Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Dress
Michel Mendès France

Caractérisation des ensembles normaux dans Z

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 2 (1968-1969), exp. nº 17, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_2_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 17

12 mai 1969

CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES NORMAUX DANS $\mathbb{Z}$

par François DRESS et Michel MENDÈS FRANCE

1. Introduction.

On rappelle que si $\Lambda = (\lambda_n)$ est une suite infinie de nombres réels, on dit que $x \in \mathbb{R}$ est Λ-normal si la suite $x\Lambda$ est équirépartie (mod 1). On note $B(\Lambda)$ l'ensemble des nombres Λ-normaux, et l'on dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un ensemble normal s'il existe une suite Λ telle que $E = B(\Lambda)$. Une intersection dénombrable d'ensembles normaux s'appelle un ensemble normal au sens large.

Il est clair qu'un ensemble E normal (resp. normal au sens large) satisfait aux conditions suivantes :

(i) $0 \notin E$;

(ii) Pour tout $q \in \mathbb{Z}^* = Z - \{0\}$, on a $qE \subset E$;

(iii) E est mesurable avec, ou $\mathrm{mes}(E) = 0$, ou $\mathrm{mes}(\complement E) = 0$.

Savoir si ces conditions sont suffisantes semble être un problème difficile. Nous l'avons résolu dans le cas où E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^*$ (il en existe !) grâce à une idée de D. CANTOR (communication privée).

2. Résultat obtenu.

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On désigne par $D(m)$ l'ensemble des diviseurs de m $(m \neq 0)$, et on pose $D(0) = \emptyset$. On démontre alors le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) B est normal au sens large ;

(2) B est normal ;

(3) Pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$, on a $qB \subset B$;

(4) Il existe une suite infinie (m_n) de nombres entiers, telle que

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Z}^* - D(m_n))$$

(cette intersection pouvant être éventuellement une intersection finie non vide si presque tous les m_n sont égaux).

Ce résultat conduit à deux corollaires :

COROLLAIRE 1. - *Dans* $\mathbb{Z}^*$, *tout ensemble normal au sens large est un ensemble normal.*

C'est tout simplement l'équivalence entre les conditions (1) et (2).

COROLLAIRE 2. - *Si* $(B_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ensembles normaux dans* $\mathbb{Z}^*$, *la réunion* $\bigcup_{i\in I} B_i$ *est un ensemble normal.*

Cela provient de l'équivalence entre les conditions (2) et (3), la propriété $qB \subset B$ se conservant par réunion.

On démontrera le théorème, suivant le schéma logique suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (1) \arrow[dd] & \\
(4) \arrow[rr] & & (2) \arrow[ul] \\
 & (3) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Les implications (2) ==> (1) et (1) ==> (3) sont triviales.

3. Démonstration de l'implication (3) ==> (4) .

Soit $B \subset \mathbb{Z}^*$ un ensemble vérifiant la condition (3). Si $m \notin B$, et si $d|m$, alors $d \notin B$. Ainsi

$$m \in \mathbb{Z}^* - B \qquad \text{entraîne} \qquad D(m) \subset \mathbb{Z}^* - B \ .$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}^*-B} D(m) = \mathbb{Z}^* - B \ ,$$

et, par complémentarité,

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}^*-B} (\mathbb{Z}^* - D(m)) = B \ ,$$

ce qui est la condition (4) cherchée.

4. Démonstration de l'implication (4) ==> (2) .

Etant donnée une suite (m_n) d'entiers, il faut montrer que l'ensemble

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Z}^* - D(m_n))$$

est un ensemble normal. L'idée de la démonstration est suggérée dans une lettre adressée par D. CANTOR à l'un des auteurs (mai 1968).

On se donne une suite (α_n) de nombres réels vérifiant $\alpha_n \geqslant 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < 1$. Puis on considère la fonction f continue, monotone croissante, définie par

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} .$$

Si (δ_n) est une suite équirépartie sur $[0 , 1[$ $(0 \leqslant \delta_n < 1)$, on définit alors la suite $\Lambda = (\lambda_n)$ par

$$\lambda_n = f^{-1}(\delta_n) .$$

Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$. On veut montrer que, pour un choix convenable de la suite (α_n), $B(\Lambda) = B$. Pour cela, il faudra d'abord établir un lemme général qui concerne les suites $\Theta = (\theta_n)$ telles que $0 \leqslant \theta_n < 1$.

LEMME. - <u>Soit</u> $\Theta = (\theta_n)$ <u>une suite telle que</u> $0 \leqslant \theta_n < 1$. <u>Si</u> $B(\Theta)$ <u>contient un nombre entier, alors</u> $B(\Theta)$ <u>ne contient que des nombres entiers</u>.

Soit m un entier de $B(\Theta)$, qu'on peut toujours supposer positif. Etant donnés $y \in \mathbb{R}$ et $a \in [0 , 1[$, on posera

$$\gamma(y , a) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}\{k \mid 1 \leqslant k \leqslant n , y\theta_k \in [0 , a[\pmod 1\} .$$

On considère maintenant $x \in \mathbb{R}$, et on étudie son appartenance à $B(\Theta)$. On peut, sans restriction, se limiter au cas x positif.

Si $mx \notin \mathbb{Z}$, l'équirépartition (mod 1) de la suite $m\theta_k$ entraîne

$$\gamma(mx , \{mx\}) = \frac{[mx] + 1}{mx} \{mx\} > \{mx\}$$

($\{mx\}$ désignant la différence $mx - [mx]$). Ceci montre bien que $x \notin B(\Theta)$.

Si, au contraire, $mx \in \mathbb{Z}$, alors $x = \frac{m_1}{m}$ (m_1 entier). Si on suppose que $x \in B(\Theta)$, il s'ensuit que $m_1 = mx \in B(\Theta)$. Si on avait alors $m_1 x \notin \mathbb{Z}$, on en déduirait, comme précédemment, que $\gamma(m_1 x , \{m_1 x\}) > \{m_1 x\}$ et que $x \notin B(\Theta)$, ce qui est contradictoire. Donc $m_1 x \in \mathbb{Z}$, et il existe un entier m_2 tel que $x = \frac{m_2}{m_1}$.

En répétant ce processus, on en déduit que l'hypothèse $mx \in \mathbb{Z}$ et $x \in B(\Theta)$ entraîne l'existence d'une suite infinie $m , m_1 , \dots , m_k , \dots$ d'entiers telle que

$$x = \frac{m_1}{m} = \frac{m_2}{m_1} = \dots = \frac{m_k}{m_{k-1}} = \dots \quad .$$

On en déduit que, pour tout k entier positif,

$$x = \frac{m_1}{m} = \dots = \frac{m_k}{m_{k-1}} = \left(\frac{m_1 m_2 \dots m_k}{m m_1 \dots m_{k-1}}\right)^{1/k} = \left(\frac{m_k}{m}\right)^{1/k} ,$$

i. e. que, pour tout k entier positif, le nombre mx^k est entier. Ainsi $x \in B(\Theta)$ entraîne x entier, ce qui termine la démonstration du lemme.

Revenant maintenant à la suite $\Lambda = (\lambda_n)$ définie précédemment, on va montrer que l'ensemble des entiers de $B(\Lambda)$ est exactement

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\underset{\sim}{Z}^* - D(m_n)) \quad ,$$

et alors le lemme précédent nous permettra de conclure en affirmant que $B(\Lambda) = B$.

Si g est une fonction continue définie sur $\underset{\sim}{R}$, à valeurs dans $\underset{\sim}{C}$ et de période 1 , le critère d'équirépartition de Weyl montre que, pour tout $x \in \underset{\sim}{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(x\lambda_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(xf^{-1}(\delta_k))$$

$$= \int_0^1 g(xf^{-1}(u))\, du = \int_0^1 g(xv)\, f'(v)\, dv \quad .$$

En particulier, étant donné $q \in \underset{\sim}{Z}^*$, on choisit $g(x) = \exp 2i\pi qx$. La moyenne de Weyl s'écrit alors

$$M(qx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp 2i\pi qx\lambda_k$$

$$= \int_0^1 \exp 2i\pi qxv\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos 2\pi jv\right] dv \quad .$$

L'uniforme convergence de la série $\sum_j \alpha_j \cos 2\pi jv$ permet d'intervertir les opérateurs $\int$ et $\sum$:

$$M(qx) = \int_0^1 \exp 2i\pi qxv\, dv + \sum_j \alpha_j \int_0^1 \exp 2i\pi qxv.\cos 2\pi jv\, dv \quad .$$

Ce qui nous intéresse est le calcul de $M(qx)$ pour x entier (positif), ce qu'on supposera désormais.

La suite (m_n) ayant été donnée, on choisira la suite (α_j) vérifiant la condition supplémentaire $\{j \mid \alpha_j \neq 0\} = \{m_n\}$ (un tel choix est toujours possible).

On voit alors que si, pour tout entier $q > 0$ et pour tout m_n, on a $qx \neq m_n$, les moyennes $M(qx)$ sont toutes nulles. Donc

$$B = \bigcap_n (\mathbb{Z}^* - D(m_n)) \subset B(\Lambda) \quad .$$

Si au contraire, il existe un entier q et un indice m_n tels que $qx = m_n$, alors

$$M(qx) = \sum_{qx-m_n=0} \frac{1}{2} \alpha_{m_n} > 0 \quad ,$$

et on a donc

$$\bigcup_n D(m_n) \subset \mathbb{Z}^* - B(\Lambda) \quad ,$$

ce qui achève de démontrer que $B(\Lambda) = B$.

5. Une remarque.

Soit φ_α la fonction définie par

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \quad .$$

Une conséquence, pour le moins amusante, de la démonstration effectuée au paragraphe précédent est le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Pour tout choix de la suite réelle (α_n), vérifiant $\alpha_n \geqslant 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < 1$, et pour tout $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, il existe $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\varphi_\alpha(qx) \neq 0$.

On constate en effet que, si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, la moyenne de Weyl précédemment étudiée est

$$M(qx) = \frac{\exp(2i\pi qx) - 1}{2i\pi} \varphi_\alpha(qx) \quad .$$

Comme x n'est pas un nombre Λ-normal, il existe donc un entier $q > 0$ tel que $M(qx) \neq 0$. Le corollaire est ainsi démontré.

(Texte reçu le 12 mai 1969)

François DRESS et Michel MENDÈS FRANCE
M. Conf. et Prof. Fac. Sc. Bordeaux
Service de Mathématiques
351 cours de la Libération
33 - TALENCE