François Dress

# Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring : $g(4) \leq 34$

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 15, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 15, 23 p.



13 avril 1970

# AMÉLIORATION DE LA MAJORATION DE $g(4)$ DANS LE PROBLÈME DE WARING : $g(4) \leqslant 34$

par François DRESS

## 1. Historique. Introduction.

Nous nous proposons de démontrer, par une méthode élémentaire, la majoration $g(4) \leqslant 34$ . Auparavant, nous allons rappeler les résultats obtenus jusqu'ici dans le problème de Waring pour les puissances quatrièmes.

On désigne traditionnellement par $g(k)$ le minimum de $p$ , tel que tout entier positif soit somme de $p$ puissances $k$-ièmes positives ou nulles. Historiquement, et si l'on excepte le théorème des quatre carrés de Lagrange, le cas des puissances quatrièmes fut le premier où l'existence du nombre $g(k)$ fut établie. LIOUVILLE ([7], 1859) démontra l'existence de $g(4)$ , et donna la majoration $g(4) \leqslant 53$ . Nous allons rapporter sa méthode, qui est d'ailleurs celle que nous utiliserons dans notre démonstration, avec bien sûr certains raffinements.

On utilise l'identité

$$6(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 = \sum_{i<j} (a_i - a_j)^4 + \sum_{i<j} (a_i + a_j)^4$$

$$= B_{12} \ ,$$

en désignant par $B_p$ un entier qui est somme de $p$ bicarrés [1]. Comme tout entier $a$ est somme de 4 carrés, on obtient ainsi

$$6a^2 = B_{12} \ , \qquad \text{pour tout } a \ ,$$

puis

$$6m = 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = B_{48} \ , \qquad \text{pour tout } m \ ,$$

et enfin, comme tout entier $n$ est de la forme $6m + h.1^4$ $(h = 0 , 1 , \ldots , 5)$ ,

$$n = B_{53} \ , \quad \text{pour tout entier } n \ , \qquad \text{i. e. } g(4) \leqslant 53 \ .$$

Pour améliorer ce résultat, on peut jouer essentiellement sur deux étapes de la

---

(1) En fait, l'identité que nous avons donnée ici est due à LUCAS, mais celle qu'utilisait LIOUVILLE lui est équivalente.

démonstration : tout $a$ qui n'est pas de la forme $4^h(16k + 14)$ peut s'écrire $a = a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2$, de sorte que l'un des bicarrés est nul dans l'identité, ce qui donne $6a^2 = B_{11}$ ; et tout $m$ qui n'est pas de la forme $4^h(8k + 7)$ est somme de 3 carrés. En combinant, on obtient le résultat suivant :

Tout entier de la forme $48p + 18$ est $B_{33}$ .

En effet :

$$\begin{aligned} 48p + 18 &= 6(8p + 3) \\ &= 6(a^2 + b^2 + c^2) \ . \end{aligned}$$

Une simple étude de congruences modulo 8 montre alors que

$$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 8 \ ,$$

d'où

$$a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 2 \ .$$

Il s'ensuit que $a$ est de la forme $a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2$ (et de même pour $b$ et $c$ ), ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} 48p + 18 &= 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 \\ &= B_{11} + B_{11} + B_{11} = B_{33} \ . \end{aligned}$$

Naturellement, cette méthode ne donne pas de résultats aussi bons sur les autres $48p + t$, mais cette idée a permis d'améliorer considérablement la majoration de Liouville. Les valeurs successives ont été 47 (RÉALIS [10], 1878), 45 (LUCAS [8], 1878), 41 (LUCAS [9], 1878), 39 (FLECK [4], 1878), 38 (LANDAU [6], 1907), et enfin 37 (WIEFERICH [11], 1909). Il n'y a pas depuis cette dernière date de résultat meilleur obtenu par une méthode "élémentaire".

La meilleure majoration actuelle est $g(4) \leqslant 35$ (DICKSON [2], 1933), qui utilise le résultat suivant fourni par la théorie asymptotique :

Tout $n$ supérieur à $10^{10^{3,3}}$ est $B_{35}$ ,

et démontre que les entiers inférieurs sont également $B_{35}$ .

A ce propos, il convient de signaler qu'il n'y a aucun espoir de déterminer la valeur exacte de $g(4)$ en utilisant les constantes fournies par la théorie asymptotique et actuellement connues. AULUCK ([1], 1940) a établi que

Tout $n$ supérieur à $10^{10^{88,39}}$ est $B_{19}$ .

Nous terminerons cette introduction en mentionnant la minoration

$$g(4) \geq 19 \quad .$$

Des tables numériques ont été faites jusqu'à 158 000 (BRETSCHNEIDER, puis CHANDLER). Les seuls nombres dans ces tables qui nécessitent 19 bicarrés sont 79 , 159 , 239 , 319 , 399 , 479 et 559 ; en outre, de 13 800 à 158 000 , tous les nombres sont $B_{16}$ . Il est très vraisemblable que la valeur exacte de $g(4)$ est 19 .

## 2. Principe de la démonstration.

Nous avons vu dans l'introduction que, pour certaines valeurs de l'entier $a$ , on a $6a^2 = B_{11}$ . Nous montrerons que, pour certaines valeurs de $a$ et de $k$ , on a $6a^2 = k^4 + B_{11}$ , i. e. $6a^2 - k^4 = B_{11}$ . Autrement dit, on "élargit" le champ des entiers qui sont $B_{11}$ et, par conséquent, on accroit considérablement le nombre de $t$ tels que $48p + t$ soit $B_{33}$ . Nous allons donner immédiatement un exemple.

Parmi les résultats qui seront établis au paragraphe 3, on trouvera les deux suivants (lemme 3) :

$$6(2a + 1)^2 = B_{11} , \qquad \text{pour tout } a ,$$

$$6(2a + 1)^2 = 1 + B_{11} , \qquad \text{pour tout } a .$$

On considère alors un entier $48p + 18$ , que l'on peut écrire (cf. § 1)

$$\begin{aligned} 48p + 18 &= 6(2a + 1)^2 + 6(2b + 1)^2 + 6(2c + 1)^2 \\ &= (\alpha + B_{11}) + (\beta + B_{11}) + (\gamma + B_{11}) \quad , \end{aligned}$$

avec $\alpha , \beta , \gamma = 0$ ou $1$ au choix. On en déduit immédiatement que $48p + t = B_{33}$ , pour $t = 15 , 16 , 17$ et $18$ , ce qui constitue une amélioration très sensible du résultat démontré au paragraphe 1.

## 3. Lemmes préliminaires.

On aura tout d'abord besoin de quelques résultats qui découlent de la théorie classique des sommes de 3 carrés.

LEMME 1. - Pour tout $8p + 2 , 3 , 5 , 6$ , il existe une décomposition en somme de 3 carrés, et elle est de la forme suivante :

$$8p + 2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c)^2 \ ,$$
$$8p + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2 \ ,$$
$$8p + 5 = (2a + 1)^2 + (4b + 2)^2 + (4c)^2 \ ,$$
$$8p + 6 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c + 2)^2 \ .$$

LEMME 2. - Pour tout $8p + 1$ qui n'est pas un carré parfait, et pour tout $16p + 1$ qui n'est pas un carré parfait, il existe une décomposition en somme de 3 carrés qui soit de la forme suivante :

$$8p + 1 = (2a + 1)^2 + (4b + 2)^2 + (4c + 2)^2 \ ,$$
$$16p + 1 = (8a \pm 3)^2 + (4b + 2)^2 + (4c + 2)^2 \ .$$

Le lemme 2 est la conséquence immédiate d'un théorème de GLAISHER ([5], p. 94), qui s'énonce ainsi : Si $8p + 1$ possède $R_1$ représentations de la forme

$$(2a + 1)^2 + (4b)^2 + (4c)^2 \ ,$$

et $R_2$ représentations de la forme

$$(2a + 1)^2 + (4b + 2)^2 + (4c + 2)^2 \ ,$$

alors $R_1 = R_2$, à moins que $8p + 1$ ne soit un carré parfait. La démonstration de GLAISHER est tout-à-fait élémentaire, s'appuyant sur l'identité

$$(x + x^9 + x^{25} + x^{49} + \dots)(1 + 2x^4 + 2x^{16} + 2x^{36} + \dots)(1 - 2x^4 + 2x^{16} - 2x^{36} + \dots)$$
$$= x - 3x^9 + 5x^{25} - 7x^{49} + \dots \ .$$

LEMME 3. - Pour tout entier impair $2a + 1$, et pour tout $k$ tel que $2a + 1 > k^2/2$, on a

$$6(2a + 1)^2 = k^4 + B_{11} \ .$$

Si $k^2 < 4a + 2$, on peut écrire $4a + 2 = m + k^2$, avec $m \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$. Alors $m$ est somme de 3 carrés, d'où

$$4a + 2 = x^2 + y^2 + z^2 + k^2 \ .$$

On utilise alors l'identité de Liouville :

$$24(4a+2)^2 = 24(x^2+y^2+z^2+k^2)^2$$

$$= (x+y+z+k)^4 + (x+y+z-k)^4 + (x+y-z+k)^4$$
$$+ (x-y+z+k)^4 + (x+y-z-k)^4 + (x-y+z-k)^4$$
$$+ (x-y-z+k)^4 + (x-y-z-k)^4$$
$$+ (2x)^4 + (2y)^4 + (2z)^4 + (2k)^4$$

$$= (2k)^4 + B_{11} \quad ,$$

et on remarque que tous les bicarrés qui figurent sont pairs, ce qui permet de diviser par $2^4$ , et d'obtenir le résultat cherché,

$$6(2a+1)^2 = k^4 + B_{11} \quad .$$

On peut enfin rechercher si la condition théorique $2a+1 > k^2/2$ est la meilleure, et on trouve :

$$\begin{aligned} 6(2a+1)^2 &= B_{11} \ , && \text{pour } 2a+1 \text{ quelconque} \ , \\ &= 1 + B_{11} \ , && \text{pour } 2a+1 \text{ quelconque} \ , \\ &= 16 + B_{11} \ , && \text{si } 2a+1 \geqslant 3 \ , \\ &= 81 + B_{11} \ , && \text{si } 2a+1 \geqslant 5 \ , \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

LEMME 4. - Pour tout entier de la forme $4b+2$ , et pour tout entier impair $2\ell+1$ tel que $4b+2 > (2\ell+1)^2/2$ , on a

$$6(4b+2)^2 = (2\ell+1)^4 + B_{11} \quad .$$

Si $(2\ell+1)^2 < 8b+4$ , on peut écrire $8b+4 = m + (2\ell+1)^2$ , avec $m \equiv 3 \pmod 8$ . Alors $m$ est somme de $3$ carrés, d'où

$$8b+4 = x^2 + y^2 + z^2 + (2\ell+1)^2 \quad .$$

On utilise alors, comme pour le lemme 3, l'identité de Liouville, qui donne :

$$24(8b+4)^2 = (4\ell+2)^4 + B_{11} \quad ,$$

et on remarque que tous les bicarrés qui figurent sont pairs, ce qui permet, comme précédemment, de diviser par $2^4$ , et d'obtenir le résultat cherché,

$$6(4b + 2)^2 = (2\ell + 1)^4 + B_{11} .$$

On peut ici aussi rechercher si la condition théorique $4b + 2 > (2\ell + 1)^2/2$ est la meilleure, et on trouve :

$$\begin{aligned} 6(4b + 2)^2 &= 1 + B_{11} , && \text{pour } 4b + 2 \text{ quelconque} , \\ &= 81 + B_{11} , && \text{si } 4b + 2 \geqslant 6 , \\ &= 625 + B_{11} , && \text{si } 4b + 2 \geqslant 14 , \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

<u>Remarque</u>. - Les lemmes 4 et 3 seront également utilisés sous la forme :

$$24(2b + 1)^2 = (2\ell + 1)^4 + B_{11} ,$$

$$24(4a + 2)^2 = (2k)^4 + B_{11} ,$$

(sous réserve des inégalités adéquates).

LEMME 5. - <u>Pour tout entier impair de la forme</u> $8a \pm 3$ , <u>on a</u>

$$24(8a \pm 3)^2 = B_{11} .$$

Cela découle encore de l'identité de Lagrange, $8a \pm 3$ étant somme de $3$ carrés.

4. Démonstration de $g(4) \leqslant 34$ .

THÉORÈME. - <u>Tout entier de la forme</u> $16n + t$ <u>est</u> :

$$B_{33} , \quad \text{si } t = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 14 , 15 ,$$

$$B_{34} , \quad \text{si } t = 6 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 .$$

COROLLAIRE. - $g(4) \leqslant 34$ .

La démonstration s'effectue en indiquant, pour chaque cas, une "marche à suivre" dans l'esprit de l'exemple que nous avons présenté au paragraphe 2. Cela ne sera pas très compliqué, quoique fastidieux (on sera obligé d'utiliser des $48p + t$ , voire des $192p + t$ et des $384p + t$ ).

La principale difficulté surgira lors de l'application des lemmes 3 et 4, qui nécessite le respect des inégalités que nous avons indiquées. Il n'est absolument pas question de reproduire ici l'étude complète, qui demande une cinquantaine de pages, mais nous étudierons en détail, au paragraphe prochain, trois cas particuliers qui montreront de quelle manière il est possible de résoudre les problèmes soulevés (et que nous avons, bien sûr, tous résolus).

- $16n + 15 = B_{33}$

  qu'on décompose en $48p + 15 = B_{33}$

  $48p + 31 = B_{33}$

  $48p + 47 = B_{33}$

$$(48p + 15) + 1 + 1 + 1 = 48p + 18 = 6(8p + 3)$$
$$8p + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$$
$$6(8p + 3) = (1 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

$$(48p + 31) + 81 + 1 + 1 = 48q + 18 = 6(8q + 3)$$
$$8q + 3 = \ldots$$
$$6(8q + 3) = (81 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

$$(48p + 47) + 81 + 81 + 1 = 48q + 18 = 6(8q + 3)$$
$$8q + 3 = \ldots$$
$$6(8q + 3) = (81 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

- $16n = B_{33}$

  qu'on décompose en $48p + 0 = B_{33}$

  $48p + 16 = B_{33}$

  $48p + 32 = B_{33}$

$$(48p + 0) + 16 + 1 + 1 = 48p + 18 = 6(8p + 3)$$
$$8p + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$$
$$6(8p + 3) = (16 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

$$(48p + 16) + 1 + 1 + 0 = 48p + 18 = 6(8p + 3)$$
$$8p + 3 = \ldots$$
$$6(8p + 3) = (1 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{11}$$

$$(48p + 32) + 81 + 81 + 16 = 48q + 18 = 6(8q + 3)$$

$$8q + 3 = \dots$$

$$6(8q + 3) = (81 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + (16 + B_{11})$$

- $16n + 1 = B_{33}$

qu'on décompose en $48p + 1 = B_{33}$

$48p + 17 = B_{33}$

$48p + 33 = B_{33}$

$$(48p + 1) + 16 + 1 + 0 = 48p + 18 = 6(8p + 3)$$

$$8p + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$$

$$6(8p + 3) = (16 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{11}$$

$$(48p + 17) + 1 + 0 + 0 = 48p + 18 = 6(8p + 3)$$

$$8p + 3 = \dots$$

$$6(8p + 3) = (1 + B_{11}) + B_{11} + B_{11}$$

$$(48p + 33) + 16 + 16 + 1 = 48q + 18 = 6(8q + 3)$$

$$8q + 3 = \dots$$

$$6(8q + 3) = (16 + B_{11}) + (16 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

- $16n + 2 = B_{33}$

qu'on décompose en $48p + 2 = B_{33}$

$48p + 18 = B_{33}$

$48p + 34 = B_{33}$

$$(48p + 2) + 16 + 0 + 0 = 48p + 18 = 6(8p + 3)$$

$$8p + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$$

$$6(8p + 3) = (16 + B_{11}) + B_{11} + B_{11}$$

$$(48p + 18) + 0 + 0 + 0 = 48p + 18 = 6(8p + 3)$$

$$8p + 3 = \dots$$

$$6(8p + 3) = B_{11} + B_{11} + B_{11}$$

$$(48p + 34) + 16 + 16 + 0 = 48q + 18 = 6(8q + 3)$$

$$8q + 3 = \ldots$$

$$6(8q + 3) = (16 + B_{11}) + (16 + B_{11}) + B_{11}$$

- $16n + 3 = B_{33}$

qu'on décompose en $48p + 3 = B_{33}$

$$48p + 19 = B_{33}$$

$$48p + 35 = B_{33}$$

$$(48p + 3) + 16 + 16 + 1 = 48p + 36 = 6(8p + 6)$$

$$8p + 6 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c + 2)^2$$

$$6(8p + 6) = (16 + B_{11}) + (16 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

$$(48p + 19) + 16 + 0 + 1 = 48p + 36 = 6(8p + 6)$$

$$8p + 6 = \ldots$$

$$6(8p + 6) = (16 + B_{11}) + B_{11} + (1 + B_{11})$$

$$(48p + 35) + 0 + 0 + 1 = 48p + 36 = 6(8p + 6)$$

$$8p + 6 = \ldots$$

$$6(8p + 6) = B_{11} + B_{11} + (1 + B_{11})$$

- $16n + 4 = B_{33}$

qu'on décompose en $48p + 4 = B_{33}$

$$48p + 20 = B_{33}$$

$$48p + 36 = B_{33}$$

$$(48p + 4) + 0 + 1 + 1 = 48p + 6 = 6(8p + 1)$$

On utilise alors le lemme 2 :

ou $8p + 1 = (2a + 1)^2$

$$6(8p + 1) = 16 + B_{11} = 0 + 1 + 1 + B_{11} + 14$$
$$= 0 + 1 + 1 + B_{11} + B_{14}$$

ou $8p + 1 = (2a + 1)^2 + (4b + 2)^2 + (4c + 2)^2$

$$6(8p + 1) = B_{11} + (1 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

$$(48p + 20) + 0 + 81 + 1 = 48q + 6 = 6(8q + 1)$$

ou $8q + 1 = \dots$

$$6(8q + 1) = 256 + B_{11} = 0 + 81 + 1 + B_{11} + 174$$
$$= 0 + 81 + 1 + B_{11} + B_{14}$$

ou $8q + 1 = \dots$

$$6(8q + 1) = B_{11} + (81 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

$$(48p + 36) + 16 + 1 + 1 = 48q + 6 = 6(8q + 1)$$

ou $8q + 1 = \dots$

$$6(8q + 1) = 81 + B_{11} = 16 + 1 + 1 + B_{11} + 63$$
$$= 16 + 1 + 1 + B_{11} + B_{18}$$

ou $8q + 1 = \dots$

$$6(8q + 1) = (16 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + (1 + B_{11})$$

- $16n + 5 = B_{33}$

qu'on décompose en

| | |
|---|---|
| $192p + 5 = B_{33}$ | $192p + 101 = B_{33}$ |
| $192p + 21 = B_{33}$ | $192p + 117 = B_{33}$ |
| $192p + 37 = B_{33}$ | $192p + 133 = B_{33}$ |
| $192p + 53 = B_{33}$ | $192p + 149 = B_{33}$ |
| $192p + 69 = B_{33}$ | $192p + 165 = B_{33}$ |
| $192p + 85 = B_{33}$ | $192p + 181 = B_{33}$ |

$$(192p + 5) + 2401 + 81 + 81 = 192q + 72 = 24(8q + 3)$$

$$8q + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$$

$$24(8q + 3) = (2401 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + (81 + B_{11})$$

$$(192p + 21) + 81 + 81 + 81 = 192q + 72 = 24(8q + 3)$$

$$8q + 3 = \dots$$

$$24(8q + 3) = (81 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + (81 + B_{11})$$

$$(192p + 37) + 2401 + 625 + 81 = 192q + 72 = 24(8q + 3)$$

$$8q + 3 = \dots$$

$$24(8q + 3) = (2401 + B_{11}) + (625 + B_{11}) + (81 + B_{11})$$

$$(192p + 53) + 625 + 81 + 81 = 192q + 72 = 24(8q + 3)$$

...

$$(192p + 69) + 1 + 1 + 1 = 192p + 72 = 24(8p + 3)$$

...

$$(192p + 85) + 625 + 625 + 81 = 192q + 72 = 24(8q + 3)$$

...

$$(192p + 101) + 81 + 81 + 1 = 192q + 72 = \dots$$

...

$$(192p + 117) + 625 + 625 + 625 = 192q + 72 = \dots$$

...

$$(192p + 133) + 625 + 81 + 1 = 192q + 72 = \dots$$

...

$$(192p + 149) + 6561 + 81 + 1 = 192q + 72 = \dots$$

...

$$(192p + 165) + 2401 + 1 + 1 = 192q + 72 = \dots$$

...

$$(192p + 181) + 81 + 1 + 1 = 192q + 72 = \dots$$

...

- $16n + 6 = B_{34}$

  découle du résultat précédent $16n + 5 = B_{33}$

- $16n + 7 = B_{33}$

  qu'on décompose en

| | |
|---|---|
| $192p + 7 = B_{33}$ | $192p + 103 = B_{33}$ |
| $192p + 23 = B_{33}$ | $192p + 119 = B_{33}$ |
| $192p + 39 = B_{33}$ | $192p + 135 = B_{33}$ |
| $192p + 55 = B_{33}$ | $192p + 151 = B_{33}$ |
| $192p + 71 = B_{33}$ | $192p + 167 = B_{33}$ |
| $192p + 87 = B_{33}$ | $192p + 183 = B_{33}$ |

$$(192p + 7) + 1 + 16 + 0 = 192p + 24 = 24(8p + 1)$$

On utilise alors le lemme 2 :

ou $8p + 1 = (2a + 1)^2$

$$\begin{aligned} 24(8p + 1) &= 81 + B_{11} = 1 + 16 + 0 + B_{11} + 64 \\ &= 1 + 16 + 0 + B_{11} + B_4 \end{aligned}$$

ou $8p + 1 = (2a+1)^2 + (4b+2)^2 + (4c+2)^2$

$24(8p + 1) = (1 + B_{11}) + (16 + B_{11}) + B_{11}$

$(192p + 23) + 1 + 0 + 0 = 192p + 24 = 24(8p + 1)$

ou $8p + 1 = \ldots$

$24(8p + 1) = 1 + B_{11} = 1 + 0 + 0 + B_{11}$

ou $8p + 1 = \ldots$

$24(8p + 1) = (1 + B_{11}) + B_{11} + B_{11}$

$(192p + 39) + 625 + 256 + 256 = 192q + 24 = 24(8q + 1)$

ou $8q + 1 = \ldots$

$$\begin{aligned} 24(8q + 1) = 2401 + B_{11} &= 625 + 256 + 256 + B_{11} + 1264 \\ &= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{16} \end{aligned}$$

ou $8q + 1 = \ldots$

$24(8q + 1) = (625 + B_{11}) + (256 + B_{11}) + (256 + B_{11})$

$(192p + 55) + 81 + 256 + 16 = 192q + 24 = 24(8q + 1)$

ou ...

ou ...

$(192p + 71) + 81 + 256 + 0 = 192q + 24 = \ldots$

ou ...

ou ...

$(192p + 87) + 1 + 256 + 256 = 192q + 24 = \ldots$

...

$(192p + 103) + 81 + 16 + 16 = 192q + 24 = \ldots$

...

$(192p + 119) + 81 + 16 + 0 = 192q + 24 = \ldots$

...

$(192p + 135) + 81 + 0 + 0 = 192q + 24 = \ldots$

...

$(192p + 151) + 1 + 256 + 0 = 192q + 24 = \ldots$

...

$(192p + 167) + 625 + 0 + 0 = 192q + 24 = \ldots$

...

$$(192p + 183) + 1 + 16 + 16 = 192q + 24 = \dots$$

$\dots$

- $16n + 8 = B_{34}$

découle du résultat précédent $16n + 7 = B_{33}$ .

De plus, on a $16n + 8 = B_{33}$ dans les cas suivants :

$$384p + 8 = B_{33}$$
$$384p + 24 = B_{33}$$
$$384p + 136 = B_{33}$$
$$384p + 152 = B_{33}$$
$$384p + 248 = B_{33}$$
$$384p + 264 = B_{33}$$
$$384p + 376 = B_{33}$$

$$(384p + 8) + 0 + 16 + 0 = 384p + 24 = 24(16p + 1) .$$

On utilise alors le lemme 2 :

ou $\quad 16p + 1 = (2a + 1)^2$

$$24(16p + 1) = 81 + B_{11} = 0 + 16 + 0 + B_{11} + 65$$
$$= 0 + 16 + 0 + B_{11} + B_5$$

ou $\quad 16p + 1 = (8a \pm 3)^2 + (4b + 2)^2 + (4c + 2)^2$

$$24(16p + 1) = B_{11} + (16 + B_{11}) + B_{11}$$

$$(384p + 24) + 0 + 0 + 0 = 384p + 24 = 24(16p + 1)$$

ou $\quad 16p + 1 = \dots$

$$24(16p + 1) = 1 + B_{11} = 0 + 0 + 0 + B_{11} + 1$$

ou $\quad 16p + 1 = \dots$

$$24(16p + 1) = B_{11} + B_{11} + B_{11}$$

$$(384p + 136) + 0 + 256 + 16 = 384q + 24 = 24(16q + 1)$$

ou $\quad \dots$

ou $\quad \dots$

$$(384p + 152) + 0 + 256 + 0 = 384q + 24 = \dots$$

$\dots$

$(384p + 248) + 0 + 1296 + 16 = 384q + 24 = \ldots$

$\ldots$

$(384p + 264) + 0 + 1296 + 0 = 384q + 24 = \ldots$

$\ldots$

$(384p + 376) + 0 + 16 + 16 = 384q + 24 = \ldots$

$\ldots$

- $16n + 9 = B_{34}$

découle du résultat précédent

$$384p + 8 \,,\ 24 \,,\ 136 \,,\ 152 \,,\ 248 \,,\ 264 \,,\ 376 = B_{33} .$$

En effet :

$$\begin{aligned}
384p + 9 &= (384p + 8) + 1 \\
384p + 25 &= (384p + 24) + 1 \\
384p + 41 &= (384q + 8) + 6\,561 \\
384p + 57 &= (384q + 24) + 6\,561 \\
384p + 73 &= (384q + 376) + 81 \\
384p + 89 &= (384p + 8) + 81 \\
384p + 105 &= (384p + 24) + 81 \\
384p + 121 &= (384q + 264) + 625 \\
384p + 137 &= (384p + 136) + 1 \\
384p + 153 &= (384p + 152) + 1 \\
384p + 169 &= (384q + 136) + 6\,561 \\
384p + 185 &= (384q + 152) + 6\,561 \\
384p + 201 &= (384q + 152) + 14\,641 \\
384p + 217 &= (384p + 136) + 81 \\
384p + 233 &= (384p + 152) + 81 \\
384p + 249 &= (384p + 248) + 1 \\
384p + 265 &= (384p + 264) + 1 \\
384p + 281 &= (384q + 248) + 6\,561 \\
384p + 297 &= (384q + 264) + 6\,561 \\
384p + 313 &= (384q + 264) + 14\,641
\end{aligned}$$

$$384p + 329 = (384p + 248) + 81$$
$$384p + 345 = (384p + 264) + 81$$
$$384p + 361 = (384q + 264) + 2\,401$$
$$384p + 377 = (384p + 376) + 1$$

- $16n + 10 = B_{34}$

  qu'on décompose en $48p + 10 = B_{34}$

  $48p + 26 = B_{34}$

  $48p + 42 = B_{34}$

$$(48p + 10) + 1 + 1 + 0 = 48p + 12 = 6(8p + 2)$$
$$8p + 2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c)^2$$
$$6(8p + 2) = (1 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12}$$

$$(48p + 26) + 81 + 1 + 0 = 48q + 12 = 6(8q + 2)$$
$$8q + 2 = \ldots$$
$$6(8q + 2) = (81 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12}$$

$$(48p + 42) + 81 + 81 + 0 = 48q + 12 = 6(8q + 2)$$
$$8q + 2 = \ldots$$
$$6(8q + 2) = (81 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + B_{12}$$

- $16n + 11 = B_{34}$

  qu'on décompose en $48p + 11 = B_{34}$

  $48p + 27 = B_{34}$

  $48p + 43 = B_{34}$

$$(48p + 11) + 1 + 0 + 0 = 48p + 12 = 6(8p + 2)$$
$$8p + 2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c)^2$$
$$6(8p + 2) = (1 + B_{11}) + B_{11} + B_{12}$$

$$(48p + 27) + 81 + 0 + 0 = 48q + 12 = 6(8q + 2)$$
$$8q + 2 = \ldots$$
$$6(8q + 2) = (81 + B_{11}) + B_{11} + B_{12}$$

$$(48p + 43) + 16 + 1 + 0 = 48q + 12 = 6(8q + 2)$$

$$8q + 2 = \dots$$

$$6(8q + 2) = (16 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12}$$

- $16n + 12 = B_{34}$

qu'on décompose en $48p + 12 = B_{34}$

$$48p + 28 = B_{34}$$

$$48p + 44 = B_{34}$$

$$(48p + 12) + 0 + 0 + 0 = 48p + 12 = 6(8p + 2)$$

$$8p + 2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c)^2$$

$$6(8p + 2) = B_{11} + B_{11} + B_{12}$$

$$(48p + 28) + 1 + 1 + 0 = 48p + 30 = 6(8p + 5)$$

$$8p + 5 = (2a + 1)^2 + (4b + 2)^2 + (4c)^2$$

$$6(8p + 5) = (1 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12}$$

$$(48p + 44) + 16 + 0 + 0 = 48q + 12 = 6(8q + 2)$$

$$8q + 2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c)^2$$

$$6(8q + 2) = (16 + B_{11}) + B_{11} + B_{12}$$

- $16n + 13 = B_{34}$

qu'on décompose en $48p + 13 = B_{34}$

$$48p + 29 = B_{34}$$

$$48p + 45 = B_{34}$$

$$(48p + 13) + 16 + 1 + 0 = 48p + 30 = 6(8p + 5)$$

$$8p + 5 = (2a + 1)^2 + (4b + 2)^2 + (4c)^2$$

$$6(8p + 5) = (16 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12}$$

$$(48p + 29) + 0 + 1 + 0 = 48p + 30 = 6(8p + 5)$$

$$8p + 5 = \dots$$

$$6(8p + 5) = B_{11} + (1 + B_{11}) + B_{12}$$

$$(48p + 45) + 0 + 81 + 0 = 48q + 30 = 6(8q + 5)$$

$$8q + 5 \;= \ldots$$

$$6(8q + 5) = \quad B_{11} \quad + (81 + B_{11}) + \quad B_{12}$$

- $16n + 14 = B_{33}$

qu'on décompose en $192p + 14 = B_{33}$ $\quad 192p + 110 = B_{33}$

$192p + 30 = B_{33}$ $\quad 192p + 126 = B_{33}$

$192p + 46 = B_{33}$ $\quad 192p + 142 = B_{33}$

$192p + 62 = B_{33}$ $\quad 192p + 158 = B_{33}$

$192p + 78 = B_{33}$ $\quad 192p + 174 = B_{33}$

$192p + 94 = B_{33}$ $\quad 192p + 190 = B_{33}$

$$(192p + 14) + 625 + 81 + 0 = 192q + 144 = 24(8q + 6)$$

$$8q + 6 \;= (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (4c + 2)^2$$

$$24(8q + 6) = (625 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + \quad B_{11}$$

$$(192p + 30) + 625 + 1 + 256 = 192q + 144 = 24(8q + 6)$$

$$8q + 6 \;= \ldots$$

$$24(8q + 6) = (625 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + (256 + B_{11})$$

$$(192p + 46) + 81 + 1 + 16 = 192p + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 62) + 81 + 1 + 0 = 192p + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 78) + 625 + 1 + 16 = 192q + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 94) + 625 + 1 + 0 = 192q + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 110) + 81 + 81 + 256 = 192q + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 126) + 1 + 1 + 16 = 192p + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 142) + 1 + 1 + 0 = 192p + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 158) + 81 + 81 + 16 = 192q + 144 = \ldots$$

...

$$(192p + 174) + 81 + 81 + 0 = 192q + 144 = \dots$$

$$\dots$$

$$(192p + 190) + 81 + 1 + 256 = 192q + 144 = \dots$$

$$\dots$$

## 5. Difficultés liées à l'application des lemmes 3 et 4.

Les difficultés rencontrées peuvent se classer schématiquement en trois types, pour chacun desquels nous traiterons un exemple.

Premier exemple : $48p + 32 = B_{33}$ , qu'on a traité de la manière suivante :

$$(48p + 32) + 81 + 81 + 16 = 48q + 18 = 6(8q + 3)$$

$$8q + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$$

$$6(8q + 3) = (81 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + (16 + B_{11})$$

(on supposera $a \geqslant b \geqslant c$ ) .

D'après le lemme 3, cela n'est possible que si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$2a + 1 \geqslant 5 \quad ,$$

$$2b + 1 \geqslant 5 \quad ,$$

$$2c + 1 \geqslant 3 \quad .$$

Il faut donc étudier séparément les cas particuliers suivants :

1° $2a + 1 \leqslant 3$ . Cela ne peut se produire pour aucune valeur positive du nombre $48p + 32$ ( $8q + 3 \leqslant 27$ entraîne $48p + 32 \leqslant - 16$ ).

2° $2a + 1 \geqslant 5$ , $2b + 1 = 3$ , $2c + 1 = 3$ ou $1$ ,

$2a + 1 \geqslant 5$ , $2b + 1 = 1$ , $2c + 1 = 1$ , c'est-à-dire $8q + 3 = (2a + 1)^2 + 18$ ou $10$ ou $2$ .

Si $2a + 1 = 5$ , cela correspond à deux valeurs positives $48p + 32 = 80$ ou $32$ , qui sont respectivement $B_5$ et $B_2$ .

Si $2a + 1 \geqslant 7$ , on peut alors utiliser différemment le lemme 3 :

$$6(8q + 3) = (256 + B_{11}) + 108 \quad \text{ou} \quad 60 \quad \text{ou} \quad 12$$

$$= 81 + 81 + 16 + B_{11} + 186 \quad \text{ou} \quad 138 \quad \text{ou} \quad 90$$

$$= 81 + 81 + 16 + B_{11} + B_{11} \quad \text{ou} \quad B_{13} \quad \text{ou} \quad B_{10} \quad .$$

3° $2a + 1 \geqslant 5$ , $2b + 1 \geqslant 5$ , $2c + 1 = 1$ .

Si $2a + 1 = 5$ , cela correspond, outre les valeurs déjà vues au cas précédent, à $48p + 32 = 128 = B_8$ .

Si $2a + 1 \geqslant 7$ , on peut alors utiliser différemment le lemme 3 :

$$\begin{aligned} 6(8q + 3) &= (256 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + 6 \\ &= 81 + 81 + 16 + B_{11} + B_{11} + 165 \\ &= 81 + 81 + 16 + B_{11} + B_{11} + B_5 \ . \end{aligned}$$

<u>Deuxième exemple</u> : $192p + 39 = B_{33}$ , qu'on a traité de la manière suivante :

$$(192p + 39) + 625 + 256 + 256 = 192q + 24 = 24(8q + 1)$$

$$\text{ou} \quad 8q + 1 = (2a + 1)^2$$

$$\begin{aligned} 24(8q + 1) = 2401 + B_{11} &= 625 + 256 + 256 + B_{11} + 895 \\ &= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{15} \ . \end{aligned}$$

Cela n'est possible que si $2a + 1 \geqslant 11$ , mais $2a + 1 \leqslant 9$ correspond aux seules valeurs positives $192p + 39 = 807$ ou $39$ , qui sont respectivement $B_8$ et $B_9$ .

$$\text{ou} \quad 8q + 1 = (2a + 1)^2 + (4b + 2)^2 + (4c + 2)^2$$

$$24(8q + 1) = (625 + B_{11}) + (256 + B_{11}) + (256 + B_{11})$$

$$(\text{on supposera } b \geqslant c ) \ .$$

D'après les lemmes 3 et 4, cela n'est possible que si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$2a + 1 \geqslant 7 \ ,$$

$$4b + 2 \geqslant 6 \ ,$$

$$4c + 2 \geqslant 6 \ .$$

On commence par écarter la possibilité d'avoir simultanément $2a + 1 \leqslant 9$ et $4b + 2 \leqslant 10$ (avec donc $4c + 2 \leqslant 10$ aussi). Cela correspond en effet à des valeurs positives $192p + 39 \leqslant 5607$ , dont on sait (voir les tables) qu'elles sont au plus $B_{19}$ .

Il reste donc à étudier les cas particuliers suivants :

1° $2a + 1 = 5$ , $3$ ou $1$ . Comme $2b + 2 \geqslant 14$ , on peut utiliser différemment le lemme 3 :

Si $2a + 1 = 5$ ou $1$ ,

$$24(8q+1) = 600 \text{ ou } 24 + (1296 + B_{11}) + B_{11}$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + 759 \text{ ou } 183$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + B_9 \text{ ou } B_8 \quad .$$

Si $2a + 1 = 3$ ,

$$24(8q+1) = 216 + (4096 + B_{11}) + B_{11}$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + 3175$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + B_9 \quad .$$

2° $4b + 2 = 2$ , $4c + 2 = 2$ . Comme $2a + 1 \geqslant 11$ , on peut utiliser différemment le lemme 4 :

$$24(8q+1) = (2401 + B_{11}) + 96 + 96$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + 1456$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} \quad .$$

3° $4b + 2 \geqslant 6$ , $4c + 2 = 2$ . Suivant que $2a + 1 \geqslant 11$ ou $4b + 2 \geqslant 14$ , on écrira :

$$24(8q+1) = (2401 + B_{11}) + (256 + B_{11}) + 96$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + 1616$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + B_6 \quad ,$$

ou

$$24(8q+1) = (1 + B_{11}) + (1296 + B_{11}) + 96$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + 256$$
$$= 625 + 256 + 256 + B_{11} + B_{11} + B_1 \quad .$$

Troisième exemple : $48p + 26 = B_{34}$ , qu'on a traité de la manière suivante :

$$(48p + 26) + 81 + 1 + 0 = 48q + 12 = 6(8q + 2)$$
$$8q + 2 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (4c)^2$$
$$6(8q+2) = (81 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12}$$
$$(\text{on supposera } a \geqslant b) \quad .$$

D'après le lemme 3, cela n'est possible que si l'inégalité

$$2a + 1 \geqslant 5$$

est vérifiée. Il faut donc étudier séparément les cas particuliers suivants :

1° $2a + 1 = 3$ , $2b + 1 = 3$ . On a alors

$$6(8q + 2) = 54 + 54 + B_{12}$$
$$= 81 + 1 + B_{12} + 26$$
$$= 81 + 1 + B_{12} + B_{11} \quad .$$

2° $2a + 1 = 3$ , $2b + 1 = 1$ . On a alors

$$8q + 2 = 9 + 1 + (4c)^2 = 10 + (4c)^2 \quad ,$$

et on est obligé de diviser l'étude en deux parties, suivant que $c = 3d \pm 1$ ou que $c = 3d$ .

- Si $c = 3d \pm 1$ , on peut écrire

$$8q + 2 = 10 + (12d \pm 4)^2$$
$$= (8d \pm 3)^2 + (8d \pm 1)^2 + (4d \pm 4)^2$$
$$6(8q + 2) = (81 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12} \quad .$$

Cela n'est possible que si $8d \pm 3 \geqslant 5$ , i. e. si $d \geqslant 1$ , mais $d = 0$ correspond à la valeur $48p + 26 = 74 = B_{14}$ .

- Si $c = 3d$ , il faut reprendre les calculs au début, en ajoutant d'autres bicarrés à $48p + 26$ . On a alors $p = 18d^2 - 1$ :

$$(48p + 26) + 81 + 81 + 16 = 48p + 204$$
$$= 6[8(p + 4) + 2] = 6(144d^2 + 26) \quad ,$$

et on peut écrire

$$144d^2 + 26 = (8d \pm 3)^2 + (8d \mp 1)^2 + (4d \mp 4)^2 \quad ,$$

avec au choix le signe $+$ ou le signe $-$ . On remarque alors que, des deux entiers $4d + 4$ et $4d - 4$ , l'un au moins n'est pas divisible par $16$ ; on choisira le signe $+$ ou $-$ correspondant, et on écrira $4d \mp 4 = 4(4e + f)$ , avec $f = 1$ , $2$ ou $3$ .

$$144d^2 + 26 = (8d \pm 3)^2 + (8d \mp 1)^2 + 2^4(4e + f)^2$$
$$6(144d^2 + 26) = (81 + B_{11}) + (81 + B_{11}) + 2^4(1 + B_{11}) \quad .$$

Cela n'est possible que si $8d \pm 3 \geqslant 5$ et $8d \mp 1 \geqslant 5$ , ce qui est toujours le cas ( $d = 0$ correspond à $48p + 26 = - 22$ ).

3° $2a + 1 = 1$ , $2b + 1 = 1$ . On a alors

$$8q + 2 = 1 + 1 + (4c)^2 = 2 + (4c)^2 ,$$

et on est également obligé de diviser l'étude en deux parties.

- Si $c = 3d \pm 1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} 8q + 2 &= 2 + (12d \pm 4)^2 \\ &= (8d \pm 3)^2 + (8d \pm 3)^2 + (4d)^2 \\ 6(8q + 2) &= (81 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12} . \end{aligned}$$

Cela n'est possible que si $8d \pm 3 \geqslant 5$ , i. e. si $d \geqslant 1$ , mais $d = 0$ correspond à la valeur $48p + 26 = B_{11}$ .

- Si $c = 3d$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} 8q + 2 &= 2 + (12d)^2 \\ &= (8d + 1)^2 + (8d - 1)^2 + (4d)^2 \\ 6(8q + 2) &= (81 + B_{11}) + (1 + B_{11}) + B_{12} . \end{aligned}$$

Cela n'est possible que si $8d + 1 \geqslant 5$ , ce qui est toujours le cas ( $d = 0$ correspond à $48p + 26 = - 70$ ).

Pour conclure cette étude, il convient de remarquer que les deux premiers exemples que nous venons de traiter ne soulèvent pas de difficulté majeure sur le plan théorique, quoique la recherche des "bons" bicarrés à soustraire ne soit pas toujours immédiate.

En revanche, le troisième exemple soulève le problème suivant : Etant donnée une décomposition paramétrique en somme de 3 carrés, trouver une seconde décomposition distincte ; ce problème n'a pas toujours de solution, ce qui nous a obligé à effectuer certaines "acrobaties" (cf. le cas $c = 3d$ du 2° de ce troisième exemple).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] AULUCK (F. C.). - On Waring's problem for biquadrates, Proc. Indian Acad. Sc., Sect. A, t. 11, 1940, p. 437-450.

[2] DICKSON (L. E.). - Recent progress on Waring's theorem and its generalizations, Bull. Amer. math. Soc., t. 39, 1933, p. 701-727 (2).

---

(2) Article accompagné d'une bibliographie abondante.

[3] DICKSON (L. E.). - Generalizations of Waring's theorem on fourth, sixth and eighth powers, Amer. J. of Math., t. 49, 1927, p. 241-250 (3).

[4] FLECK (A.). - Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und von Biquadraten ganzer Zahlen, Sitzungber. Berlin. math. Gesell., t. 5, 1906, p. 2-9.

[5] GLAISHER (J. W. L.). - On the representations of a number as the sum of four uneven squares, and as the sum of two even and two uneven squares, Quart. J. of pure and appl. Math., t. 20, 1885, p. 80-96.

[6] LANDAU (Edmund). - Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 23, 1907, p. 91-96.

[7] LIOUVILLE. Lectures au Collège de France [imprimé dans : LEBESGUE (V. A.). - Exercices d'analyse numérique, p. 112-115. - Paris, 1859].

[8] LUCAS (E.). - Sur la décomposition des nombres en bicarrés, Nouv. Corresp. math., t. 4, 1878, p. 323-325.

[9] LUCAS (E.). - Sur un théorème de M. Liouville concernant la décomposition des nombres en bicarrés, Nouv. Ann. math., Série 2, t. 17, 1878, p. 536-537.

[10] RÉALIS (S.). - Note sur un théorème d'arithmétique, Nouv. Corresp. math., t. 4, 1878, p. 209-210.

[11] WIEFERICH (Arthur). - Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten, Math. Annalen, t. 66, 1909, p. 106-108.

(Texte reçu le 13 avril 1970)

François DRESS
Prof. Fac. Sc. Bordeaux
351 cours de la Libération
33 - TALENCE

---

(3) Avec la démonstration élémentaire du résultat : tout entier est somme de 17 bicarrés et de 10 doubles de bicarrés.