GILLES CHRISTOL

Équirépartition dans les séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 4, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 11e année, 1969/70, n° 4, 13 p.

4-01

1er décembre 1969

ÉQUIRÉPARTITION DANS LES SÉRIES FORMELLES

par Gilles CHRISTOL

1. μ-*répartition*.

Soit K un compact muni d'une mesure μ normale (positive et de masse totale 1). On dira que la suite u_n de K est μ-répartie, si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes ([7]) :

(a) *Pour toute partie* E *de* K, *mesurable et de frontière négligeable*,

$$\lim \frac{1}{N} \operatorname{Card}\{n \in (0\ ,\ N-1)\ ;\ u_n \in E\} = \mu(E) \quad ;$$

(b) *Pour toute fonction* f *de* $\mathcal{C}(K)$ (*fonctions continues de* K *dans* $\mathbb{C}$),

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) = \int_K f(x)\ d\mu(x) \quad .$$

Pour que (b) ait lieu, il suffit qu'elle soit vérifiée pour une partie engendrant un sous-espace dense de $\mathcal{C}(K)$ (pour la topologie de la convergence uniforme).

Nous nous plaçons donc dans la catégorie suivante : les objets sont les couples $(K\ ,\ \mu)$, où K est un compact, et μ une mesure normale de K ; un morphisme de $(K\ ,\ \mu)$ dans $(H\ ,\ \nu)$ est une surjection continue p de K sur H qui satisfait, pour toute fonction f de $\mathcal{C}(H)$, à

$$\int_K f(p(x))\ d\mu(x) = \int_H f(x)\ d\nu(x) \quad .$$

Nous appellerons les objets de cette catégorie "compact", sans préciser qu'ils sont munis d'une mesure normale.

Soit une famille de compacts $(K_\alpha\ ,\ \mu_\alpha)$ indexée par un ensemble d'indice I préordonné filtrant, et soit, pour tout $\alpha \leqslant \beta$, un morphisme $p_{\alpha\beta}$ de $(K_\beta\ ,\ \mu_\beta)$ dans $(K_\alpha\ ,\ \mu_\alpha)$. Alors il existe une solution universelle pour le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "p_\beta"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & K_\beta \arrow[d, "p_{\alpha\beta}"] \\ & K_\alpha \end{tikzcd} \quad ;$$

cette solution est le compact $(\varprojlim(K_\alpha , p_{\alpha\beta}) , \varprojlim \mu_\alpha)$ ([4], chap. 3). Si nous notons (K , μ) cette limite projective, et p_α ses morphismes sur K_α, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - <u>Une suite</u> u_n <u>de</u> K <u>est</u> μ-<u>répartie si, et seulement si, pour tout</u> α, <u>la suite</u> $p_\alpha(u_n)$ <u>est</u> μ_α-<u>répartie</u>.

Si la suite u_n est μ-répartie, pour toute fonction f_α de $\mathcal{C}(K_\alpha)$, comme $f_\alpha \circ p_\alpha$ appartient à $\mathcal{C}(K)$, nous avons

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_\alpha(p_\alpha(u_n)) = \int_K f_\alpha(p_\alpha(x))\, d\mu(x) = \int_{K_\alpha} f_\alpha(x)\, d\mu_\alpha(x) \quad ,$$

puisque p est un morphisme ; la condition (b) nous indique donc que la suite $p_\alpha(u_n)$ est μ_α-répartie.

Si, pour tout α, la suite $p_\alpha(u_n)$ est μ_α-répartie, pour toute fonction f de $\mathcal{C}(K)$ qui, pour un certain α, est de la forme $f_\alpha \circ p_\alpha$, avec f_α appartenant à $\mathcal{C}(K_\alpha)$, nous avons

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) = \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_\alpha(p_\alpha(u_n)) = \int_{K_\alpha} f_\alpha(x)\, d\mu_\alpha(x)$$

$$= \int_K f_\alpha(p_\alpha(x))\, d\mu(x) = \int_K f(x)\, d\mu(x) \quad ,$$

et comme l'ensemble des f de $\mathcal{C}(K)$ qui sont de cette forme est dense dans $\mathcal{C}(K)$ pour la topologie de la convergence uniforme, d'après la remarque sur la condition (b), la suite u_n est μ-répartie.

Ceci peut, en particulier, s'appliquer aux produits de compacts qui s'obtiennent comme limite projective de leurs sous-produits finis. Nous nous intéresserons surtout au compact $K^{\underset{\sim}{N}}$, que nous appellerons ensemble des séries formelles sur K, et dont nous noterons les éléments $a = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n$; pour simplifier, si μ est une mesure normale de K, nous parlerons de μ-répartition dans $K^{\underset{\sim}{N}}$, au lieu de $(\otimes_{\underset{\sim}{N}} \mu)$-répartition.

COROLLAIRE. - <u>Une suite</u> u_n <u>de</u> K^N <u>est</u> μ-<u>répartie si, et seulement si, ses projections sur</u> K^m <u>sont</u> μ-<u>réparties pour tout</u> m . <u>En particulier, pour tout</u> m, <u>la suite</u> $u_n(m)$ <u>est</u> μ-<u>répartie</u>.

Nous allons maintenant nous intéresser à des <u>compacts valués réguliers</u>. Remarquons tout d'abord que tout ensemble fini K est muni d'une structure canonique de compact:

la topologie étant la topologie discrète, et la mesure celle qui associe à chaque point la masse $1/\mathrm{Card}(K)$. On appellera compact valué régulier, un compact qui est limite projective d'une suite de compacts finis ([1]) (la condition que donne Yvette AMICE étant équivalente à dire que les projections sont des morphismes de notre catégorie des compacts).

LEMME 1. - Si I et J sont deux ensembles d'indices préordonnés filtrants, et si $K_{\alpha\gamma}$ $(\alpha \in I\ ,\ \gamma \in J)$ est un système projectif de compacts indexé par $I \times J$, alors on a

$$\varprojlim_{I\times J} K_{\alpha\beta} = \varprojlim_{I} \varprojlim_{J} K_{\alpha\beta} \quad .$$

Si α , $\beta \in I$, alors la propriété universelle de la limite projective permet (si $\alpha \leqslant \beta$) de construire un morphisme de $\varprojlim_J K_{\beta\gamma}$ dans $\varprojlim_J K_{\alpha\gamma}$, et nous pouvons donc considérer la limite projective de ce nouveau système indicé par I : soit H cette limite. Si K est la limite du système $K_{\alpha\beta}$, un nouvel emploi de la propriété universelle permet d'assurer l'existence de morphisme de K dans chaque $\varprojlim_J K_{\alpha\gamma}$, et donc de K dans H ; nous résumons ceci sur le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & K_{\alpha\gamma} \\
H \arrow[r] & \varprojlim_J K_{\alpha\gamma} \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad .$$

Inversement, pour chaque $(\alpha\ ,\ \gamma)$, la composée des projections de H dans $\varprojlim_J K_{\alpha,\gamma}$, et de $\varprojlim_J K_{\alpha,\gamma}$ dans $K_{\alpha,\gamma}$, nous donne une projection de H dans $K_{\alpha\gamma}$, et donc il existe un morphisme de H dans K suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & K_{\alpha\gamma} \\
H \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \varprojlim_J K_{\alpha\gamma} \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad .$$

Nous avons donc démontré l'égalité des limites à un isomorphisme près.

En particulier, ce lemme nous montre que

$$\varprojlim_{I} \prod_{J} K_{\alpha\gamma} = \prod_{J} \varprojlim_{I} K_{\alpha\gamma} \quad .$$

Soit K un compact valué régulier, limite projective des compacts finis K_n ; nous supposons que K_0 n'a qu'un seul élément.

PROPOSITION 2. - $K^{\underset{\sim}{N}}$ *est un compact valué régulier comme limite projective du système* $P_n = K_{n-1} \times K_{n-2} \times \dots \times K_0$ *muni des projections composante par composante.* $K^{\underset{\sim}{N}}$ *est aussi la limite projective du système* $K_n^{\underset{\sim}{N}}$.

Si nous posons $K_n = K_0$ pour n négatif, nous avons

$$P_n = \prod_m K_{n-m} \quad ,$$

et par suite, d'après le lemme,

$$\varprojlim_n P_n = \prod_m \varprojlim_n K_{n-m} = \prod_m K = K^{\underset{\sim}{N}} \quad .$$

Comme, d'autre part, il est évident que P_n est un compact fini, $K^{\underset{\sim}{N}}$ est bien un compact valué régulier. Si v est la valuation de K , remarquons que ce que nous avons fait, revient à munir $K^{\underset{\sim}{N}}$ de la valuation

$$v\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} b(n)x^n\right) = \inf_n \ (v(a(n) \ , \ b(n)) + n) \quad .$$

La deuxième partie se démontre de la même façon :

$$K^{\underset{\sim}{N}} = \prod_m \left(\varprojlim_n K_n\right) = \varprojlim_n \prod_m K_n = \varprojlim_n K_n^{\underset{\sim}{N}} \quad .$$

COROLLAIRE. - *Une suite* u_n *de* $K^{\underset{\sim}{N}}$ *est répartie (c'est-à-dire répartie pour la mesure de compact régulier de* $K^{\underset{\sim}{N}}$) *si, et seulement si, ses projections sur* $K_n^{\underset{\sim}{N}}$ *sont réparties dans* $K_n^{\underset{\sim}{N}}$ *pour tout* n .

Ceci n'est qu'une conséquence des propositions 1 et 2.

Ce corollaire permet de ramener l'étude des répartitions dans les séries formelles sur un compact valué régulier, à celles des séries formelles sur un ensemble fini.

Si G est un groupe abélien compact, et si nous le munissons de sa mesure de Haar normalisée, ce groupe appartient à notre catégorie.

LEMME. - *Si* G *et* H *sont deux groupes abéliens compacts munis de leurs mesures de Haar, alors tout homomorphisme* p *continu et surjectif de* G *sur* H , *est un morphisme de* $\mathrm{Hom}(G \ , \ H)$ *dans notre catégorie.*

Soient en effet dx la mesure de Haar de G , et μ sa transformée par p ; alors

$$\int_H f(x) \ d\mu(x) = \int_G f(p(x)) \ dx \quad ,$$

pour toute fonction continue sur H . Nous avons donc

$$\int_H f(y - x)\, d\mu(y) = \int_G f(p(y - x))\, dy = \int_G f(p(y) - p(x))\, dy$$

$$= \int_G f(p(y))\, dy = \int_H f(y)\, d\mu(y) \quad ,$$

ce qui montre que μ est invariante par translation ; comme p est surjectif, nous savons de plus que

$$\int_H d\mu(x) = \int_G dx = 1 \quad ,$$

et par suite μ est la mesure de Haar normalisée de H , ce qui démontre le lemme.

Une suite u_n de G répartie pour la mesure de Haar est dite équirépartie ; elle vérifie alors la condition équivalente à (a) et (b) :

(c) (Critère de Weyl) Pour tout $\chi \in \hat{G}$ (dual de G), $\chi \neq 0$:

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} \chi(- u_n) = 0 \quad .$$

$G^{\underset{\sim}{N}}$ est un groupe abélien, si on le munit de sa structure de somme directe complète ([8]) d'une infinité dénombrable de copies de G ; il résulte du lemme que la mesure de Haar de $G^{\underset{\sim}{N}}$ est justement la mesure-produit des mesures de Haar de G ; on sait, d'autre part, que le dual de $G^{\underset{\sim}{N}}$ est la somme directe d'une infinité dénombrable de copies de $\hat{G}$, que nous noterons $\hat{G}[x]$, la dualité étant définie par la relation

$$\langle \sum_{n=0}^{N} \chi(n)x^n , \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n \rangle = \prod_{n=0}^{N} \langle \chi(n) , a(n + 1) \rangle \quad .$$

2. Eléments U-normaux.

Si E est un ensemble quelconque, nous pouvons définir sur E((x)) , pour tout entier m , la transformation

$$U_m(\sum a(n)x^n) = \sum a(nm)x^n \quad .$$

En particulier, si E est un compact K , U_m est défini sur $K^{\underset{\sim}{N}}$. Un élément a de $K^{\underset{\sim}{N}}$ sera dit U_m-normal, si la suite $u_n = U_m^n(a)$ est répartie dans K .

THÉORÈME 1. - *Si G est un groupe profini, pour tout m , presque tous les éléments de $G^{\underset{\sim}{N}}$ sont U_m-normaux.*

Un groupe profini est un groupe qui est un compact valué régulier.

LEMME 3. - U_m appartient à $\mathrm{Hom}(G^{\underline{N}}, G^{\underline{N}})$.

U_m est d'une manière évidente un homomorphisme surjectif de $G^{\underline{N}}$ dans $G^{\underline{N}}$. Pour tout k , si $a \in B_{km}$ (boule de centre 0 dont les éléments ont une valuation supérieure à km), on a

$$v(a(n)) + n \geqslant km , \qquad \text{pour } n < km ,$$

donc

$$v(a(nm)) + nm \geqslant km , \qquad \text{pour } n < k ,$$

$$v(a(nm)) + n \geqslant km - n(m-1) > k(m - m + 1) = k ,$$

donc $U_m(a)$ est dans B_k , ce qui prouve la continuité. Le lemme 2 nous donne donc ce que nous cherchions. On peut remarquer que l'hypothèse "profini" ne sert ici qu'à assurer la continuité ; le lemme 2 ne faisant pas usage de cette continuité pour montrer que p conserve les mesures de Haar, notre démonstration marcherait donc pour un groupe abélien compact quelconque, puisque dans la suite nous ne nous servirons que du fait que U_m conserve la mesure.

LEMME 4. - Si G est un groupe abélien compact, et si T est un opérateur continu sur $L^2(G)$ tel qu'il existe $A \subset \hat{G}$ vérifiant

$$A \cap T\hat{G} = \emptyset , \qquad \hat{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (T^n A) \cup 0 ,$$

alors, pour tout f et $g \in L^2(G)$, on a

$$\lim_n \langle T^n f , g\rangle = \hat{f}(0)\, \hat{g}(0) .$$

Soit une fonction f de $L^2(G)$, comme $\hat{G}$ est discret, nous avons

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi = \sum_{\chi \in A} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(T^n \chi) + \hat{f}(0)$$

(les sommations se font dans $L^2(G)$), T étant continu, on en déduit

$$T^m f = \sum_{\chi \in A} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(T^n \chi)\, T^{m+n} \chi + \hat{f}(0) ,$$

ce qui nous donne

$$T^m f(\chi) = 0 , \qquad \text{si } \chi \notin T^m \hat{G} ,$$

$$= \hat{f}(T^{-m} \chi) , \qquad \text{si } \chi \in T^m \hat{G} .$$

Soit alors $g \in L^2(G)$, on a

$$\langle T^m f , g\rangle = \sum_{\chi\in\hat{G}} T^m f(\chi)\ \overline{\hat{g}(\chi)} = \hat{f}(0)\ \hat{g}(0) + \sum_{\chi\in A} \sum_{n=m}^{\infty} \overline{\hat{g}(T^n \chi)}\ \hat{f}(T^{n-m} \chi) \quad .$$

Or nous savons, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\Big(\sum_{\chi\in A} \sum_{n=m}^{\infty} \overline{\hat{g}(T^n \chi)}\ \hat{f}(T^{n-m} \chi)\Big)^2 \leqslant \sum_{\chi\in A} \sum_{n=m}^{\infty} |\hat{g}(T^n \chi)|^2 \sum_{\chi\in A} \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(T^n \chi)|^2 \quad ;$$

le deuxième terme est $\|f\|^2$, et le premier tend vers 0 ; nous avons donc démontré le lemme.

LEMME 5. - U_m <u>est fortement mélangeant.</u>

Si $f \in L^2(G^{\underset{\sim}{N}})$, nous posons

$$Tf(a) = f(U_m\ a) \quad .$$

U_m conservant la mesure, T est bien continu dans $L^2(G^{\underset{\sim}{N}})$ (et même isométrique) ; si χ est un caractère de $G^{\underset{\sim}{N}}$, nous avons

$$T\chi(a) = \langle\chi , U_m\ a\rangle = \prod_{n=0}^{N} \langle\chi(n) , a((n+1)m)\rangle$$

$$= \langle \sum_{n=0}^{N} \chi(n)\ x^{(n+1)m-1} , \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n\rangle \quad ,$$

ce qui montre que, si nous notons $P(x)$ un caractère de $\hat{G}[x]$, nous avons

$$T(P(x)) = x^{m-1}\ P(x^m) \quad ,$$

et donc, si nous posons

$$A = \{P(x) \in \hat{G}[x] ;\ \ xP(x) \neq Q(x^m)\} \quad ,$$

nous nous retrouvons dans les conditions du lemme 4 (tout polynôme non nul pouvant s'écrire d'une manière unique sous la forme $T^m(Q)$ avec $Q \in A$), le lemme 4 nous dit donc que

$$\lim_n \int_G f(U_m^n\ x)\ \overline{g(x)}\ dx = \hat{f}(0)\ \overline{\hat{g}(0)} \quad ,$$

c'est-à-dire que U_m est fortement mélangeant.

Or toute transformation fortement mélangeante est ergodique ([6]), et donc de moyenne presque-partout nulle, ce qui revient à dire que la suite $U_m(a)$ est équirépartie pour presque tout a . Ce qui démontre le théorème.

Remarquons que cette démonstration ne donne aucun renseignement sur l'ensemble exceptionnel de mesure nulle, et que celui-ci peut être "très gros".

Le fait que U_m est ergodique et continu entraîne d'autre part que l'ensemble $\{U_m(a)\}$ est, soit partout dense, soit a une adhérence de mesure nulle (si $F = \overline{\{U_m(a)\}}$, on a $U_m(F) \subset F$ puisque U_m est continu, et donc $U_m^{-1}(F) \supset F$; la suite $U_m^{-n}(F)$ est donc une suite de fermés emboités, tous de même mesure, donc leur réunion E est telle que $U_m^{-1}(E) = E$, et a la même mesure que F ; comme U_m est ergodique, il s'ensuit que E est de mesure, soit 0, soit 1, et qu'il en est de même de F ; enfin comme F est un fermé, il ne peut être de mesure 1 sans être égal à G^N).

3. Eléments qui ne sont pas U-normaux.

THÉORÈME 2. - Si A est l'anneau des entiers d'un p-corps K, alors les éléments de $A^N \cap K(x)$ ne sont pas U_p-normaux.

Rappelons tout d'abord que si K est de module p^r, alors la suite $a^{p^{rh}}$, où a appartient à A, tend vers la racine $(p^r - 1)$-ième de l'unité t qui vérifie $|a - t| < 1$. D'autre part, on sait que A est de Fatou ([3]), donc les fractions de $K(x)$ qui sont dans A^N ont des pôles qui sont des inverses d'entiers algébriques sur A (et donc inverses d'entiers dans une extension finie de K).

Si K est de caractéristique nulle, alors nous savons que si $a \in K(x)$,

$$a(n) = \sum_{i=1}^{N} p_i(n)\ \alpha_i^n + b(n) \quad ,$$

où les P_i sont des polynômes à coefficients dans K, les $b(n)$ les coefficients d'un polynôme, et les α_i les inverses des pôles de a. Si a appartient en outre à A^N, les α_i sont donc des entiers d'une extension finie de K, et les suites $\alpha_i^{p^h}$ n'ont qu'un nombre fini de valeurs limites ; il en résulte que

$$a(np^h) = \sum_{i=1}^{N} P_i(np^h)\ (\alpha_i^n)^{p^h} + b(np^h)$$

n'a qu'un nombre fini de valeurs limites (les $b(np^h)$ sont en effet nuls à partir d'un certain h, et $P_i(np^h)$ tend vers $P_i(0)$ puisque nous sommes dans un p-corps). Ceci signifie que la suite $U_p^h(a)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs limites, et n'est donc pas équirépartie.

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe en caractéristique p ; nous avons le résultat suivant.

LEMME 6. - Si A est un anneau de caractéristique p , alors

$$U_p^h \frac{1}{(x-a)^m} = \frac{(-a)^{p^h-s}}{(x-a^{p^h})^{k+1}} , \qquad \text{si } m = kp^h + s , \quad 1 \leqslant s \leqslant p^h .$$

Si f et g sont des éléments de $A^{\underline{N}}$, alors

$$U_p^h(f(x^{p^h})\ g(x)) = f(x)\ U_p^h\ g(x) ,$$

et comme

$$\frac{1}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{p^h-s}}{(x-a)^{p^h(k+1)}} ,$$

on a démontré le lemme en remarquant que $(x-a)^{p^h-s}$ est un polynôme de degré inférieur à p^h , donc que

$$U_p^h((x-a)^{p^h-s}) = (-a)^{p^h-s} .$$

Or pour h assez grand, on aura k = 0 ; donc, si on considère un élément de K(x) , et qu'on le décompose en éléments simples pour h assez grand, on aura, pour chacun de ces éléments simples,

$$U_p^h \frac{1}{(x-\alpha_i)^m} = \frac{(-\alpha_i)^{p^h-s}}{x-\alpha_i^{p^h}} = \left(\frac{-1}{\alpha_i}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha_i^{p^h}}\right)^n ,$$

car comme p est premier, $(-1)^{p^h} = -1$.

Les extensions d'un p-corps étant encore des p-corps, il en résulte que si $a \in K(x) \cap A^{\underline{N}}$, les α_i sont des inverses d'entiers d'un p-corps, et donc la suite $U_p^h(a)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs limites. Ce qui termine la démonstration du théorème 2.

Remarquons que cette démonstration marche aussi si on prend pour K un corps fini à p^r éléments, les pôles de la fraction sont alors dans une extension finie de K , c'est-à-dire dans un corps fini à p^{rs} éléments ; il est donc clair que les $\alpha_i^{p^h}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (rs au maximum), il en est de même de la suite $U_p^h(a)$. Nous allons, dans ce cas, améliorer ce résultat : dans la suite, K sera le corps à p^r éléments.

THÉORÈME 3. - Si a, élément de $K^{\underset{\sim}{N}}$, est algébrique sur $K(x)$, alors la suite $U_p^h(a)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Si nous nous plaçons dans l'anneau des séries formelles sur K, $K((x, y))$, il est clair que l'on peut définir deux transformations U_p portant sur x ou sur y, nous les noterons U_x et U_y. On voit immédiatement que U_x et U_y commutent.

LEMME 7. - Si P est un polynôme à deux variables, inversible dans $K((x, y))$, alors la suite

$$(U_x U_y)^h \left(y^k x^s \frac{\partial}{\partial y} P/P\right) = u_h$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Posons

$$P(x, y) = A_0(x)y^n + \dots + A_n(x) \quad .$$

Il existe alors une extension de $K(x)$ dans laquelle

$$P(x, y) = A_0(x) \prod_{i=1}^{n} (y - \theta_i) \quad ,$$

les θ_i n'étant pas forcément tous différents, on peut donc écrire

$$y^k x^s \frac{\partial P}{\partial y} /P = \sum_{i=1}^{n} \frac{y^k x^s}{y - \theta_i} \quad ,$$

et donc, dès que $p^h \geqslant k$,

$$U_y^h\left(y^k x^s \frac{P}{y}/P\right) = U_y^h\left(x^s \sum_{i=1}^{n} \frac{y^k - \theta_i^k}{y - \theta_i} + \frac{\theta_i^k}{y - \theta_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i^{k+p^h-1}}{y - \theta_i^{p^h}} x^s \quad ,$$

puisque $(y^k - \theta_i^k)/(y - \theta_i)$ est un polynôme de degré $k - 1$.

Si nous posons

$$Q_h(x^{p^h}, y^{p^h}) = P(x, y)^{p^h} \qquad \text{et} \qquad B_h(x^{p^h}) = A_0(x)^{p^h} \quad ,$$

nous savons qu'il n'y a que r polynômes Q_h différents au plus, et r polynômes B_h différents au plus ; de plus,

$$Q_h(x^{p^h}, y) = B_h(x^{p^h}) \prod_{i=1}^{n} (y - \theta_i^{p^h}) \quad ;$$

soit, d'autre part,

$$P_h(x\ ,\ y) = [\sum_{i=1}^{n} \theta_i^{k+p^h-1} \prod_{j\neq i} (y - \theta_j^{p^h})]\ x^h\ A_0^{(n+1)p^h} \quad ;$$

les coefficients du crochet, considérés comme polynôme en y , sont de degré au plus $(k + np^h - 1)$ en θ , comme ce sont des fonctions symétriques des θ_i , ils s'expriment en fonction des A_i/A_0 , ils sont même de degré au plus $k + np^h - 1$ en A_i/A_0 , la multiplication par $A_0^{(n+1)p^h}$ nous montre que P_h , en tant que polynôme en y , a des coefficients de degré au plus

$$(k + np^h - 1) \sup_i (\deg A_i) + (n + 1)p^h \deg A_0 + s \quad ;$$

il en résulte que

$$\deg_x U_x^h P_h(x\ ,\ y) \leqslant 2(n + 1) \sup_i (\deg A_i) + s/p^h \quad ,$$

donc est borné quel que soit h , comme nous sommes sur un corps fini P_h ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $K(x\ ,\ y)$ (on sait que $\deg_y(P_h) = n$).

Or nous avons

$$(U_x\ U_y)^h\ (x^s\ y^k\ \frac{\partial P}{\partial y}/P) = \left(U_x^h\left(\frac{B_h(x^{p^h})}{Q_h(x^{p^h}\ ,\ y)} \times \frac{P_h(x\ ,\ y)}{A_0^{(n+1)p^h}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{B_h^n(x\ ,\ y)\ Q_h(x\ ,\ y)}\ U_x^h\ P_h(x\ ,\ y) \quad .$$

Comme B_h , Q_h et $U_n^h\ P_h$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, nous avons bien démontré le lemme.

Nous poserons dans la suite

$$D(\sum a(m\ ,\ n)\ x^n\ y^m) = \sum a(n\ ,\ n)x^n \quad .$$

Nous avons donc d'une manière évidente

$$D(U_x\ U_y(a)) = U_p(D(a)) \quad .$$

LEMME 8. - <u>Tout élément de</u> $K^{\underline{N}}$, <u>qui est algébrique sur</u> $K(x)$, <u>est de la forme</u>

$R(x) + x^s\ \omega(x)$, <u>avec</u> $\omega(x) = D[y^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}/P\right)(xy\ ,\ y)]$ <u>et</u> $R(x) \in K(x)$.

Ce lemme a été démontré par FURSTENBERG [5].

Or, si nous posons $Q(x, y) = P(xy, y)$, nous avons

$$\frac{\partial P}{\partial y}(xy, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - \frac{x}{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad ;$$

il en résulte que tout élément φ de $\underset{\sim}{K}^N$, algébrique sur $K(x)$, vérifie

$$\varphi(x) = R(x) + D(y^{s+2}\, x^s \frac{\partial Q}{\partial y}/Q) - D(y^{s+1}\, x^{s+1} \frac{\partial Q}{\partial x}/Q) \quad .$$

Le théorème 3 se trouve donc démontré par le lemme 7, appliqué une fois en x, et une fois en y.

Nous pouvons maintenant remonter à des p-corps par le corollaire de la proposition 2.

COROLLAIRE. - Si A est l'anneau des entiers d'un p-corps, alors tout élément de $\underset{\sim}{A}^N$, qui est la diagonale d'une fraction rationnelle à k indéterminées, n'est pas U_p-normal.

En effet, les diagonales de fractions rationnelles sont, modulo p, des fonctions algébriques sur $K(x)$ ([5]).

Comme, sur $\underset{\sim}{C}$, il semble que, tout au moins dans certains cas, les diagonales de fractions rationnelles à trois variables aient un rapport avec les fonctions automorphes, ce corollaire pourrait peut-être fournir une approche de la conjecture d'ATKIN [2].

CONJECTURE. - Toute fonction f automorphe sur $\Gamma_0(p)$, qui a des coefficients entiers, et est entière (sans pôle dans le demi-plan de Poincaré), est telle que, si $p \leqslant 23$,

$$\lim_n U_p^n(f) = f(0) + k\Big(x + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) x^n\Big) \qquad \text{(limite prise dans } \underset{\sim}{Z}_p^N\text{)} \quad ,$$

où les $a(n)$ sont éléments de $\underset{\sim}{Z}_p$ indépendants de f, et vérifient

$$a(nq) - a(n)\, a(q) + q^{-1}\, a(n/q) = 0 \;, \qquad \text{pour tout } q \text{ premier } q \neq p \;,$$

$$a(np) - a(n)\, a(p) = 0 \quad .$$

Si $p > 23$, alors on peut supposer que tout se passe de la même manière, mais avec plusieurs valeurs limites dont les coefficients ont les mêmes propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[2] ATKIN (A. O. L.). - Congruence Hecke operators (non publié).

[3] BENZAGHOU (Benali). - Anneaux de Fatou, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 9, 8 p.

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 1-4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[5] FURSTENBERG (Harry). - Algebraic functions over finite fields, J. of algebra, t. 7, 1967, p. 271-277.

[6] HALMOS (Paul R.). - Lectures on ergodic theory. - Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1956 (Publications of the Mathematical Society of Japan, 3).

[7] MATHAN (Bernard de). - Approximation diophantienne dans un corps local (Thèse Sc. math. Caen, 1968).

[8] RUDIN (Walter). - Fourier analysis on groups. - New York, London, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

(Texte reçu le 8 décembre 1969)

Gilles CHRISTOL
Ass. Fac. Sc. Paris
27 rue Charles Fourier
75 - PARIS 13