Benali Benzaghou

Suites d'unités algébriques vérifiant une relation de récurrence linéaire

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 2 (1968-1969), exp. n° 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 15

28 avril 1969

SUITES D'UNITÉS ALGÉBRIQUES VÉRIFIANT UNE RELATION DE RÉCURRENCE LINÉAIRE

par Benali BENZAGHOU

Soit K un corps commutatif ; $\mathcal{R}(K)$ ([1]) est l'algèbre des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, $a_n \in K$, telles que les a_n vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, les opérations étant définies par

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n \qquad \text{(produit de Hadamard)} ,$$

$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$ est l'élément unité.

Soit $\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $a \neq 0$, il existe une relation

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n , \qquad \forall n \geqslant 0 ,$$

h étant minimum. $\mathfrak{a}$ représente une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X)$, où $Q(X) = 1 - q_1 X - \dots - q_h X^h$, $\deg P < h$.

A tout homomorphisme ω de corps commutatifs $K \to K'$, nous associons l'homomorphisme de $\mathcal{R}(K)$ dans $\mathcal{R}(K')$ défini par

$$\omega(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(a_n) X^n .$$

Si E est une partie de K, nous définissons

$$\mathcal{R}(E , K) = \{\sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(K) ; \ a_n \in E , \ \forall n \geqslant 0\} .$$

THÉORÈME 1. - Soit k un corps de nombres algébriques (extension de degré fini de $\mathbb{Q}$). Soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des entiers de k. Alors $\mathcal{R}(k)$ (resp. $\mathcal{R}(\mathfrak{A} , k)$) est une $\mathcal{R}(\mathbb{Q})$-algèbre (resp. $\mathcal{R}(\mathbb{Z} , \mathbb{Q})$-algèbre) entière, libre de type fini, de rang $d = [k : \mathbb{Q}]$.

Soit $\{\omega_1 , \dots , \omega_d\}$ une base de k sur $\mathbb{Q}$; soit $\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(k)$. Posons :

$$a_n = \lambda_{n,1}\, \omega_1 + \dots + \lambda_{n,d}\, \omega_d , \qquad \lambda_{n,j} \in \mathbb{Q} .$$

Soit $G = \{\sigma_1 , \dots , \sigma_d\}$ les $\mathbb{Q}$-homomorphismes injectifs de k dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour $\sigma \in G$, $\sigma\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}})$. Par ailleurs,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1\, a_n \\ \vdots \\ \sigma_d\, a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1\, \omega_1 & \sigma_1\, \omega_d \\ & \\ \sigma_d\, \omega_1 & \sigma_d\, \omega_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{n,1} \\ \vdots \\ \lambda_{n,d} \end{pmatrix} ,$$

et comme $\Delta = \det(\sigma_i\, \omega_j) \neq 0$,

$$\lambda_{n,j} = \sum_{i=1}^{d} \mu_i\, \sigma_i(a_n) .$$

Il en résulte que

$$\Lambda_j = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n,j}\, X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q} , \overline{\mathbb{Q}}) .$$

Comme $\mathcal{R}(\mathbb{Q} , \overline{\mathbb{Q}}) = \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, $\Lambda_j \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ et

$$\mathfrak{a} = \Lambda_1\, \omega_1 + \dots + \Lambda_d\, \omega_d .$$

Pour $\mathcal{R}(\mathfrak{A} , k)$, il suffit de prendre pour les (ω_i) une base d'entiers, $\{\frac{\omega_i}{\Delta}\}$ est alors une base de $\mathcal{R}(\mathfrak{A} , k)$ sur $\mathcal{R}(\mathbb{Z} , \mathbb{Q})$.

A chaque a_n , associons le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de k défini par $x \longmapsto a_n\, x$:

$$P_n(Y) = Y^d + \alpha_{n,1}\, Y^{d-1} + \dots + \alpha_{n,d} \in \mathbb{Q}[X] .$$

Alors

$$\mathfrak{a}_j = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,j}\, X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) ,$$

et

$$P(Y) = Y^d + \mathfrak{a}_1\, Y^{d-1} + \dots + \mathfrak{a}_d \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})[Y] ,$$

avec $P(\mathfrak{a}) = 0$.

PROPOSITION. - Soient k une extension galoisienne de degré fini de $\mathbb{Q}$, G son groupe de Galois, soient $k = \mathbb{Q}(\theta)$, et $F(X)$ le polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de θ. Soit $\Lambda = \{\tau \in \mathcal{R}(k) \ , \ F(\tau) = 0\}$.

Soit $\alpha \in \mathcal{R}(k)$:

$$\alpha = \Lambda_1 + \Lambda_2\,\theta + \dots + \Lambda_{d-1}\,\theta^{d-1} \ , \qquad \Lambda_j \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \ .$$

Pour $\Gamma \in \Lambda$,

$$\mathcal{B} = \Lambda_1 + \Lambda_2\,\Gamma + \dots + \Lambda_{d-1}\,\Gamma^{d-1}$$

a même polynôme caractéristique que α.

Notons que $\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n X^n \in \mathcal{R}(k) \iff \gamma_n = \sigma_n(\theta)$, où

$$\sigma_n \in G \qquad \text{et} \qquad (\sigma_n) \ \text{périodique} \ .$$

Remarque. - Soit $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(k)$, ayant même polynôme caractéristique que α. Alors $b_n = \sigma_n(a_n)$, $\sigma_n \in G$, et il existe $m \geqslant 1$ tel que

$$\sigma_{\mu+tm}(a_{\mu+tm}) = \sigma_\mu(a_{\mu+tm}) \ , \qquad \text{pour } \mu = 0 , 1 , \dots , m-1 \ , \quad t \in \mathbb{N} \ .$$

En effet, soit $I_\sigma = \{n \ ; \ \sigma_n(a_n) = \sigma(a_n)\} = \{n \ ; \ b_n - \sigma(a_n) = 0\}$. Par un théorème de Mahler ([3]), lorsque I_σ est infini, $\sum_{n \in I_\sigma} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$.

PROPOSITION. - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro, algébriquement clos. Soit $\mathbb{S}_0(K) = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \ ; \ a_n \in K \ , \ (a_n) \ \text{périodique}\}$. Alors la fermeture intégrale de K dans $\mathcal{R}(K)$ est $\mathbb{S}_0(K)$, et $\mathbb{S}_0(K)$ est intégralement fermée dans $\mathcal{R}(K)$.

THÉORÈME 2. - Soient k un corps de nombres algébriques, $\mathfrak{A}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités ; alors $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ est le groupe d'unités de $\mathcal{R}(\mathfrak{A}, k)$, et

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, k) \simeq \mathbb{S}_0' \times \mathbb{S}_1^r \ ,$$

où $\mathbb{S}_0'$ est un groupe commutatif dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant e$, e = ordre du groupe Γ_k des racines de l'unité de k, $\mathbb{S}_1$ est un groupe abélien, r le nombre de Dirichlet de k.

Soit N l'application norme de k dans $\mathbb{Q}$.

Soit $\mathfrak{a} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$, alors $\mathfrak{B} = \sum_n N(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ et $\mathfrak{B}^2 = \delta$, d'où $\mathfrak{a}$ est inversible dans $\mathcal{R}(k)$.

Pour montrer l'isomorphisme, nous avons besoin du résultat suivant :

LEMME ([1]). - Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro. Alors $\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et est inversible dans $\mathcal{R}(K)$ si, et seulement s'il existe un entier $m \geqslant 1$, des éléments $\alpha_0 , \ldots , \alpha_{m-1}$ non nuls de K tels que, pour $\mu = 0 , 1 , \ldots , m-1$, $a_\mu \neq 0$ et $a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t$ pour tout $t \geqslant 0$.

Introduisons, pour un corps commutatif K ,

$$\mathbb{S}_j(K) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid \exists P_0 , \ldots , P_{m-1} \in K[X] , \ m \geqslant 1 , \text{ tels que } \deg P_\mu \leqslant j \text{ et } a_{\mu+tm} = P_\mu(t) , \text{ pour } \mu = 0 , 1 , \ldots , m-1 , \ t \in \mathbb{N}\} .$$

PROPOSITION. - Soit ε une unité fondamentale de k , et soit $(\varphi(n))$ une suite de $\mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) \iff \sum_n \varphi(n) X^n \in \mathbb{S}_1(\mathbb{Z} , \mathbb{Q}) ,$$

où $\mathbb{S}_1(\mathbb{Z} , k) = \{\mathfrak{a} \in \mathbb{S}_1(k) \ ; \ a_n \in \mathbb{Z} , \ \forall n \geqslant 0\}$.

Il suffit d'appliquer le lemme ci-dessus.

COROLLAIRE. - Soit ε une unité fondamentale de k . Alors le groupe multiplicatif $\mathcal{R}_\varepsilon = \{ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) \ ; \ (\varphi(n))$ suite de $\mathbb{Z}\}$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{S}_1(\mathbb{Z} , \mathbb{Q})$.

Soient $\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_r$ des unités fondamentales de k , $\mathfrak{a} = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathcal{U} , k)$. Posons

$$a_n = \zeta_n \varepsilon_1^{\varphi_1(n)} \ldots \varepsilon_r^{\varphi_r(n)} , \qquad \zeta_n \in \Gamma_k , \ \varphi_j(n) \in \mathbb{Z} ,$$

alors, par le lemme,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_j^{\varphi_j(n)} X^n , \qquad j = 1 , \ldots , r ,$$

D'où

$$\mathfrak{a}_0 = \sum_n \zeta_n X^n \in \mathcal{R}(k) \quad ,$$

et $\mathfrak{a}_0^e = \delta$.

$\mathcal{S}_0'$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_0(k^*)$ des éléments tels que $\tau^e = \delta$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(\underset{\sim}{Z} , \underset{\sim}{Q})$, ce qui démontre le théorème 3.

PROPOSITION. - <u>Soient</u> $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ <u>la clôture algébrique de</u> $\underset{\sim}{Q}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ <u>son anneau d'entiers,</u> $\overline{\mathcal{U}}$ <u>son groupe d'unités,</u> Γ <u>le groupe des racines de l'unité. Alors</u> $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{U}} , \overline{\underset{\sim}{Q}})$ <u>est le groupe des unités de</u> $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{A}} , \overline{\underset{\sim}{Q}})$, <u>et</u> $\mathcal{R}(\Gamma , \overline{\underset{\sim}{Q}})$ <u>est son groupe de torsion.</u>

Il suffit de remarquer que si $\mathfrak{a} \in \mathcal{R}(\overline{\underset{\sim}{Q}})$, il existe un corps de nombres k tel que $\mathfrak{a} \in \mathcal{R}(k)$, et d'appliquer le théorème 3.

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> (a_n) <u>une suite d'unités algébriques (sur</u> $\underset{\sim}{Z}$ <u>) vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Alors il existe un entier</u> $m \geqslant 1$ <u>et des unités</u> $\alpha_0 , \ldots , \alpha_{m-1}$ <u>tels que, pour</u> $\mu = 0 , 1 , \ldots , m-1$,

$$a_{\mu+tm} = a_\mu \, \alpha_\mu^t \, , \qquad \underline{\text{pour tout}} \quad t \geqslant 0 \quad .$$

COROLLAIRE 2. - <u>Toute suite de racines de l'unité vérifiant une relation de récurrence linéaire est périodique.</u>

<u>Suites de</u> S-<u>unités.</u> - Soit k un corps de nombres, et soit M_k l'ensemble des valuations sur k . Pour toute partie finie S de M_k , contenant l'ensemble S_∞ des valuations archimédiennes, considérons $\underset{\sim}{J}_S = \prod_{v \in S} k_v^* \times \prod_{v \notin S} U_v$, le groupe des S-idèles de k , où k_v est le complété de k pour v , $\mathcal{U}_v$ son groupe d'unités.

k^* se plonge canoniquement dans le groupe des idèles $\underset{\sim}{J}$ de k ; soit k_S l'image réciproque de $\underset{\sim}{J}_S$; k_S est le groupe des S-unités de k . Pour $S = S_\infty$, $k_S = \mathcal{U}$.

La structure de k_S est donnée par le théorème de Dirichlet-Minkowski-Hasse-Chevalley ([4]) : il existe un nombre fini de S-unités fondamentales, $\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_\ell$ telles que toute S-unité ε s'écrit de manière unique :

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_\ell^{u_\ell} \, , \qquad \text{où} \quad \zeta \in \Gamma_k \, , \quad u_j \in \underset{\sim}{Z} \quad .$$

En d'autres termes, $k_S \simeq \Gamma_k \times \underset{\sim}{Z}^\ell$.

Cet isomorphisme se "fonctorise" par $\mathcal{R}$:

THÉORÈME 3. - $\mathcal{S}_S = \mathcal{R}(k_S , k)$ <u>est un sous-groupe du groupe des unités</u> $\mathcal{S}$ <u>de</u> $\mathcal{R}(k)$, $\mathcal{S}_S \simeq \mathcal{S}_0' \times \mathcal{S}_1^{\ell}$, <u>et</u> $\mathcal{S} = \varinjlim_{S} \mathcal{S}_S$.

Le théorème est une conséquence du résultat suivant :

PROPOSITION ([2]). - <u>Soit</u> (a_n) <u>une suite de</u> S-<u>unités de</u> k . <u>Alors</u> :

$$" \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(k) " \iff " \alpha \text{ est inversible dans } \mathcal{R}(k) " .$$

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> a <u>un nombre algébrique non nul, non racine de l'unité.</u> <u>Soit</u> $(\varphi(n))$ <u>une suite de</u> $\underset{\sim}{Z}$. <u>Alors</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\overline{\underset{\sim}{Q}}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} a^{-\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\overline{\underset{\sim}{Q}})$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) X^n \in \mathcal{S}_1(\underset{\sim}{Z} , \underset{\sim}{Q}) .$$

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> G <u>un sous-groupe de type fini de</u> $\overline{\underset{\sim}{Q}}^*$. <u>Alors</u> $\mathcal{R}(G , \overline{\underset{\sim}{Q}})$ <u>est un sous-groupe du groupe des unités de</u> $\mathcal{R}(\overline{\underset{\sim}{Q}})$.

Signalons pour $\underset{\sim}{C}$ le résultat suivant :

PROPOSITION. - <u>Soit</u> $D = \{z \ ; \ z \in \underset{\sim}{C} , \ z\bar{z} = 1\}$. <u>Alors</u> $\mathcal{R}(D , \underset{\sim}{C})$ <u>est un sous-groupe du groupe des unités</u> $\mathcal{S}$ <u>de</u> $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$; <u>et</u> $\mathcal{R}(\Gamma , \underset{\sim}{C})$ <u>est le sous-groupe de torsion de</u> $\mathcal{R}(D , \underset{\sim}{C})$.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$. <u>Alors</u>

$$\sum_n \arg(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C}) \implies \sum_n |a_n| X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C}) .$$

<u>Notons que pour</u> $\alpha \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{R})$:

$$\sum_n |a_n| X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{R}) \iff \sum_n \mathrm{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{R}) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (Benali). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.

[2] BENZAGHOU (Benali). - Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 1, 14 p.

[3] MAHLER (Kurt). - On the Taylor coefficients of rational functions, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 39-48.

[4] WEYL (Hermann). - Algebraic theory of numbers. - Princeton, Princeton University Press, 1940 (Annals of Mathematics Studies, 1).

(Texte reçu le 24 avril 1969)

Benali BENZAGHOU
M. Ass. Fac. Sc. Alger
Maison des Etudiants arméniens
57 boulevard Jourdan
75 - PARIS 14