Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Elhanan Motzkin

Un invariant conforme p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 1 (1968-1969), exp. nº 8b, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 8b

10 février 1969

UN INVARIANT CONFORME p-ADIQUE

par Elhanan MOTZKIN

Soit K un corps valué complet algébriquement clos.

On se propose d'associer à chaque ensemble quasi-connexe dans K une structure arborescente numérotée invariante par transformations bi-analytiques.

Soit Q un quasi-connexe, et soit S son complémentaire. On suppose S borné. Soit D_0 le plus petit disque circonférencié contenant S , et soit r_0 le rayon de D_0. Soient D_0^i les disques non-circonférenciés de rayon r_0^- , contenus dans D_0. Pour chaque i , soit D_1^i le plus petit disque circonférencié contenant $D_0^i \cap S$, et soit r_1^i son rayon. On démontre facilement le lemme suivant.

LEMME. - $D_0^i \cap S \neq D_0^i$ <u>implique</u> $r_1^i < r_0$.

On peut maintenant procéder à la construction de l'arbre. D'un point correspondant à D_0 ("la racine"), on étend des arêtes à des points correspondant aux disques intérieurs à D_0^i . On a les cas suivants :

<u>Cas 1</u> : $D_0^i \cap S = \emptyset$. On écrit $\emptyset$ sur l'arête reliant D_0 à D_0^i .
<u>Cas 2</u> : $D_0^i \cap S \neq \emptyset$. On écrit r_1^i/r_0 sur l'arête reliant D_0 à D_0^i .

On note que, dans le cas 2, il est possible que r_1^i/r_0 soit égal à 1 ($D_0^i \cap S = D_0^i$), à 0 ($D_0^i \cap S$ est un point), ou à un nombre n'appartenant pas au groupe des valeurs (la circonférence de D_1^i est vide). Si aucune de ces possibilités n'intervient, on peut continuer le processus :

Pour chaque i , on relie le point correspondant à D_1^i à des points correspondant à ses disques intérieurs D_1^{ij} . Si $D_1^{ij} \cap S = \emptyset$, on écrit $\emptyset$ sur l'arête (D_1^i , D_1^{ij}) , et si $D_1^{ij} \cap S \neq \emptyset$, on écrit r_2^{ij}/r_1^i , où r_2^{ij} est le rayon du plus petit disque contenant $D_1^{ij} \cap S$.

<u>Exception</u> : Si $D_0^i \cap S = \emptyset$ pour tous les disques intérieurs D_0^i , sauf au plus pour deux (disons i_1 et i_2), on remplace le point correspondant à la racine par une arête reliant $D_0^{i_1}$ à $D_0^{i_2}$. Si le plus petit disque circonférencié contenant $D_0^{i_1} \cap S$ (resp. $D_0^{i_2} \cap S$) est noté $D_1^{i_1}$ (resp. $D_1^{i_2}$), et son rayon $r_1^{i_1}$ (resp.

$r_1^{i_2}$), alors on écrit sur l'arête :

$$\min(r_1^{i_1}/r_1^{i_2} \; , \; r_1^{i_2}/r_1^{i_1}) \quad .$$

THÉORÈME 1. - Le disque correspondant à une chaîne infinie est nécessairement circonférencié, et est contenu entièrement dans S .

La démonstration fait usage des propriétés des ensembles quasi-connexes.

THÉORÈME 2. - Soit T une homographie, telle que $T(S)$ soit un ensemble borné. Alors l'arbre associé à $T(Q)$ est le même que l'arbre associé à Q .

Dans la démonstration, on utilise le fait que l'image d'un disque par inversion est un disque. On rappelle à ce propos que M. KRASNER a démontré que $T(Q)$ est quasi-connexe si Q l'est, ce qui donne un sens à l'arbre de $T(Q)$. D'autre part, on voit que, si les structures topologique et numérique de l'arbre sont conservées, la racine a pu être déplacée, ou même éliminée à la faveur d'une arête ; un peu comme si on relevait un fil à des points différents en laissant tomber les bouts.

Nous pouvons maintenant laisser tomber la restriction S borné, puisque, par une homographie, on peut toujours se ramener à ce cas.

Le reste de la démonstration utilise intimement le polygone de valuation décrit par M. LAZARD [2] et par P. ROBBA [3].

On établit d'abord la forme du polygone dans le cas d'une fonction analytique bijective sur un intervalle $r_1 \prec |x| \prec r_2$ ($\prec$ représente $<$ ou $\leqslant$). On trouve que sur l'intervalle, le polygone est de pente 1 , 0 ou -1 . Si on normalise de façon à ce que D_0 soit le disque unité $|x| \leqslant 1$ et que l'image de $|x| > 1$ soit $|x| > 1$, le polygone sur $|x| > 1$ est nécessairement de pente 1 .

LEMME. - L'image par une fonction analytique bijective d'un disque est un disque (1). L'image par une fonction analytique bijective d'une couronne est une couronne avec le même rapport de rayons.

THÉORÈME 3. - Soit f une fonction analytique bijective. Alors f conserve toutes les branches infinies, ainsi que les arêtes non numérotées 1 .

La démonstration se fait niveau par niveau, et dépend des observations suivantes :

---

(1) Cette proposition a été trouvée indépendamment par Mme A. DECOMPS-GUILLOUX.

1° Le graphe de f sur $|x| > 1$ existe, et sa pente égale 1. Le graphe étant continu quel que soit le point 0, il ne peut pas avoir de pente -1, même si $|x| \leqslant 1$.

2° Si le polygone de $f(x - a)$ est de pente 0 sur l'intervalle $r_1 < |x| \leqslant 1$, le polygone de $f - a$ sera de pente 1 (si f est bijective).

Pour faire marcher l'induction, on plonge éventuellement K dans un corps dont le corps de restes est non dénombrable ([1]).

Remarque. - Si f est une fonction analytique bijective sur Q, f^{-1}, définie sur $f(Q)$, peut ne pas être analytique. En effet, soit Q le quasi-connexe défini comme suit : pour chaque disque intérieur D sur $|x| = 1$, on fait correspondre l'un des deux disques intérieurs définis par $\sqrt{x}$ $(x \in D)$. Soit $f = x^2$. Alors f est analytique sur Q. Mais $f^{-1} = \sqrt{x}$ n'est pas analytique sur $f(Q) = \{|x| = 1\}$, puisque $\sqrt{x}$ ne satisfait pas au principe du prolongement analytique.

THÉORÈME 4. - Soit f analytique bijective sur Q. Alors f diminue le nombre d'arêtes marquées 1.

COROLLAIRE. - f conserve l'arbre si f est bi-analytique.

COROLLAIRE. - L'image d'un quasi-connexe par une fonction analytique bijective est un quasi-connexe.

THÉORÈME 5. - Si K a un corps de restes non dénombrable, et si Q est régulier, f analytique bijective implique f bi-analytique.

Notons que l'arbre est extrêmement rigide.

THÉORÈME 6. - Soit f analytique bijective. Alors f permute linéairement les arêtes à chaque sommet si, et seulement si, f est bi-analytique (2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du CNRS : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

---

(2) Ces deux théorèmes m'ont été signalés par P. ROBBA.

[2] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-76).

[3] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique (à paraître).

(Texte remis le 7 juillet 1969)

Elhanan MOTZKIN
Département de Mathématiques
Université de Jérusalem
JERUSALEM (Israël)