Z}) \setminus SL(2\ ,\ \underset{\sim}{R}))$, qui ne sont pas engendrés par les opérateurs T_n de Hecke, sont encore assez mystérieux : ils sont donnés par des distributions t qui sont apparemment associées aux orbites "badly behaved" [au sens de Mackey] (sous multiplications R_γ à droite par les éléments γ de Γ sur l'espace $\Gamma \setminus \underset{\sim}{G}$). Ce phénomène est connu dans la théorie des "objects duals" des groupes ou $C^\star$-algèbres, où on a l'impression que ce phénomène encore assez mystérieux impliquerait qu'il y aurait des représentations irréductibles qui ne seraient pas "calculables". Peut-être le même phénomène est-il responsable des difficultés qu'on a trouvées quand on veut décomposer $L^2(SL(2\ ,\ \underset{\sim}{Z}) \setminus SL(2\ ,\ \underset{\sim}{R}))$ explicitement.

Il semble que le problème de cette décomposition avait déjà été considéré par HILBERT : Soit ∇ le laplacien "hyperbolique" $y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ dans le demi-plan hyperbolique de Poincaré : $z = x + iy$, $y > 0$. Considérons l'espace

$$L^2(\underset{\sim}{D} ; y^{-2}\, dx\, dy)$$

de toutes les fonctions $\psi(z)$ modulaires, qui sont de carré intégrable sur un domaine fondamental $\underset{\sim}{D}$ de $SL(2 , \underset{\sim}{Z})$ relatif à la mesure hyperbolique $y^{-2}\, dx\, dy$, et le problème des valeurs propres

$$\nabla\psi_j = \lambda_j\, \psi_j \in L^2(\underset{\sim}{D} ; y^{-2}\, dx\, dy) \quad . \tag{2.1}$$

Il semble que HILBERT avait déjà posé la question lorsqu'il y a des relations entre ce spectre discret $\{\lambda_j\}$ et les zéros de la fonction zeta de Riemann $\zeta(s)$. Cette question a été étudiée surtout par A. SELBERG et C. L. SIEGEL. Les séries de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$ que SELBERG a associées à certains espaces homogènes $\Gamma \backslash \underset{\sim}{G}$ [e. g. $SL(2 , \underset{\sim}{Z}) \backslash SL(2 , \underset{\sim}{R})$] sont encore très loin de la fonction zeta de Riemann, parce que dans les séries $\sum a_n n^{-s}$ de Selberg, n varie sur un composé infini des corps quadratiques, et pas seulement sur $\underset{\sim}{Z}$.

Le problème (2.1) des valeurs λ_j et des fonctions ψ_j propres du spectre discret reste encore très difficile, même pour le groupe modulaire. Par exemple, on ne sait pas encore si le spectre discret de (2.1) est simple pour le groupe modulaire, ni s'il existe des expressions non triviales pour les fonctions propres ψ_j à carré intégrable.

On progresse peu si on observe que $T_n \nabla = \nabla T_n$, et si on remplace (2.1) par

$$T_n\, \psi_j = \lambda_{j,n}\, \psi_j \quad , \tag{2.2}$$

en restant sur le corps $\underset{\sim}{R}$ des nombres réels. Cela ne diminue pas les difficultés, qui sont peut-être causées par les orbites "badly behaved" des R_γ dans $\Gamma \backslash \underset{\sim}{G}$.

On progresse beaucoup plus si on oublie le corps $\underset{\sim}{R}$, et si on considère le problème (2.2) sur le corps rationnel $\underset{\sim}{Q}$, où les opérateurs de Hecke T_n sont déjà définis naturellement. <u>C'est le but de cet exposé.</u>

§ 3. - Soient maintenant $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}} = GP(2 , \underset{\sim}{Q})$ le groupe des transformations linéaires fractionnelles,

$$x \longmapsto g(x) = (g_{11}\, x + g_{12})(g_{21}\, x + g_{22})^{-1} \quad ,$$

avec $g_{ij} \in \underset{\sim}{Q}$, $g_{11}\, g_{22} - g_{12}\, g_{21} \neq 0$, et $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} = GP(2\ ,\ \underset{\sim}{Z})$ le sous-groupe "modulaire" défini par $g_{ij} \in \underset{\sim}{Z}$ et $g_{11}\, g_{22} - g_{12}\, g_{21} = \pm 1$. Nous étudierons l'espace homogène discret $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}}$, l'espace $L(\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}})$ de toutes les fonctions à valeurs complexes définies sur $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}}$, et l'action des opérateurs de Hecke T_n considérés comme transformations linéaires de l'espace linéaire $L(\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}})$.

Observons que

$$(3.1) \qquad \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}} \simeq \prod_{p\neq\infty} \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}_p} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}_p} \simeq \prod_{p\neq\infty} \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}_p} \setminus \prod_{p\neq\infty} \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}_p} \quad ,$$

où les produits $\prod\limits_{p\neq\infty}$ sont restreints directs (sauf $\prod \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}_p}$, qui est direct cartésien). Ces isomorphismes conservent les opérateurs de Hecke T_n par (multiplications à gauche et) multiplications à droite R_g par les éléments g de $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}}$.

Pour les groupes algébriques généraux, (3.1) est une conséquence du théorème d'approximation de Martin KNESER (un peu moins fort). C'est équivalent au fait que le nombre des classes dans le genre (au sens adélique) du groupe $\underset{\sim}{G}$ est 1 . Dans le cas des groupes des matrices 2×2 , (3.1) est une conséquence facile de la théorie des diviseurs élémentaires.

Le problème <u>global</u>,

$$(3.2) \qquad T_n\, \psi = \lambda_n\, \psi \in L(\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}}) \quad ,$$

de trouver toutes les fonctions propres, se réduit donc au problème <u>local</u>

$$(3.3) \qquad T_{p^v}\, \psi = \lambda_v\, \psi \in L(\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Z}_p} \setminus \underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{Q}_p}) \quad .$$

Considérons donc le cas local. Ecrivons $\mathfrak{G}$ pour $GP(2\ ,\ \Omega)$, où Ω est maintenant un corps local localement compact non archimédien, $\mathfrak{O}$ son anneau de valuation, $\mathfrak{U}$ le groupe des unités de $\mathfrak{O}$ (i. e. $\mathfrak{U} = \mathfrak{O}^{x}$), $\mathfrak{P}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{O}$, et $N\mathfrak{P}$ la norme de $\mathfrak{P}$. Le groupe $\mathfrak{K} = GP(2\ ,\ \mathfrak{O})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathfrak{G}$, et la structure de l'algèbre $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G} / \mathfrak{K})$ des fonctions sphériques à support compact est bien connue ([1]). Remarquons que cette algèbre est $\star$-isomorphe à la sous-algèbre des opérateurs de Hecke engendrée par T_p si $\Omega = \underset{\sim}{Q}_p$.

Le problème (3.3) est donc remplacé par le problème de trouver toutes les solutions $\psi \in L(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G})$ de

$$(3.4) \qquad f \star \psi = \lambda_f\, \psi \quad ,$$

avec $f \in L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G} / \mathfrak{K})$.

THÉORÈME. - Toutes les solutions ψ, à valeurs complexes, de (3.4), sont des coefficients matriciels (convenables) des représentations du groupe $\mathfrak{G}$ de la "série principale".

On peut prendre les représentations M_α de la "série principale" comme représentations explicites de multiplicateurs sur la ligne projective sur le corps local Ω donné : Soient $v(x)$ une fonction à valeurs complexes sur Ω, et α un caractère du groupe multiplicatif Ω^x dans $\underset{\sim}{C}^x$. On a

$$[M_\alpha(g)]\, v(x) = \alpha[(g_{12}\, x + g_{22})^{-2} \det g]\, v\left(\frac{g_{11}\, x + g_{21}}{g_{12}\, x + g_{22}}\right) , \tag{3.5}$$

si $g_{12}\, x + g_{22} \neq 0$. On voit facilement que pour $\alpha(a) = |a|^s$ (où $|a|$ est la valeur absolue $\mathfrak{P}$-adique normalisée, et $a \in \Omega^x$), i. e. $\alpha(\varepsilon) = 1$ si $\varepsilon \in \mathfrak{U}$, les solutions ξ_α des équations

$$M_\alpha(k)\xi_\alpha = \xi_\alpha , \qquad k \in \mathfrak{K} , \tag{3.6}$$

forment un espace linéaire de dimension 1 sur $\underset{\sim}{C}$, et que la fonction

$$\psi(g) = \langle M_\alpha(g^{-1})\xi_\alpha , \eta\rangle \tag{3.7}$$

est une fonction propre locale des opérateurs de Hecke, i. e. une solution de (3.4), si η est une "distribution" [SCHWARTZ-BRUHAT] sur la ligne projective sur Ω. Cette distribution est essentiellement arbitraire, il suffit de savoir que le produit scalaire (3.7) converge (dans un sens qui sera spécifié plus tard). Considérée comme fonction du paramètre s, cette fonction $\psi(g) = \psi(g , s)$ peut avoir des zéros ; dans ce cas, la dérivée partielle, relative à s, est aussi une fonction propre.

On montre que toutes les fonctions propres des opérateurs de Hecke sont obtenues de cette manière. Ce théorème n'est pas correct si on remplace $\mathfrak{K}$ par un sous-groupe de congruences, parce que entrent en général dans ce cas-là, des représentations de la série discrète.

§ $\underset{\sim}{4}$. - Pour démontrer le théorème, il est utile de diagonaliser le T_{p^v}-module $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G})$ des fonctions à support compact, qui est évidemment aussi un R_g-module $(g \in \mathfrak{G})$.

Considérons d'abord seulement les multiplications à droite R_k par les éléments k de $\mathfrak{K}$. Cela donne un développement en série de Fourier,

$$L^2(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) = \sum_u L^2(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star u , \tag{4.1}$$

où $\star$ est ici la convolution sur $\mathfrak{K}$, et où u varie sur un ensemble (convenable) des coefficients matriciels des représentations unitaires irréductibles du groupe compact $\mathfrak{K}$. Appliquons la "transformation de Fourier",

$$(4.2) \qquad f \longmapsto \int_{\mathfrak{G}} f(g)\, M_\alpha(g)\, dg$$

au sous-module $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star u$. On montre que l'image de $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star u$ est constituée de tous les polynômes $F(s)$ en $(N\mathfrak{P})^{\pm s}$ ayant certains zéros, et satisfaisant à une équation fonctionnelle $F(s) \longmapsto F(1-s)$. Donc les $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G} / \mathfrak{K})$-homomorphismes de ce module sur $\underset{\sim}{C}$ sont donnés par $c \in \underset{\sim}{C}$, comme

$$(4.3) \qquad F \longmapsto F^{(j)}(c) \ , \qquad \text{où } F^{(j)}(c) = \frac{\partial^j F}{\partial s^j}(c) \quad \text{si} \quad \frac{\partial^\ell F}{\partial s^\ell}(c) = 0 \ ,$$

pour tout F et $0 \leqslant \ell < j$.

Cela donne toutes les fonctions propres comme produits scalaires (3.7).

Au lieu du développement en série de Fourier (4.1), il est aussi intéressant et utile de considérer le développement en série de Fourier relatif aux sous-groupes de Cartan compacts $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$: Soient δ un élément du corps local Ω , tel que $\sqrt{\delta} \notin \Omega$, et $\mathfrak{R}$ l'image du groupe des matrices $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2\,\delta & r_1 \end{pmatrix}$ avec r_1 , $r_2 \in \Omega$, $r_1^2 - r_2^2\,\delta \neq 0$, par l'homomorphisme naturel de $GL(2\,,\,\Omega)$ sur $GP(2\,,\,\Omega)$. Soit $\hat{\mathfrak{R}}$ le groupe des caractères ρ de ce groupe compact $\mathfrak{R}$, et considérons le développement en série de Fourier

$$(4.4) \qquad L^2(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) = \sum_{\rho \in \hat{\mathfrak{R}}} L^2(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho \ ,$$

où $\star$ est ici la convolution sur $\mathfrak{R}$.

Appliquons la transformation de Fourier (4.2) au sous-module $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho$. On montre que l'image est encore constituée de tous les polynômes $F(s)$ en $(N\mathfrak{P})^{\pm s}$ ayant certains zéros, et satisfaisant à une équation fonctionnelle $s \longmapsto 1-s$. Cela donne encore tous les $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G} / \mathfrak{K})$-homomorphismes du sous-module $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho$ sur $\underset{\sim}{C}$ sous la forme (4.3). Comme conséquence, on obtient toutes les fonctions propres de l'algèbre $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G} / \mathfrak{K})$ dans $L(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho$ sous la forme

$$(4.5) \qquad \psi_{s,\rho}(g) = \langle M_\alpha(g^{-1})\xi_\alpha \ , \ \eta_{\alpha,\rho} \rangle \cdot \zeta_\rho(s) \ ,$$

où $\eta_{\alpha,\rho}$ est déterminé (à une constante complexe près) par

$$(4.6) \qquad M_\alpha(r)\eta_{\alpha,\rho} = \rho(r)\eta_{\alpha,\rho} \ , \qquad \text{pour } r \in \mathfrak{R} \ ,$$

ce qui implique

$$\eta_{\alpha,\rho}(x) = c.\alpha(1 - x^2\delta)\ \rho(r) \quad , \tag{4.7}$$

avec $x = r(0) \in \Omega$. Le facteur $\zeta_\rho(s)$ dans (4.5) est un polynôme en $(N\mathfrak{P})^{\pm s}$, qui est zéro, seulement si $Rs = 1/2$.

Remarquons que chaque orbite de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}$ (par multiplication à droite) est finie. Donc le développement (4.4) $f = \sum_\rho f \star \rho$ est trivialement convergent. Donc on voit qu'étant donnée, pour chaque $\rho \in \hat{\mathfrak{R}}$, une fonction propre $\psi_\rho \in L(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho$, toutes avec la même valeur propre et des nombres complexes c_ρ arbitraires, la série $\sum_{\rho \in \hat{\mathfrak{R}}} c_\rho\ \psi_\rho$ converge vers une fonction propre, et la distribution η dans (3.7) est donnée par $\eta = \sum c_\rho\ \eta_\rho$, la convergence étant triviale. Les mêmes observations sont valables si on remplace $\mathfrak{R}$ par $\mathfrak{K}$, et si on considère le développement (4.1) $f = \sum f \star u$. On obtient encore une fonction propre $\sum c_u\ \psi_u$ si $T_p\ \psi_u = \lambda\psi_u \in L(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star u$, λ indépendant de u , et c_u des nombres complexes arbitraires.

Si f est un élément de $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G})$, son image relativement à la transformation de Fourier (4.2), est donc une suite de polynômes $F_u(s)$ ou $F_\rho(s)$.

Considérons un peu plus le cas d'un sous-groupe de Cartan compact $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$. Soient p un générateur de l'idéal maximal $\mathfrak{P}$, et $\underset{\sim}{p}$ l'élément de $\mathfrak{G}$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On montre que

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{K}\underset{\sim}{p}^n\,\mathfrak{R} \quad . \tag{4.8}$$

Donc il suffit de connaître la fonction $\psi_{s,\rho}(g)$ si $g = \underset{\sim}{p}^n$ avec $n \geqslant 0$.

Supposons maintenant que l'extension quadratique $\Omega(\sqrt{\delta})$ de Ω qui définit $\mathfrak{R}$ est non ramifiée, et $2 \nmid N\mathfrak{P}$, i. e. que $\mathfrak{R}$ est le groupe donné par des matrices $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2\,\delta & r_1 \end{pmatrix}$ (mod $\Omega^x.I$) , avec $r_j \in \Omega$, $r_1^2 - r_2^2\,\delta \neq 0$, $\delta \in \mathfrak{U}$, $\sqrt{\delta} \notin \Omega$, et $2 \nmid N\mathfrak{P}$. Etant donnée une fonction $f(g)$ définie sur $\mathfrak{G}$, satisfaisant

$$f(kgr) = f(g)\ \rho(r) \quad , \tag{4.9}$$

pour tous $g \in \mathfrak{G}$, $k \in \mathfrak{K}$, et $r \in \mathfrak{R}$, et pour un caractère ρ de $\mathfrak{R}$ non constant fixe. Soient $\mathfrak{R}^{(m)}$ le sous-groupe "de congruence" des éléments de $\mathfrak{R}$ pour lesquels $r_2 \in \mathfrak{P}^m$, et μ la valeur minimale de m pour laquelle $\rho(\mathfrak{R}^{(m)}) = 1$. On vérifie que (4.9) entraîne

$$f(\underset{\sim}{p}^n) = 0 \ , \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant n < \mu \quad . \tag{4.10}$$

Pour $n \geqslant \mu$, un calcul qui ne sera pas reproduit ici donne le résultat suivant, pour la fonction propre $\psi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n)$ définie par (4.5),

$$(4.11) \quad \varphi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n) = \langle M_\alpha(\mathfrak{p}^n)\xi_\alpha , \eta_{\alpha,\rho}\rangle$$

$$= \xi_\alpha(0)\ \overline{\eta_{\alpha,\rho}}(0)\ \alpha(\mathfrak{p}^n)[\delta_{0,\mu}(1 + q^{-1}) - \rho(w)(- \delta_{1,\mu}\ q^{-1} + \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3)] ,$$

où $q = N\mathfrak{P}$, w est l'élément de $\mathfrak{K}$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$,

$$\alpha(x) = |x|^s = q^{-s} ,$$

et les expressions $\mathfrak{I}_j$ sont données par

$$(4.12) \quad \begin{cases} \mathfrak{I}_1 = \dfrac{q^{(1-2s)\max(1,\mu)} - q^{-1+(1-2s)\max(1,\mu-1)}}{1 - q^{1-2s}} , \\[2ex] \mathfrak{I}_2 = \dfrac{q^{-1+(1-2s)\max(n+1,\mu-1)} - q^{(1-2s)\max(n+1,\mu)}}{1 - q^{1-2s}} , \\[2ex] \mathfrak{I}_3 = \alpha(\mathfrak{p}^{-2n})\ \dfrac{q^{-\max(n+1,\mu)} - q^{-1-\max(n+1,\mu-1)}}{1 - q^{-1}} . \end{cases}$$

Si $\mu \geqslant 2$ et $n \geqslant \mu$, on obtient

$$(4.13) \quad \frac{q^{n/2}\ \bar{\rho}(w)}{\xi_\alpha(0)\ \eta_{\alpha,\rho}(0)} \langle M_\alpha(\mathfrak{p}^n)\xi_\alpha , \eta_{\alpha,\rho}\rangle.(q^{s-1/2} - q^{1/2-s})$$

$$= q^{n(s-1/2)}\ q^{s-1/2}(1 + q^{s-1})(1 - q^{s-1})\ q^{(1-2s)\mu}$$

$$+ q^{-n(s-1/2)}\ q^{s-3/2}(1 + q^{1-s})(1 - q^{1-s}) .$$

Cela donne l'équation fonctionnelle suivante (pour $\mu \geqslant n$),

$$(4.13) \quad \frac{\varphi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n)}{\varphi_{1-s,\rho}(\mathfrak{p}^n)} = \frac{(1 + q^{s-1})(1 - q^{s-1})}{(1 + q^{-s})(1 - q^{-s})} \times q^{(1-2s)\mu} .$$

Remarquons qu'un calcul élémentaire montre que $\varphi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n) = 0$ pour tout $n \geqslant \mu$ entraîne $\mathrm{Re}\ s = \frac{1}{2}$. Donc il faut multiplier $\varphi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n)$ par un polynôme $\prod_j (q^s - q^{s_j})$, avec $\mathrm{Re}\ s_j = \frac{1}{2}$, pour obtenir la fonction propre $\psi_{s,\rho}$ la plus générale dans $L(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho$:

$$(4.14) \qquad \psi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n) = \prod_j (q^s - q^{s_j}) \, \varphi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n) \quad ,$$

où s_j varie sur les zéros de $\varphi_{s,\rho}(\mathfrak{p}^n)$ pour tout $n \geqslant \mu$.

Soit f une fonction définie sur $\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}$, et supposons que le support de f est contenu dans une seule double-classe $\mathfrak{K}\mathfrak{p}^n \mathfrak{K} = \mathfrak{K}p^n \mathfrak{K}$ (l'extension quadratique correspondante à $\mathfrak{K}$ étant non ramifiée). Considérons la transformation de Fourier (4.2) de f , et posons encore $\langle M_\alpha(g)\xi_\alpha \, , \, \eta_{\alpha,\rho}\rangle = \varphi_{\alpha,\rho}(g)$. On a

$$(4.15) \qquad \int_{\mathfrak{G}} f(g) \langle M_\alpha(g)\xi_\alpha \, , \, \eta_{\alpha,\rho}\rangle \, dg = F_\rho(s) \quad ,$$

où ξ_α est déterminé par (3.6), $\eta_{\alpha,\rho}$ par (4.6) et (4.7). Comme $f(g) = 0$ si $g \notin \mathfrak{K}\mathfrak{p}^n \mathfrak{K}$, on a

$$(4.16) \qquad F_\rho(s) = \int_{\mathfrak{K}\mathfrak{p}^n\mathfrak{K}} f(g) \, \varphi_{\alpha,\rho}(g) \, dg = \int_{\mathfrak{K}^{(n)}\setminus\mathfrak{K}} f(\mathfrak{p}^n r) \, \varphi_{\alpha,\rho}(\mathfrak{p}^n r) \, dr \quad ,$$

où $\mathfrak{K}^{(n)}$ est le sous-groupe de $\mathfrak{K}$ qui laisse invariant le point $\mathfrak{K}\mathfrak{p}^n$ de l'espace homogène $\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}$: $\mathfrak{K}^{(n)} = (\mathfrak{p}^{-n} \mathfrak{K}\mathfrak{p}^n) \cap \mathfrak{K}$. Donc $\mathfrak{K}^{(n)}$ est le sous-groupe de congruences de $\mathfrak{K}$ donné par les matrices $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2\delta & r_1 \end{pmatrix}$ (mod $\Omega^x.I$) , avec $r_2 \equiv 0$ (mod $\mathfrak{p}^n$) . Donc l'intégrale $\int_{\mathfrak{K}^{(n)}\setminus\mathfrak{K}}$ est une somme finie, l'indice de $\mathfrak{K}^{(n)}$ dans $\mathfrak{K}$ étant fini. Si $f(gr) = \rho(r) \, f(g)$ pour $g \in \mathfrak{G}$, $r \in \mathfrak{K}$, et ρ un caractère de $\mathfrak{K}$ donné (fixe), on a le résultat très explicite

$$(4.17) \qquad F_\rho(s) = f(\mathfrak{p}^n) \int_{\mathfrak{K}^{(n)}\setminus\mathfrak{K}} \rho(r) \, \varphi_{\alpha,\rho}(\mathfrak{p}^n r) \, dr$$

$$= f(\mathfrak{p}^n) \, \varphi_{\alpha,\rho}(\mathfrak{p}^n) \int_{\mathfrak{K}^{(n)}\setminus\mathfrak{K}} |\rho(r)|^2 \, dr = f(\mathfrak{p}^n)\mu_n . \varphi_{\alpha,\rho}(\mathfrak{p}^n) \quad ,$$

où μ_n est la mesure de $\mathfrak{K}^{(n)} \setminus \mathfrak{K}$ = mesure de la double-classe $\mathfrak{K}\mathfrak{p}^n \mathfrak{K}$. Si f est arbitraire, mais $f(g) = 0$ pour $g \notin \mathfrak{K}\mathfrak{p}^n \mathfrak{K}$, on obtient

$$(4.18) \qquad F_\rho(s) = \int f(\mathfrak{p}^n r) \, \varphi_{\alpha,\rho}(\mathfrak{p}^n r) \, dr = \int f(\mathfrak{p}^n r) \, \overline{\rho}(r) \, dr . \varphi_{\alpha,\rho}(\mathfrak{p}^n) \quad .$$

Le groupe $\mathfrak{K}^{(n)} \setminus \mathfrak{K}$ est un groupe de Galois d'une extension abélienne du corps quadratique $\Omega(\sqrt{\delta})$, qui est bien connue dans la théorie des corps de classes locale. La dernière intégrale est la transformation de Fourier de f relative à ce groupe fini abélien $\mathfrak{K}^{(n)} \setminus \mathfrak{K}$. Remarquons aussi que l'image de T_p est la multiplication par $(N\mathfrak{P})^s + (N\mathfrak{P})^{1-s}$, i. e.

$$(4.19) \qquad F_\rho(s) \longmapsto [(N\mathfrak{P})^s + (N\mathfrak{P})^{1-s}]\, F_\rho(s) \quad ,$$

et que $\varphi_{\alpha,\rho}(\mathfrak{p}^n)$ est le polynôme donné par (4.11) et (4.12).

Donc on a obtenu une "diagonalisation" complètement explicite du double-module $L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G})$, ce qui suggère la possibilité d'une "multiplication complexe locale".

§ 5. - Considérons les fonctions propres globales dans le cas où Ω est un corps des nombres algébriques fini ou un corps des fonctions algébriques de degré de transcendence 1 sur un corps de constantes fini. Pour chaque place p non archimédienne, soient Ω_p la complétion p-adique de Ω , $\mathfrak{D}_p$ l'anneau de valuation de Ω_p , et

$$G_p = GP(2\ ,\ \Omega_p) \supset K_p = GP(2\ ,\ \mathfrak{D}_p) \quad .$$

Pour un ensemble P des places p non archimédiennes donné, soient G_P le produit direct restreint des groupes G_p relatif aux sous-groupes K_p , et K_P le produit direct des groupes compacts K_p . Considérons l'analogue global du développement en série de Fourier local (4.1) :

$$(5.1) \qquad L(K_P \setminus G_P) = \sum_u L(K_P \setminus G_P) \star u \quad ,$$

où u varie sur un ensemble convenable de coefficients matriciels de certaines représentations unitaires irréductibles du groupe compact K_P . Soit f dans $L(K_P \setminus G_P)$, et calculons la convolution

$$(f \star u)(g) = \int_{K_P} f(gk^{-1})\, u(k)\, dk \quad .$$

L'orbite de K_P par multiplication à droite dans $K_P \setminus G_P$ du point $K_P\, g$ est finie, K_P étant compact, et $K_P \setminus G_P$ discret ; donc il existe un nombre h fini d'éléments k_j de K_P tels que

$$(5.2) \qquad K_P\, gK_P = \bigcup_{j=1}^{h} K_P\, gk_j \quad ,$$

la réunion étant disjointe. Naturellement, h et k_j varient avec g . Supposant que la mesure de K_P soit 1 , on obtient donc

$$(5.3) \qquad (f \star u)(g) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{h} f(gk_j^{-1})\, u(k_j) \quad .$$

Supposons maintenant que nous avons une fonction propre ψ des opérateurs de

Hecke, définie sur $K_P \setminus G_P$, et considérons la convolution $\psi \star u$. C'est une fonction propre contenue dans $L(K_P \setminus G_P) \star u$. Nous pouvons toujours supposer que

$$u(k) = \prod_p u_p(k_p) \ , \qquad \text{où} \quad k = \prod_p k_p \ .$$

Evidemment, $u_p(k_p) = 1$ pour presque tout p . La fonction propre dans $L(K_P \setminus G_P) \star u$ étant unique (à une constante complexe près), donc on trouve que

$$\sum_{j=1}^{h} \psi(gk_j^{-1})\, u(k_j) = c_u \prod_p \psi_{s,u_p}(g_p) \ , \tag{5.4}$$

où $g = \prod g_p$, et ψ_{s,u_p} est la fonction propre $\in L(K_p \setminus G_p) \star u_p$ étudiée dans le § 4. Remarquons que l'on peut supposer que g est donné par une matrice diagonale, i. e. $g = \prod \underset{\sim}{p}^{v_p}$, et que ψ_{s,u_p} est la fonction sphérique élémentaire ([1]) si $u_p = 1$. Donc le produit $\prod_p \psi_{s,u_p}(g_p)$ est fini pour chaque élément $g = \prod g_p$ de G_P .

La formule (5.4) semble neuve pour les fonctions modulaires classiques, et j'ai l'impression qu'elle n'était même pas connue pour les fonctions propres "classiques" comme la série d'Eisenstein $E(z , s) = y^s \sum |mz + n|^{-2s}$, ni pour les formes holomorphes modulaires. Apparemment, <u>la restriction d'une fonction (ou forme) modulaire au demi-plan supérieur d'un corps quadratique imaginaire $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d})$, a des propriétés très spéciales, qui sont encore mal connues.</u>

Considérons donc les "points rationnels" d'un domaine fondamental du groupe modulaire : Soient $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d})$ une extension quadratique imaginaire de $\underset{\sim}{Q}$, et $R_{\underset{\sim}{Q}}$ le sous-groupe de $G_{\underset{\sim}{Q}} = GP(2 , \underset{\sim}{Q})$ donné par les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix}$ (mod $\underset{\sim}{Q}^x.I$) , avec $a , b \in \underset{\sim}{Q}$, et $a^2 - b^2 d \neq 0$. L'espace $G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}}/R_{\underset{\sim}{Q}}$ des double-classes $G_{\underset{\sim}{Z}}\, g\, R_{\underset{\sim}{Q}}$ (avec $g \in G_{\underset{\sim}{Q}}$) s'identifie d'une manière naturelle avec $G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus \{\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d}) - \underset{\sim}{Q}\}$, parce que l'espace homogène $G_{\underset{\sim}{Q}}/R_{\underset{\sim}{Q}}$ s'identifie d'une manière naturelle avec le sous-ensemble de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d})$ des éléments $z = x + y\sqrt{d}$ pour lesquels $y \neq 0$.

Comme l'isomorphisme (3.1) préserve la multiplication à droite par les éléments de $G_{\underset{\sim}{Q}}$, donc en particulier par les éléments de $R_{\underset{\sim}{Q}}$, on obtient un isomorphisme naturel et explicite

$$G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}} / R_{\underset{\sim}{Q}} \simeq K_P \setminus G_P / R_{\underset{\sim}{Q}} \ , \tag{5.5}$$

où P est ici l'ensemble de tous les nombres rationnels premiers p .

Cet espace des double-classes n'est plus un produit $\prod_p$. Pour obtenir une telle description, il faut "adéliser" $R_{\underset{\sim}{Q}}$: Soient $R_{\underset{\sim}{Q}_p}$ la complétion p-adique de $R_{\underset{\sim}{Q}}$ dans $G_{\underset{\sim}{Q}_p}$, et R_P le produit restreint direct

$$(5.6) \qquad R_P = \prod_{p \neq \infty} R_{\underset{\sim}{Q}_p} \quad \text{relatif aux sous-groupes compacts } R_{\underset{\sim}{Q}_p} \cap K_p \ .$$

La multiplication à droite par les éléments $\underset{\sim}{r}$ du quotient $R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P$ est bien définie dans l'espace (5.5). Ce quotient $R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P$ est un groupe compact commutatif de Galois d'une extension abélienne de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d})$; observons que $R_{\underset{\sim}{Q}}$ est un sous-groupe discret de R_P, parce que le nombre des unités du corps quadratique <u>imaginaire</u> $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d})$ est fini.

Donc on voit que l'espace $L(G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}} / R_{\underset{\sim}{Q}})$ des fonctions à valeurs complexes est un double-module : Il admet les opérateurs de Hecke (par multiplication à gauche) et multiplication à droite par les éléments $\underset{\sim}{r}$ du groupe $R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P$. Ce double-module est à la base de la multiplication complexe, et les résultats précédents donnent une description complète et très explicite de ce double-module comme somme directe des modules polynomiaux : Soit ρ un caractère arbitraire du groupe compact commutatif $R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P$, et considérons le développement en séries de Fourier

$$(5.7) \qquad L(G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}} / R_{\underset{\sim}{Q}}) = \sum_{\rho \in \widehat{R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P}} L(K_P \setminus G_P / R_{\underset{\sim}{Q}}) \star \rho \ ,$$

où $\star$ est ici la convolution à droite relative au groupe compact $R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P$. Remarquons que chaque orbite du groupe compact $R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P$ par multiplication à droite dans l'espace discret $K_P \setminus G_P / R_Q$ est finie, donc les séries de Fourier (5.7) sont toujours convergentes. Pour le sous-module $L^0(G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}} / R_{\underset{\sim}{Q}}) \star \rho$, on obtient une description explicite et complète comme module polynomial : Son image par la transformation de Fourier est donnée par la série principale "globale" (i. e. l'analogue global de (4.2)), et est constituée de tous les polynômes $F(\ldots , s_p , \ldots)$ d'un nombre infini de variables $p^{\pm s_p}$, ayant certains zéros, et satisfaisant au nombre infini d'équations fonctionnelles $s_p \longmapsto 1 - s_p$.

Si $f \in L(G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}} / R_{\underset{\sim}{Q}})$, on a

$$(5.8) \qquad (f \star \rho)(g) = \int_{R_{\underset{\sim}{Q}} \setminus R_P} f(g\underset{\sim}{r}^{-1}) \ \rho(r) \ dr = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{h} f(g\underset{\sim}{r}_j^{-1}) \ \rho(\underset{\sim}{r}_j) \ ,$$

comme analogue de (5.3). En particulier, si f est une fonction propre des opérateurs de Hecke, $f \star \rho$ est une fonction propre, qui est un produit $\prod_p$ des polynômes. Si $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$ et $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ non ramifié, ces polynômes sont donnés par (4.11). Si $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}_p$, la fonction propre locale est encore de la forme

$$\langle M_{\alpha_p}(g)\xi_{\alpha_p}, \eta_{\alpha_p,\rho_p}\rangle , \qquad \text{où } M_{\alpha_p}(r)\eta_{\alpha_p,\rho_p} = \rho(r)\eta_{\alpha_p,\rho_p} ,$$

pour $r \in R_{\mathbb{Q}_p}$. Le sous-groupe $R_{\mathbb{Q}_p}$ est maintenant un "tore déployé", donc conjugué au sous-groupe des éléments de $G_{\mathbb{Q}_p}$ qui sont donnés par les matrices diagonales, c'est ce qui permet encore de calculer le produit scalaire d'une manière explicite comme polynôme en $p^{\pm s_p}$.

Pour chaque extension quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ du corps rationnel $\mathbb{Q}$, on obtient donc un développement en séries de Fourier (5.7), (5.8), avec une signification dans la théorie des corps de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et dans la théorie de la multiplication complexe. Appliquons donc (5.7) et (5.8) à une fonction $f(z)$, $\mathbb{R}$-continue ou $\mathbb{C}$-holomorphe, et nous obtenons des relations linéaires pour les coefficients de Fourier de f. Cela donne des relations assez curieuses déjà, si on prend pour f une fonction "classique" comme la série d'Eisenstein $y^s \sum |mz+n|^{-2s}$, l'invariante elliptique $j(z)$, etc.

Si ψ est une fonction propre des opérateurs de Hecke, qui est $\mathbb{R}$-continue ou $\mathbb{C}$-holomorphe, on obtient les développements $\psi = \sum \psi \star \rho$, où $\psi \star \rho$ sont des fonctions propres déterminées ci-dessus, en particulier paramétrisées d'une manière naturelle par leurs valeurs propres. Donc, l'hypothèse de Ramanujan (ordre de magnétude des formes modulaires paraboliques) devient un cas spécial d'un problème bien connu de l'analyse de Fourier, de l'analyse spectrale : Quel est le spectre d'un sous-espace donné ? Quelles sont les propriétés spéciales des développements $\psi = \sum \psi \star \rho$ ou $\psi = \sum \psi \star u$, si ψ est $\mathbb{R}$-continu ou $\mathbb{C}$-holomorphe ? Peut-on trouver une caractérisation arithmétique de fonctions (ou formes) modulaires holomorphes qui serait utile ici ?

§ 6. – Considérons encore un peu plus la "transformation de Fourier" (4.2), donnée par la série principale "locale" des représentations M_α. Comme M_α est la représentation induite,

$$(6.1) \qquad \operatorname*{ind}_{\mathfrak{AB}\uparrow\mathfrak{G}} \alpha , \qquad \alpha \in \hat{\mathfrak{A}} , \quad \alpha(ab) = \alpha(a) ,$$

où $\mathfrak{A}$ est le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ donné par les matrices diagonales, $\mathfrak{B}$ le sous-groupe des translations, $M_\alpha(g)$ est la multiplication à droite dans un espace des fonctions $v(g)$ (mesurables, intégrables ou continues, etc.) définies sur $\mathfrak{G}$ et satisfaisant aux conditions

(6.2) $$v(abg) = \alpha(a)\, v(g) \;, \qquad a \in \mathfrak{A} \;, \quad b \in \mathfrak{B} \;, \quad g \in \mathfrak{G} \;.$$

Donc $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{K}$ et (6.2) entraînent que v est déterminée par sa restriction à $\mathfrak{K}$. L'opérateur $\underset{\sim}{F}(\alpha) = \int f(g)\, M_\alpha(g)\, dg$ est donné par

(6.3) $$[\underset{\sim}{F}(\alpha)v](k) = \int_{\mathfrak{K}} \check{f}(k\,,\varkappa)\; v(\varkappa)\; d\varkappa \;,$$

où $\check{f}$ est donné par l'expression bien connue

(6.4) $$\check{f}(k\,,\varkappa) = \int_{\mathfrak{A}}\Big(\int_{\mathfrak{B}} f(kab\varkappa^{-1})\; db\Big)\, \alpha(a)\; da \;, \qquad k \text{ et } \varkappa \in \mathfrak{K} \;.$$

Supposons maintenant $f \in L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G})$, et appliquons le développement en séries de Fourier (4.1). On obtient $\check{f}(k\,,\varkappa) = \sum_u [\check{f}(k\,,\varkappa) \star u](\varkappa)$, où $\star$ est la convolution sur $\mathfrak{K}$ relative à la deuxième variable $\varkappa$. Donc, à la fonction $f \star u$ correspond l'opérateur $\underset{\sim}{F}(\alpha)_u$ donné par le noyau $[\check{f}(k\,,\varkappa) \star u](\varkappa)$. Donc, si on prend, dans l'espace $L^2((\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{K})$ des restrictions des fonctions $v(abg) = \alpha(a)\, v(g)$ à $\mathfrak{K}$, une base orthonormale adaptée au groupe compact des opérateurs unitaires $M_\alpha(k)$, $k \in \mathfrak{K}$, on voit que l'opérateur $\underset{\sim}{F}(\alpha)$ est donné par une matrice qui a une seule colonne de coefficients non-zéro,

(6.5) $$\underset{\sim}{F}(\alpha) = \{F_u(\alpha)\} \;,$$

où $F_u(\alpha) = [\check{f}(k\,,\varkappa) \star u](\varkappa)$, i. e.

(6.6) $$F_u(\alpha) = \int_{\mathfrak{A}} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{K}} f(ab\varkappa^{-1})\; u(\varkappa)\; d\varkappa\; db\; \alpha(a)\; da$$

est une fonction de α à valeurs complexes (pour u fixe).

Supposons maintenant que $f \in L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star u$, et nous obtenons

(6.7) $$F_u(\alpha) = \int_{\mathfrak{A}} \int_{\mathfrak{B}} f(ab)\; db\; \alpha(a)\; da \;.$$

Evidemment $f(kg) = f(g)$ entraîne que la fonction $f(ab)$ est déterminée par sa restriction aux éléments $\underset{\sim}{p}^n.b$ ($b \in \mathfrak{B}$ et $n = 0\,,1\,,2\,,\ldots$), donc

(6.8) $$F_u(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}(\underset{\sim}{p}^n)\; \alpha(\underset{\sim}{p}^n) \;,$$

si la mesure sur $\mathfrak{A}$ est normalisée de telle façon que la mesure totale de $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$ soit 1, et si $\tilde{f}$ est donnée par

(6.9) $$\tilde{f}(\underset{\sim}{p}^n) = \int_{\mathfrak{B}} f(\underset{\sim}{p}^n\, b)\, db \quad .$$

Comme $\alpha(\underset{\sim}{p}^n) = N\mathfrak{P}^{-ns}$, et f est à support compact, donc $\tilde{f}(\underset{\sim}{p}^n)$ à support fini, on voit que (6.8) est un polynôme de Fourier,

(6.10) $$F_u(\alpha) = \Sigma\, \tilde{f}(\underset{\sim}{p}^n) N\mathfrak{P}^{-ns} \quad .$$

Essentiellement les mêmes observations sont valables si on considère le développement en séries de Fourier (4.4) relatif au sous-groupe de Cartan compact $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{G}$ au lieu de (4.1), $F_\rho(\alpha)$ au lieu de $F_u(\alpha)$, et si on utilise $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{K}$. On obtient encore une somme finie,

(6.11) $$F_\rho(\alpha) = \Sigma\, \tilde{f}(\underset{\sim}{p}^n) N\mathfrak{P}^{-ns} \quad ,$$

pour tout $f \in L^0(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho$.

Si on suppose $f \in L^1(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star u$ (ou $L^1(\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{G}) \star \rho$) , la somme (6.10) (ou (6.11)) n'est pas finie en général, mais converge uniformément dans la "bande critique", $0 \leqslant \mathrm{Re}\ s \leqslant 1$, telle que $F_u(s)$ (et $F_\rho(s)$) est une fonction holomorphe dans la bande $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$, continue dans $0 \leqslant \mathrm{Re}\ s \leqslant 1$, qui n'est pas en général un polynôme en $N\mathfrak{P}^{\pm s}$.

Si on prend, au lieu du groupe local $\mathfrak{G}$, un produit direct restreint G_P , sur un ensemble P , des places non archimédiennes p données, les éléments a (mod K_P) sont de la forme $a = \prod \underset{\sim}{p}^{n_p}$, leurs caractères α sont paramétrisés par les variables s_p , si on met $\alpha(a) = \prod (N\mathfrak{P})^{-n_p s_p}$. Donc $F_u(\dots , s_p , \dots)$ est maintenant une fonction des variables $(N\mathfrak{P})^{\pm s_p}$. Si f est à support compact, $F_u(\dots , s_p , \dots)$ est un polynôme en $(N\mathfrak{P})^{\pm s_p}$. Si f est sommable, $F_u(\dots , s_p , \dots)$ n'est pas un polynôme en général, mais une limite uniforme des polynômes dans toute bande $0 < \varepsilon \leqslant \mathrm{Re}\ s_p \leqslant 1 - \varepsilon$, $p \in P$, donc une fonction holomorphe des variables s_p , donnée par

(6.12) $$F_u(\dots , s_p , \dots) = \Sigma\, \tilde{f}(\prod \mathfrak{P}^{n_p}) \prod N\mathfrak{P}^{-n_p s_p} \quad ,$$

où $\tilde{f}$ est ici l'analogue global de (6. 9).

Observons que la transformation linéaire $f \longmapsto \tilde{f}$ est biunivoque sur $L^1(K_P \setminus G_P) \star u$, et que $\tilde{f}(\prod \underset{\sim}{p}^{n_p})$ est à support fini si, et seulement si, $f \in L^0(K_P \setminus G_P) \star u$. Donc l'image de $L^1(K_P \setminus G_P) \star u$ est une classe de fonctions holomorphes, qui ne sont pas des polynômes en général. Si l'ensemble P est infini, on obtient donc un

$\underset{\sim}{T_n}$-module des fonctions holomorphes $F(\dots, s_p, \dots)$ d'un nombre infini de variables complexes s_p, satisfaisant au nombre infini d'équations fonctionnelles $s_p \longmapsto 1 - s_p$. L'image de T_p est toujours la multiplication par $(N\mathfrak{p})^{s_p} + (N\mathfrak{p})^{1-s_p}$.

Chaque fonction $F(\dots, s_p, \dots)$ est déterminée par sa restriction $F(s)$ à la "diagonale" $\dots = s_p = \dots = s_{p'} = \dots$, c'est ce qui donne une méthode alternative pour calculer l'inversion de la transformation de Fourier :

$$F(\dots, s_p, \dots) \longmapsto F(s) \longmapsto f .$$

La transformation $f \longmapsto \widetilde{f}$ a été étudiée, par moi ([1]), dans le cas où P est constitué d'une seule place non archimédienne et $u = 1$. J'ai obtenu le résultat

$$\widetilde{f}(\underset{\sim}{p}^n) = N\mathfrak{p}^n \left[\frac{I - \partial^2}{I - (N\mathfrak{p})\partial^2} f\right](\underset{\sim}{p}^n), \qquad \text{si } n \geqslant 0 , \tag{6.13}$$

où $(\partial f)(\underset{\sim}{p}^n) = f(\underset{\sim}{p}^{n+1})$. Donc on voit que la transformation $f \longmapsto \widetilde{f}$, pour un ensemble P arbitraire, est un produit de deux transformations : L'une est la multiplication par $\prod (N\mathfrak{p})^{n_p}$, et l'autre est déterminée par la transformation de Mellin de la multiplication par $\zeta_{P,u}(2s - 1)/\zeta_{P,u}(2s)$, où $\zeta_{P,u}$ est la "fonction zéta de l'ensemble P, u". Si $u = 1$, on a $\zeta_{P,1}(s) = \prod_{p \in P} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$; en particulier pour le module $L^0(G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}})$, on obtient la fonction zéta de Riemann, si $u = 1$.

Donc on voit que la structure des $\underset{\sim}{T_n}$-modules comme $L^0(K_p \setminus G_p)$, $L^0(K_p \setminus G_p) \star u$, etc., est essentiellement déterminée par les fonctions $\zeta_{P,u}(s)$. Comme $u_p = 1$ presque-partout, on voit que $\zeta_{P,u}/\zeta_{P,1}$ est un polynôme d'un nombre fini de variables $(N\mathfrak{p})^{\pm s_p}$. Ces résultats (et d'autres considérations) mènent à la conjecture suivante :

Des propriétés de la fonction zéta de Riemann (ou plus généralement de ζ_P) sont équivalentes aux propriétés polynomiales, par exemple aux propriétés des modules polynomiaux étudiés ci-dessus, ou même des polynômes $\prod_{p \in P} \varphi_{s_p, u_p}$.

De toute façon, la fonction zéta entre ici par vengeance : Evidemment, le produit $\prod (1 - N\mathfrak{p}^{-s_p})^{-1}$ converge dans toute région $\operatorname{Re} s_p > 1 + \varepsilon$, $p \in \underset{\sim}{P}$, $\varepsilon > 0$, et est une fonction holomorphe des variables s_p $(p \in P)$ dans chaque région $\operatorname{Re} s_p > 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Il n'est pas difficile de montrer que ce n'est pas une fonction méromorphe des variables s_p $(p \in P)$ dans une "région compacte" comme $-1 \leq \operatorname{Re} s_p \leq 2$, $0 \leq \operatorname{Im} s_p < 2\pi/\log p$, si P est infini. Donc le "groupe infini de Weyl", engendré par les transformations $s_p \mapsto 1 - s_p$, reste encore bien caché dans le produit d'Euler.

D'autre part, ce groupe infini de Weyl est bien explicite dans les algèbres des fonctions sphériques, comme $L^0(K_P\backslash G_P/K_P)$ et $L^1(K_P\backslash G_P/K_P)$. Ici, on a l'impression qu'on a finalement réussi à éviter la fonction zéta. Mais c'est la transformation $f \mapsto \tilde{f}$ qui détermine la transformation de Fourier de ces algèbres, donc la fonction zéta rentre ici par vengeance, comme dans un drame de la Grèce ancienne !

Si on remplace $G_{\underset{\sim}{Z}}$ par un sous-groupe de congruence $G_{\underset{\sim}{Z}}^{(m)}$ dans le problème de valeurs propres (3.2), les résultats présentés ici ne sont plus corrects : Les représentations M_α de la série principale ne suffisent pas pour la décomposition de $L^2(G_{\underset{\sim}{Z}}^{(m)} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}})$, des représentations de la série discrète de $G_{\underset{\sim}{Q}_p}$ y entrent aussi. C'est une différence assez abrupte et qualitative entre le groupe modulaire $G_{\underset{\sim}{Z}}$ et les sous-groupes de congruence $G_{\underset{\sim}{Z}}^{(m)}$, qui ne semble pas anticipée dans la théorie classique des fonctions ou formes modulaires.

Remarquons aussi qu'on ne doit pas effacer $G_{\underset{\sim}{Z}}$ complètement dans $L^2(G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}})$: La représentation régulière de $L^2(G_{\underset{\sim}{Q}})$ est du type II_1 (au sens des algèbres des opérateurs de Murray et von Neumann). Donc les représentations unitaires irréductibles ne sont pas uniques, apparemment même pas toutes "calculables". Donc on voit que le groupe modulaire joue un rôle essentiel dans les problèmes considérés ici, même du point de vue des algèbres des opérateurs et de la théorie générale des représentations unitaires. Les espaces comme $L(G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}})$ peuvent être analysés d'une manière complète, élémentaire et explicite, "parce que (?!)" les espaces homogènes $G_{\underset{\sim}{Z}} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}}$, $G_{\underset{\sim}{Z}_p} \setminus G_{\underset{\sim}{Q}_p}$, etc., sont des espaces symétriques. Elie CARTAN savait pourquoi il les appelait "une classe d'espaces remarquables" !

BIBLIOGRAPHIE

[1] MAUTNER (F. I.). - Spherical functions over $\mathfrak{P}$-adic fields, I., Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 441-457.

[2] MAUTNER (F. I.). - Fonctions propres des opérateurs de Hecke, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269. 1969, Série A, p. 940-943, et t. 270, 1970, Série A, p. 89-92.

Friederich I. MAUTNER
Résidence Ormaille
91 - BURES-sur-Yvette

(Texte reçu le 16 mars 1970)