Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Daniel Barsky

Forme linéaire sur L

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 2 (1968-1969), exp. nº G2, p. G1-G4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_2_A9_0>

Groupe d'Etudes de
THÉORIE DES NOMBRES
Année 1968/69, n° 2, 4 p.

FORME LINÉAIRE SUR $\mathfrak{L}$

par Daniel BARSKY

Soit $\mathfrak{L}^+$ l'espace des fonctions de U dans $\underset{\sim}{Q}_p$, développables en série de Laurent à coefficients d'indice positif seulement :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ .$$

On sait ([1]) que l'on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n Q_n(x) \ ,$$

où $Q_n(x) = (1 - x)\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$ (la suite $n \to \alpha^n$ est une suite très bien répartie dans U) et $(f(x) \in \mathfrak{L}^+) \iff \left(\lim_{n\to\infty} b_n = 0\right)$.

Soient I_n des formes linéaires continues sur $\mathfrak{L}^+$ (muni de la norme

$$\sup_n a_n = \sup_n b_n \ ),$$

telles que $\langle I_n | Q_m(x)\rangle = \delta_{n,m}$ (symbole de Kronecker). On trouve que :

$$I_0 = \delta_1 \ ,$$

$$I_1 = \frac{\delta_\alpha}{Q_1(\alpha)} - \frac{I_0}{Q_1(\alpha)} \ ,$$

$$\cdots$$

$$I_n = \frac{\delta_{\alpha^n}}{Q_n(\alpha^n)} - \frac{I_{n-1} Q_{n-1}(\alpha^n)}{Q_n(\alpha^n)} - \cdots - \frac{I_1 Q_1(\alpha^n)}{Q_n(\alpha^n)} - \frac{I_0}{Q_n(\alpha^n)} \ ,$$

où δ_{α^n} est la mesure de Dirac en α^n.

Toute forme linéaire continue sur $\mathfrak{L}^+$ peut s'écrire $\mu = \sum_{n\geqslant 0} B_n I_n$, la suite des B_n est bornée $(B_n \in \underset{\sim}{Q}_p)$ (cf. [3]), et $\|\mu\| = \sup_{n\in\underset{\sim}{N}} |B_n|$.

PROPOSITION 1. - <u>Il existe une forme</u> μ , <u>unique à la multiplication par une constante près, qui est invariante par les translations de</u> U .

$$\langle \mu | f(sx)\rangle = \langle \mu | f(x)\rangle \ , \qquad \forall\, s \in U \ ,$$

$$\mu = B \sum_{n\geqslant 0} I_n \ .$$

LEMME. - On a

$$Q_n(sx) = \sum_{h=0}^{n} a_h^{n,s} Q_h(x) \quad ,$$

avec $\sum_{h=0}^{n} a_h^{n,s} = 1$ et $a_n^{n,s} = s^n$; pour que l'on ait $\langle\mu|f(sx)\rangle = \langle\mu|f(x)\rangle$, il faut et il suffit que, $\forall$ n , $\langle\mu|Q_n(sx)\rangle = \langle\mu|Q_n(x)\rangle$; donc, si $\mu = \sum_{n\geq 0} B_n I_n$, il faut et il suffit que

$$\sum_{h=0}^{n} a_h^{n,s} B_h = B_n \quad .$$

De là on tire, par récurrence, que $B_0 = B_1 = \dots = B_n$.

Prolongement de μ à $\mathcal{E}^-$. - On dira que μ agit sur f , si la suite

$$\nu_k = \langle\mu_{n_k - 1}|f(x)\rangle$$

est convergente pour $k \to \infty$, où

$$\mu_{n_k - 1} = \sum_{n=0}^{n_k - 1} b_n$$

et $n_k = p^k(p - 1)$.

PROPOSITION 2. - μ agit sur $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{\alpha^n} \quad ,$$

donc $\nu_k = \frac{\alpha^{n_k} - 1}{\alpha - 1} \frac{1}{\alpha^{n_k - 1}}$.

Comme $n \to \alpha^n$ est très bien répartie dans U , on montre facilement que $|\nu_k| \leq \frac{1}{p^{k+1}}$, donc $\langle\mu|\frac{1}{x}\rangle = 0$.

PROPOSITION 3. - μ agit sur $\frac{1}{x^h}$ pour $h \geq 1$.

Ceci se démontre en écrivant

$$\frac{1}{x^h} = \sum_{n\geq 0} d_{n,h} Q_n(x) \quad ,$$

et en montrant que

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^h} d_{n-1,h} + d_{n,h-1} \quad ,$$

et que

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^{nh}} \frac{(1 - \alpha^{n+1}) \ldots (1 - \alpha^{n+h-1})}{(1 - \alpha) \ldots (1 - \alpha^{h-1})} .$$

PROPOSITION 4. - μ <u>agit sur</u> $\mathcal{F}^-$.

Ceci se démontre par le théorème de Banach-Steinhaus-Monna ([2]).

PROPOSITION 5. - $\langle \mu | x^n \rangle = 0$ <u>et</u> $\langle \mu | 1 \rangle = 1$.

<u>Application</u>. - Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. A quelles conditions, sur les a_n , f peut-elle s'écrire

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_k}{(1 - x)^k} , \qquad \text{avec } \lambda_k \to 0 \ ?$$

On montre que $\langle \mu_0^r | \frac{f(x)}{x^n} \rangle = a_n$ (où μ_0^r est l'analogue de μ sur le cercle de centre 0 et de rayon r).

$$\begin{aligned} \langle \mu_0^r \mid \frac{1}{x^n(1 - x)^k} \rangle &= \frac{1}{(k - 1)!} (n + k - 1) \ldots (n + 1) \\ &= \binom{n + k - 1}{k - 1} \\ &= \langle \mu_0^r \mid \frac{1}{x^n} [\sum_{h=k}^{\infty} \frac{h(h - 1) \ldots (h - k + 2)}{(k - 1)!} x^{h-k+1}] \rangle , \end{aligned}$$

donc

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \binom{n + k - 1}{k - 1} ,$$

ce qui montre que $n \to a_n$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$,

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \binom{x + k - 1}{k - 1}$$

(cf. [1] et [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[2] HILY (Jacques). - Sur les espaces de Banach ultramétriques. Algèbres de fonctions localement analytiques (Thèse Sc. math. Nancy, 1969).

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 19 septembre 1969)

Daniel BARSKY
Stag. Rech. CNRS
10 avenue Stéphane Mallarmé
75 - PARIS 17