Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Pierre Schreiber

Application de la méthode d'Yves Meyer à une caractérisation des nombres de Pisot-Salem-Chabauty de $\mathbb{Q}_p$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 2 (1968-1969), exp. nº 20, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 20, 11 p.

16 juin 1969

APPLICATION DE LA MÉTHODE D'YVES MEYER A UNE CARACTÉRISATION DES NOMBRES DE PISOT-SALEM-CHABAUTY DE $\mathbb{Q}_p$

par Jean-Pierre SCHREIBER

Pour un nombre premier p, on désigne par $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, par Ω_p sa clôture algébrique, et par $|x|_p$ la valeur absolue p-adique de l'élément x de Ω_p.

On considère l'ensemble des nombres de Pisot-Salem-Chabauty de $\mathbb{Q}_p$ défini comme suit (cf. [2], [7], [1], et [3]).

DÉFINITION. - Soit S_p l'ensemble des éléments θ de $\mathbb{Q}_p$, $|\theta|_p > 1$, tels qu'il existe un polynôme $A[X]$ à coefficients entiers relatifs, irréductible sur $\mathbb{Q}$, et vérifiant les conditions suivantes :

1° La seule racine de A dans Ω_p, ayant une valeur absolue p-adique strictement supérieure à 1, est θ ;

2° Pour tout nombre premier p' différent de p, les racines de A dans $\Omega_{p'}$ sont de valeur absolue p'-adique inférieure ou égale à 1 ;

3° Les racines de A dans $\mathbb{C}$ sont de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Nous allons donner une caractérisation de cet ensemble (théorème 1) utilisant la notion de partie harmonieuse d'un groupe localement compact abélien, introduite par Yves MEYER, et utilisée par lui pour caractériser les nombres de Pisot ou de Salem de $\mathbb{R}$ ([6]).

1. Ensembles harmonieux dans $\mathbb{Q}_p$.

Nous noterons $\mathbb{Z}(p)$ l'anneau des rationnels s'écrivant $\frac{q}{p^r}$ (où q est entier relatif), et $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. A tout élément x de $\mathbb{Q}_p$ sont associés de manière unique

$$H_p(x) \in \mathbb{Z}(p) \cap [0\,,\,1[\ ,$$

et

$$\varepsilon_p(x) \in \mathbb{Z}_p\ ,$$

de telle sorte que $x = H_p(x) + \varepsilon_p(x)$.

Sur le groupe additif $\mathbb{Q}_p$, abélien, localement compact, les caractères continus sont de la forme

$$y \longmapsto \exp[2i\pi\, H_p(x.y)] \quad ,$$

où $x \in \underset{\sim}{Q}_p$ ([4], p. 400). Il sera plus commode pour nous de considérer les caractères comme homomorphismes de $\underset{\sim}{Q}_p$ dans $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ (identifié à $[0\ ,\ 1[$) :

$$y \longmapsto H_p(x.y) \quad .$$

De même, pour un entier ℓ positif, nous considérerons les caractères continus de $\underset{\sim}{Q}_p^{\ell}$ définis par

$$y \longmapsto H_p[(x\ ,\ y)] \quad ,$$

où x appartient à l'espace vectoriel dual de $\underset{\sim}{Q}_p^{\ell}$, et où $(x\ ,\ y)$ est le produit scalaire de x et y .

<u>Les caractères faibles</u> sur $\underset{\sim}{Q}_p^{\ell}$ sont des homomorphismes non nécessairement continus de $\underset{\sim}{Q}_p^{\ell}$ dans $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$: $y \longmapsto \chi(y)$.

Pour $y \in [0\ ,\ 1[$, on note $\|y\| = \inf(y\ ,\ 1-y)$.

DÉFINITION. - <u>Un fermé</u> Λ <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p^{\ell}$ <u>est dit harmonieux si, pour tout caractère faible</u> χ <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>on peut trouver un caractère continu (soit</u> x <u>dans</u> $\underset{\sim}{Q}_p^{\ell}$) <u>tel que</u>

$$\forall\ \lambda \in \Lambda\ , \qquad \|\chi(\lambda) - H_p(x\ ,\ \lambda)\| < \varepsilon \quad .$$

Voyons maintenant un exemple simple qui est à la base de la notion de modèle dans $\underset{\sim}{Q}_p$.

PROPOSITION 1. - <u>L'ensemble</u> $\underset{\sim}{Z}(p) \cap [0\ ,\ 1[$ <u>est harmonieux dans</u> $\underset{\sim}{Q}_p$.

Si $\lambda \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap [0\ ,\ 1[$, $\lambda = \dfrac{q}{p^r}$, avec q entier positif inférieur à p^r . Un caractère faible χ est donc déterminé, sur Λ , dès que sont fixées les valeurs $\theta_r = \chi\left(\dfrac{1}{p^r}\right)$, $r = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,$ où $0 \leqslant \theta_r < 1$. Les nombres θ_r étant liés par les relations

$$p\theta_r \equiv \theta_{r-1} \pmod 1 \quad ,$$

ou encore

$$p\theta_r = \theta_{r-1} + a_r\ , \qquad a_r \in \underset{\sim}{Z} \cap [0\ ,\ p[\quad ;$$

d'où

$$\theta_r = \frac{a_r}{p} + \ldots + \frac{a_1}{p^r} + \frac{\theta_0}{p^r} \quad .$$

Soit x l'entier p-adique, défini par

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{n-1} \quad ;$$

on a donc

$$\chi\left(\frac{1}{p^r}\right) = H_p\left(\frac{x}{p^r}\right) + \frac{\theta_0}{p^r} \quad .$$

Pour ε , $0 < \varepsilon < 1$, on peut trouver un rationnel γ de $\underset{\sim}{Z}(p) \cap [0\,,\,1[$ vérifiant $|\gamma - \theta_0| < \varepsilon$. En posant $y = x + \gamma$, on obtient, pour l'élément $\frac{q}{p^r}$ de Λ ,

$$\left\|\chi\left(\frac{q}{p^r}\right) - H_p\left(\frac{yq}{p^r}\right)\right\| = \left\|\frac{\theta_0}{p^r}\, q - H_p\left(\frac{\gamma q}{p^r}\right)\right\| \quad .$$

Comme $\frac{\gamma q}{p^r} \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap [0\,,\,1[$, $H_p\left(\frac{\gamma q}{p^r}\right) = \frac{\gamma q}{p^r}$, et

$$\left\|\theta_0 \frac{q}{p^r} - \gamma \frac{q}{p^r}\right\| \leqslant \frac{q}{p^r}\, |\theta_0 - \gamma| < \varepsilon \quad .$$

Le caractère fort y approche donc uniformément χ à ε près sur Λ .

COROLLAIRE. - <u>Toute partie de $\underset{\sim}{Z}(p)$, bornée pour la valeur absolue ordinaire, est harmonieuse dans $\underset{\sim}{Q}_p$</u> .

Cela résulte de la proposition 1 et du fait que, si Λ est un ensemble harmonieux de $\underset{\sim}{Q}_p$, et a une constante de $\underset{\sim}{Q}_p$, toute partie de $a\Lambda$ est harmonieuse.

L'exemple de la proposition 1 se généralise comme suit.

PROPOSITION 2. - <u>Soient W un espace vectoriel sur $\underset{\sim}{Q}_p$, de dimension ℓ , M un $\underset{\sim}{Z}(p)$-module contenu dans W , de dimension ℓ sur le corps $\underset{\sim}{Q}_p$, et admettant, sur $\underset{\sim}{Z}(p)$, la base $s_1 , \dots , s_m$. Soient, d'autre part :</u>

(a) <u>ℓ applications $\underset{\sim}{Q}_p$-linéaires, $\underset{\sim}{Q}_p$-indépendantes, de M dans $\underset{\sim}{Q}_p$:</u>
$L_1^p , L_2^p , \dots , L_\ell^p$;

<u>$(m - \ell)$ applications $\underset{\sim}{Z}(p)$-linéaires, de M dans $\underset{\sim}{Q}_p$: $L_{\ell+1}^p , \dots , L_m^p$, formant avec $L_1^p , \dots , L_\ell^p$ un système de m applications $\underset{\sim}{Q}_p$-indépendantes de M dans $\underset{\sim}{Q}_p$</u> ;

(b) <u>m applications $\underset{\sim}{Z}(p)$-linéaires et $\underset{\sim}{R}$-indépendantes de M dans $\underset{\sim}{R}$:</u>
$L_1^0 , \dots , L_m^0$.

<u>Soit</u>

$$\Lambda = \{\lambda \in M \; ; \quad |L_j^p(\lambda)|_p \leqslant 1 \ \ \underline{\text{pour}} \ \ j = \ell + 1 \, , \, \ldots \, , \, m \; ;$$
$$\underline{\text{et}} \ \ |L_j^0(\lambda)|_0 \leqslant 1 \ \ \underline{\text{pour}} \ \ j = 1 \, , \, \ldots \, , \, m\} \ .$$

<u>Alors</u> Λ <u>est une partie harmonieuse de</u> W .

<u>Démonstration</u>. – Les éléments de Λ sont de la forme :

$$\lambda = \sum_{k=1}^{m} a_k(\lambda) \; s_k \; , \qquad a_k(\lambda) \in \underset{\sim}{Z}(p) \ .$$

Les applications L_i^0 étant indépendantes sur $\underset{\sim}{R}$, définissent un homéomorphisme de $[\underset{\sim}{Z}(p)]^m$ (muni de la topologie induite par celle de $\underset{\sim}{R}^m$) dans $\underset{\sim}{R}^m$, et il existe donc une constante A telle que, pour tout λ de Λ , $|a_k(\lambda)|_0 < A$.

Soient χ un caractère faible sur Λ , et ε un nombre réel positif. Il résulte du corollaire de la proposition 1 que, pour chaque k , $k = 1 , 2 , \ldots , m$, l'ensemble $\{a_j \, s_k \; ; \; a_j \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap]-A , A[\}$ est harmonieux ; on peut donc trouver x_k dans le dual de W tel que

$$\|\chi(a_k \, s_k) - H_p[(x_k \, , \, a_k \, s_k)]\| < \frac{\varepsilon}{2m} \, , \qquad \forall \ a_k \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap]-A \, , A[\ .$$

On est alors ramené à l'approximation uniforme sur Λ du caractère faible

$$\lambda \longmapsto H_p\Big(\sum_{k=1}^{m} (x_k \, , \, a_k(\lambda) \; s_k)\Big) \ ,$$

par un caractère fort du type

$$\lambda \longmapsto H_p\Big(\Big(x \, , \sum_{k=1}^{m} a_k(\lambda) \; s_k\Big)\Big) \ ;$$

ou encore, puisque les applications $\underset{\sim}{Q}_p$-linéaires $L_1^p , \ldots , L_\ell^p$, sont $\underset{\sim}{Q}_p$-indépendantes, par un caractère fort écrit

$$\lambda \longmapsto H_p\Big(\sum_{i=1}^{\ell} y^i \; L_i^p(\lambda)\Big)$$

($y^1 , \ldots , y^\ell$ sont des éléments de $\underset{\sim}{Q}_p$).

Pour $i = 1 , 2 , \ldots , m$, posons $L_i^p(s_k) = \alpha_{i,k}$; et soit $\varepsilon > 0$. Nous aurons

$$\Big\|H_p\Big(\sum_{k=1}^{m} (x_k \, , \, a_k(\lambda) \; s_k)\Big) - H_p\Big(\sum_{i=1}^{\ell} y^i \; L_i^p(\lambda)\Big)\Big\| < \varepsilon \ ,$$

dès que

$$\|H_p \sum_{k=1}^{m} \left(a_k(\lambda)[(x_k , s_k) - \sum_{i=1}^{\ell} y^i \alpha_{i,k} - \sum_{i=\ell+1}^{m} \xi^i \alpha_{i,k}]\right)\| < \varepsilon \quad ,$$

avec $|\xi^i|_p \leqslant 1$; ou encore, dès que

$$\|H_p\{a_k(\lambda)[(x_k , s_k) - \sum_{i=1}^{\ell} y^i \alpha_{i,k} - \sum_{i=1+\ell}^{m} \xi^i \alpha_{i,k}]\}\| < \frac{\varepsilon}{m} \quad .$$

Mais comme $a_k(\lambda) \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap \left]- A , A\right[$, il suffit de trouver $y^1 , \ldots , y^\ell$, $\xi^{\ell+1} , \ldots , \xi^m$, tels que

$$(x_k , s_k) - \sum_{i=1}^{\ell} y^i \alpha_{i,k} - \sum_{\ell+1}^{m} \xi^i \alpha_{i,k} = c_k \in Z(p) \cap \left]- p^{-c} , p^{-c}\right[\quad ,$$

où $p^{-c} < \frac{1}{A} \frac{\varepsilon}{m}$.

Soit, après avoir posé $y^i = y'^i + \xi^i \quad (|\xi^i|_p \leqslant 1)$,

$$\sum_{i=1}^{\ell} y'^i \alpha_{i,k} = (x_k , s_k) - c_k - \sum_{1}^{\ell} \xi^i \alpha_{i,k} \quad .$$

On est alors ramené à la résolution en $y'^1 , \ldots , y'^\ell , \ldots , c_k , \ldots , b_k , \ldots$, du système :

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} y'^i \alpha_{i,k} = (x_k , s_k) - c_k - b_k , \qquad k = 1 , \ldots , m \quad ,$$

avec $y'^1 , \ldots , y'^\ell \in \underset{\sim}{Q}_p$; $c_k \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap \left]- p^{-c} , p^{-c}\right[$; $b_k \in p^B \underset{\sim}{Z}_p$; B étant une constante entière choisie telle que, pour $b_1 , \ldots , b_m$, dans $p^B \underset{\sim}{Z}_p$, on puisse trouver $\xi_1 , \ldots , \xi_n$ dans $\underset{\sim}{Z}_p$ avec

$$b_k = \sum_{i=1}^{\ell} \xi^i \alpha_{i,k} \quad .$$

Le système (*) se résout maintenant en appliquant le lemme suivant, qui n'est que le théorème de Kronecker ([8], 5.1.3) appliqué à $\underset{\sim}{Q}_p^\ell$.

LEMME. - Si $t_1 , \ldots , t_m$ sont m éléments de $(\underset{\sim}{Q}_p)^\ell$ indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$, l'ensemble des m-uples $\{H_p[(y , t_k)]\}_{k=1,\ldots,m}$, y décrivant l'espace vectoriel dual de $\underset{\sim}{Q}_p^\ell$, est dense dans $\left[0 , 1\right[^m$.

Il suffit de choisir $y' \in \underset{\sim}{Q}_p^\ell$, tel que

$$|H_p\Big(\sum_{i=1}^{\ell} y'^i\ \alpha_{i,k}\ p^{-B}\Big) - H_p((x_k\ ,\ s_k)\ p^{-B})| < p^{-B-c}\quad ,$$

et de poser

$$H_p((x_k\ ,\ s_k)\ p^{-B}) - H_p\Big(\sum_{i=1}^{\ell} y'^i\ \alpha_{i,k}\ p^{-B}\Big) = c_k\ p^{-B}\quad ,$$

$$\varepsilon_p((x_k\ ,\ s_k)\ p^{-B}) - \varepsilon_p\Big(\sum_{i=1}^{\ell} y'^i\ \alpha_{i,k}\ p^{-B}\Big) = b_k\ p^{-B}\quad .$$

Alors, on a bien

$$c_k \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap]- p^{-c}\ ,\ p^{-c}[\quad ,$$

$$b_k \in p^B\ \underset{\sim}{Z}_p\quad ,$$

et

$$\sum y'^i\ \alpha_{i,k} = (x_k\ ,\ s_k) - c_k - b_k\quad .$$

On a ainsi défini des ensembles harmonieux dans $\underset{\sim}{Q}_p^{\ell}$ jouant le rôle des modèles introduits dans $\underset{\sim}{R}$ par Y. MEYER. Voyons l'application de ces ensembles aux nombres de Pisot-Salem-Chabauty.

2. Nombres de Chabauty-Pisot-Salem.

Soit K une extension algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. Nous noterons $S_p(K)$ l'ensemble des éléments θ de K , algébriques sur $\underset{\sim}{Z}$, et tels que (en désignant par $A(x)$ un polynôme irréductible sur $\underset{\sim}{Q}$ dont θ est racine) :

1° Les racines de A dans Ω_p , non conjuguées de θ sur $\underset{\sim}{Q}_p$, sont de valeur absolue p-adique inférieure ou égale à 1 , et $|\theta|_p > 1$;

2° Les racines de A dans $\Omega_{p'}$ (p' premier, différent de p) (resp. les racines de A dans $\underset{\sim}{C}$), sont de valeur absolue p'-adique (resp. de valeur absolue ordinaire) inférieure ou égale à 1 .

On a alors la caractérisation suivante.

THÉORÈME. - Soit $\theta \in K$, $\theta \neq 0$; pour que $\theta \in S_p(K)$, il faut et il suffit que l'ensemble $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$ soit harmonieux dans K .

Démonstration.

(a) Condition nécessaire : Soit $\theta \in S_p(K)$; on peut alors écrire le polynôme A sous la forme :

$$A(x) = p^r x^m + \dots + a_m \qquad (a_m \neq 0) \quad .$$

Il est clairement équivalent de dire que $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est harmonieux dans K ou dans $W = \mathbb{Q}_p(\theta)$, dont une base sur $\mathbb{Q}_p$ est $1, \theta, \dots, \theta^{\ell-1}$ $(1 \leqslant \ell \leqslant m)$. Soit M le $\mathbb{Z}(p)$-module de base $1, \theta, \dots, \theta^{m-1}$, et soient $\tau_1, \dots, \tau_m$, les m $\mathbb{Q}$-isomorphismes de M dans Ω_p, où $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$ sont les restrictions à M des ℓ $\mathbb{Q}_p$-isomorphismes de $\mathbb{Q}_p(\theta)$ dans Ω_p ; ou encore, en posant $\theta_i = \tau_i(\theta)$, $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ sont les conjugués de θ par rapport à $\mathbb{Q}_p$, et $\theta_{\ell+1}, \dots, \theta_m$ les autres conjugués de θ par rapport à $\mathbb{Q}$ qui sont donc, par hypothèse, de valeur absolue p-adique inférieure ou égale à 1.

Les m vecteurs de Ω_p^m : $v_k = \{\theta_1^k, \dots, \theta_m^k\}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, sont Ω_p-indépendants, donc $\mathbb{Q}_p$-indépendants. On peut alors définir sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel N engendré par $v_0, \dots, v_{m-1}$, m formes linéaires $\mathbb{Q}_p$-indépendantes $L'_1, L'_2, \dots, L'_m$, telles que :

1° $L'_1(x), \dots, L'_\ell(x)$ ne dépendent que des ℓ premières coordonnées de x sur la base canonique de Ω_p^m ;

2° $L'_{\ell+1}(x), \dots, L'_m(x)$ ne dépendent que des $m-\ell$ autres coordonnées de x sur cette base, et prennent une valeur inférieure ou égale à 1, en valeur absolue p-adique, sur tout élément x dont les $m-\ell$ dernières coordonnées sont de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Si τ désigne alors l'application $\mathbb{Z}(p)$-linéaire de M dans N définie par $\tau(\theta^k) = v_k$, les applications $L_j^p = L'_j \circ \tau$ sont $\mathbb{Q}_p$-indépendantes de M dans $\mathbb{Q}_p$. De plus, il est clair que $L_1^p, \dots, L_\ell^p$ sont $\mathbb{Q}_p$-linéaires et que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$|L_j^p(\theta^n)|_p \leqslant 1 , \qquad \text{pour } j = \ell+1, \dots, m \quad .$$

Soient maintenant $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, les m $\mathbb{Q}$-isomorphismes du corps $\mathbb{Q}(\theta)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit alors, dans $\mathbb{C}^m$, comme précédemment dans $(\Omega_p)^m$, m vecteurs indépendants sur le corps des réels et situés tous, cette fois, dans la boule unité de $\mathbb{C}^m$. On en déduit donc m applications $\mathbb{Z}(p)$-linéaires et $\mathbb{R}$-indépendantes de Λ dans $\mathbb{R}$: $L_1^0, \dots, L_m^0$, telles que, pour tout $n \geqslant 0$, $|L_j^0(\theta^n)| \leqslant 1$.

La proposition 2 s'applique alors, et montre que $\{\theta^n\}_{n\geqslant 0}$ est contenu dans un ensemble harmonieux, donc est harmonieux.

(b) <u>Condition suffisante</u> : Si $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$ est harmonieux, il résulte des propriétés générales de ces ensembles ([6]), que $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$ n'a pas de point d'accumulation, et donc $|\theta|_p > 1$. La démonstration se fait alors en deux étapes :

(α) <u>Si $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$ est harmonieux, θ est algébrique (sur $\mathbb{Q}$)</u>. En effet, si θ n'est pas algébrique, l'ensemble $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$ est indépendant sur $\mathbb{Q}$, et donc toute fonction χ , à valeurs 0 ou $\frac{1}{2}$ sur $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$, peut être prolongée en un caractère faible sur W . On a ainsi un ensemble de caractères faibles à valeurs 0 ou $\frac{1}{2}$ sur $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$, ayant la puissance du continu. Or, pour ε positif assez petit, l'ensemble des caractères forts de W , prenant sur $\{\theta^n\}_{n\geq 0}$ des valeurs dans

$$U_\varepsilon = [0 , \varepsilon[\cup]\tfrac{1}{2} - \varepsilon , \tfrac{1}{2} + \varepsilon[\cup]\varepsilon , 1[,$$

a tous ses points isolés dans le dual de W , et est donc dénombrable.

Pour le voir, identifions le dual de W à W de la façon suivante : à $z \in W$, on associe le caractère

$$x \in W \longmapsto H_p\Big(\sum_{i=1}^{\ell} z_i x_i\Big) = H_p(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_p} zx) .$$

Si $H_p(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_p} z_1 x) \in U_\varepsilon$ et $H_p(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_p} z_2 x) \in U_\varepsilon$, on a, pour $z = z_1 - z_2$,

$$\|H_p(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_p} 2zx)\| < 4\varepsilon .$$

Soit $\eta > 0$ assez petit pour que $|z|_p < \eta$ entraîne $H_p(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_p} 2z\theta^n) = 0$, pour $n = 0 , 1 , \ldots , \ell$. Pour $z \neq 0$, il existe un plus grand entier n_0 tel que, $\forall\, n < n_0$, $|\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_p}(2z\theta^n)|_p \leq 1$, car sinon, pour tout α de W , en écrivant α :

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha_k\, \theta^{k+n} \qquad (\text{avec } \alpha_k \in \mathbb{Q}_p , \ |\alpha_k|_p \leq 1) ,$$

on aurait $|\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_p}(2\alpha z)|_p \leq 1$, ce qui n'est pas. Mais alors, comme

$$\theta^{n_0} = \sum_{k=0}^{\ell-1} b_k\, \theta^{n_0-k-1} ,$$

on a, si $|z|_p < \eta$,

$$1 < |\mathrm{tr}(\theta^{n_0}\, 2z)|_p \leq \max_{0\leq k\leq \ell-1} |b_k|_p = c ,$$

ce qui est incompatible avec la relation $H_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p}\ 2z\theta^{n_0}) < \varepsilon$, dès que ε est inférieur à p^{-c} .

(β) <u>Si</u> $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ <u>est harmonieux, et</u> θ <u>algébrique sur</u> $\underset{\sim}{Q}$, <u>et</u> $|\theta|_p > 1$, <u>alors</u> $\theta \in S_p(W)$. Si θ est racine du polynôme $P(X) = a_0 X^m + \ldots + a_m$ de $\underset{\sim}{Z}[X]$, irréductible et primitif, et si $\{\theta^n\}_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est harmonieux, on peut trouver, pour $\varepsilon > 0$, un z de W , $z \neq 0$, tel que

$$\|H_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p}(z\theta^n))\| < \varepsilon \quad .$$

Si nous considérons plutôt la décomposition des éléments y de $\underset{\sim}{Q}_p$ de la forme

$$y = H'_p(y) + \varepsilon'_p(y) \quad , \qquad \text{avec } H'_p(y) \in \underset{\sim}{Z}(p) \cap [-\tfrac{1}{2} , \tfrac{1}{2}[\quad ,$$

et $|\varepsilon'_p(y)|_p \leqslant 1$, nous aurons $|H'_p\ \mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p}(z\theta^n)| < \varepsilon$. Prenons alors

$$\varepsilon < \Big(\sum_{i=0}^{m} |a_i|\Big)^{-1} \quad .$$

Dans l'égalité

$$\sum_{i=0}^{m} a_i\ H'_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p}(z\theta^{k+m-i})) = \sum_{i=0}^{m} a_i\ \varepsilon'_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p}(z\theta^{k+m-i})) \quad ,$$

le membre de droite est un entier p-adique, et celui de gauche un rationnel de $\underset{\sim}{Z}(p) \cap]-1 , 1[$; ces deux membres sont donc nuls. Les rationnels

$$u_n = H'_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p}(z\theta^n))$$

vérifient ainsi la même relation de récurrence que θ^n , et comme on a

$$|u_n|_p \leqslant |z|_p\ |\theta^n|_p \quad ,$$

pour un entier r assez grand, on aura $p^{rn}\ u_n \in \underset{\sim}{Z}$. Alors le théorème de Fatou ([5], p. 64), appliqué à la série $\sum_{n=0}^{\infty} p^{rn}\ u_n\left(\frac{X}{p^r}\right)^n$, nous permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\ X^n = \frac{A(X)}{B(X)} \quad ,$$

où A et B sont des polynômes de $\underset{\sim}{Z}[X]$ premiers entre eux. Pour tout nombre premier $p' \neq p$, et pour $p' = 0$, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n\ X^n$ converge dans le disque $|X|_{p'} < 1$, puisque $|u_n|_{p'} \leqslant 1$. Donc, dans $\Omega_{p'}$, les racines de B sont de valeur absolue supérieure ou égale à 1 (on écrit $\Omega_0 = \underset{\sim}{C}$). Dans Ω_p , comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p} z\theta^n) X^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p} z\theta^n) X^n ,$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} z_i \theta_i^n X^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p} z\theta^n) X^n ,$$

soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{z_i}{1 - \theta_i X} - g(X) ,$$

où les θ_i (resp. les z_i) sont les images de θ (resp. de z) par les ℓ $\underset{\sim}{Q}_p$-isomorphismes de $W = \underset{\sim}{Q}_p(\theta)$ à valeurs dans Ω_p , et où g est définie pour tout X de Ω_p , $|X|_p < 1$ puisque

$$|\varepsilon'_p(\mathrm{tr}_{\underset{\sim}{Q}_p} z\theta^n)|_p \leqslant 1 .$$

Les racines de B , non conjuguées de θ^{-1} par rapport à $\underset{\sim}{Q}_p$, ont donc une valeur absolue p-adique supérieure ou égale à 1 . Alors θ appartient bien à $S_p(W)$.

Cela termine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[2] CHABAUTY (C.). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[3] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Généralisation des nombres de Salem aux adèles, Thèse Sc. math. Paris, 1967.

[4] HEWITT (E.) and ROSS (K. A.). - Abstract harmonic analysis, I. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 115).

[5] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[6] MEYER (Y.). - Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique, Studia Math., Warszawa (à paraître).

[7] PISOT (C.). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal, Université de Montréal, Département de Mathématiques, 1963 (Séminaire de Mathématiques Supérieures, Eté 1963, 5).

[8] RUDIN (W.). - Fourier analysis on groups. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

(Texte reçu le 10 juillet 1969)

Jean-Pierre SCHREIBER
M. Ass. Fac. Sc. Orsay
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91 - ORSAY