Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Elhanan Motzkin
Philippe Robba

Ensembles d'analyticité en analyse p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 1 (1968-1969), exp. nº 8a, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 8a

27 janvier 1969

ENSEMBLES D'ANALYTICITÉ EN ANALYSE p-ADIQUE

par Elhanan MOTZKIN et Philippe ROBBA

On appelle $\hat{\Omega}_p$ la clôture algébrique du complété du corps des rationnels muni de la valeur absolue p-adique.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Un ensemble quasi-connexe est un ensemble d'analyticité. Autrement dit, étant donné un ensemble quasi-connexe* A , *il existe une fonction analytique* f *sur* A *qui ne peut être prolongée analytiquement sur aucun ensemble quasi-connexe* K *contenant* A .

Nous allons construire explicitement cette fonction. Mais pour ce faire, il faut d'abord étudier de près la nature des quasi-connexes, ou plutôt de leurs complémentaires. Un ensemble dont le complémentaire est un quasi-connexe sera appelé un c.-q.-c. (complémentaire de quasi-connexe).

Soient A un quasi-connexe, et B son complémentaire. Nous supposerons désormais que B est borné, ce que l'on peut toujours obtenir à l'aide d'une inversion puisque A est ouvert.

LEMME 1. - *Soit* B *un c.-q.-c. borné, et soit* Δ *le plus petit disque fermé contenant* B . *Soit* Δ_0 *un des disques intérieur de* Δ . *Alors* $\Delta_0 \cap B$ *est* :

(a) *Soit le disque ouvert* Δ_0 *tout entier,*

(b) *Soit un c.-q.-c. contenu dans un disque fermé* Δ' *de rayon inférieur à celui de* Δ_0 ,

(c) *Soit l'ensemble vide.*

Il suffit de prouver (b). Or $\complement\Delta_0$ et $\complement B$ sont des quasi-connexes d'intersection non vide ; leur réunion est donc un quasi-connexe, donc $\Delta_0 \cap B$ est un c.-q.-c. Maintenant, si $\Delta_0 \cap \complement B$ est non vide et différent de Δ_0 , soit a un point de $\Delta_0 \cap \complement B$; puisque $\complement B$ est quasi-connexe, il existe un nombre fini de rayons exceptionnels $r_1 < \dots < r_n$ tel que B soit contenu dans la réunion des cercles $|X - a| = r_1$, ... , $|X - a| = r_n$. Δ est le disque $|X - a| \leqslant r_n$, Δ_0 le disque $|X - a| < r_n$, donc $\Delta_0 \cap B$ est contenu dans le disque $|X - a| \leqslant r_{n-1} < r_n$.

LEMME 2. - *Soit A un quasi-connexe (dont le complémentaire est borné). Il existe une suite finie ou dénombrable de disques ouverts disjoints D_k : $|x - a_k| < r_k$ contenus dans $\complement A$, et une suite finie ou dénombrable de points (b_k) appartenant au complémentaire de la réunion de A et des D_k, tels que, si K est un quasi-connexe contenant A strictement, alors :*

(a) *Ou bien K intersecte l'un des disques ouverts, D_k par exemple, et alors $A \cup (K \cap D_k)$ est quasi-connexe,*

(b) *Ou bien K contient un disque D, contenant au moins un des b_k, et tel que $A \cap D \neq \emptyset$.*

(Le "ou bien" n'est évidemment pas exclusif.)

Soit Δ le plus petit disque fermé contenant $\complement A = B$. Si Δ est de rayon nul, il est réduit à un point, et B aussi. On choisit alors ce point qui répond à la question. Si le rayon de Δ ne fait pas partie du groupe des valeurs de $\hat{\Omega}_p$, Δ n'a qu'un disque intérieur coïncidant avec lui, et alors on a $B = \Delta$. On choisit ce disque ouvert qui répond à la question. Si on n'est dans aucun de ces deux cas, soit $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ la famille dénombrable des disques intérieurs de Δ.

Considérons $B \cap \Delta_n$. Si $B \cap \Delta_n = \Delta_n$, Δ_n sera l'un des disques D_k annoncés.

Si $B \cap \Delta_n$ est non vide et différent de Δ_n, on choisit un point β de $B \cap \Delta_n$. On notera qu'il existe alors un m différent de n pour lequel $B \cap \Delta_n$ n'est pas vide.

Soit alors Δ'_n le plus petit disque fermé contenant $B \cap \Delta_n$. On recommence le raisonnement : ou bien Δ'_n est aussi un disque ouvert et $B = \Delta'_n$ sera un des D_k, ou bien Δ'_n se réduit à un point et $B \cap \Delta_n$ est un point qui sera un des b_k, ou bien alors il y a une infinité de disques intérieurs $\Delta_{n_1}, \dots, \Delta_{n_m}$, et on poursuit le raisonnement.

On obtient ainsi une famille finie ou dénombrable de disques ouverts qui sont nos D_k, et une famille finie ou dénombrable de points de $\complement A$. La suite (b_k) sera formée de points de cette famille qui n'appartiennent à aucun des D_k.

Soit alors K un quasi-connexe contenant A, et soit x un point de $K \cap \complement A$. Alors, ou bien x appartient à l'un des D_k et le lemme est prouvé (on vérifie sans peine que $(K \cap D_k) \cup A$ est un quasi-connexe), ou bien x est un des points obtenus lorsque $B \cap \Delta_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ était restreint à un point, x appartient à la suite b_k, et un disque de centre x et de rayon assez petit est contenu dans K et intersecte A, ou bien, enfin, x appartient à l'intersection d'une suite infinie de disques ouverts emboités $\Delta_{n_1, n_2, \dots, n_p}$, $\Delta_{n_1, n_2, \dots, n_p, n_{p+1}}$. On notera

$\Delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots}$ l'intersection de ces disques. Alors K doit contenir un disque D de centre x , et contenant tous les $\Delta_{n_1,\ldots,n_p}$ à partir d'un certain indice n_p , car autrement K ne serait pas quasi-connexe, ce qui achève la démonstration.

LEMME 3. - Soit D le disque ouvert $|X - a| < r$. Il existe une fonction analytique sur $\complement D$, f , de module majoré par 1 , qui ne peut pas être prolongée analytiquement en dehors de $\complement D$.

Soit β_n une suite d'entiers > 0 tels que $\beta_n \to +\infty$ et $\beta_n/n \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit α_n une suite d'entiers $\geqslant 0$ tels que $p^{\alpha_n} < r^n \leqslant p^{\alpha_{n+1}}$. On pose $c_n = p^{\beta_n - \alpha_n}$, alors $|c_n| = p^{\alpha_n - \beta_n}$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/x^n$ converge uniformément pour $|x| \geqslant r$, puisque

$$|c_n|/|x^n| \leqslant |c_n|/r^n \leqslant p^{-\beta_n} ,$$

et que ce dernier terme tend vers 0 puisque $\beta_n \to +\infty$.

Mais le rayon de convergence de cette série est r , puisque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ell_n|} = \lim_{n\to\infty} p^{\alpha_n/n} \times \lim_{n\to\infty} p^{-\beta_n/n} ,$$

or

$$\lim_{n\to\infty} p^{\alpha_n/n} = r \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} p^{-\beta_n/n} = 1 .$$

On sait qu'alors la fonction f , somme de cette série, ne peut pas être prolongée en dehors de $\complement D$ ([1]).

De plus, f est majorée en module par 1 , puisque chaque terme de la série l'est.

Démonstration du théorème. - Soit donc A un quasi-connexe, avec $B = \complement A$ borné. Soient D_k : $|x - a_k| < r_k$, et b_k les disques et les points définis au lemme 2. Soit f_k la fonction associée au disque D_k au lemme 3. Soient α_k et β_k deux suites de nombres p-adiques non nuls, tels que $|\alpha_k|$ et $|\beta_k|$ tendent vers zéro quand k tend vers l'infini, et que l'on ait $|\beta_i| \neq |\beta_j|$ pour $i \neq j$.

On appellera A_ε l'ensemble des points de A qui sont à une distance supérieure à ε du complémentaire de A . Pour tout $\varepsilon > 0$, A_ε est un quasi-connexe et $\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A$.

La fonction annoncée dans le théorème est la fonction

$$f(x) = \sum_k \alpha_k f_k(x) + \sum_k \beta_k/(x - b_k) \quad .$$

On voit que la première série converge uniformément sur le complémentaire de $\bigcup_k D_k$, donc sur A , et que la deuxième converge uniformément sur l'ensemble E_ε des points x tels que $|x - b_k| > \varepsilon$ pour tout k , donc sur A_ε , et ce quel que soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est donc bien une fonction analytique sur A .

Supposons alors que f se prolonge sur un quasi-connexe K contenant A . Si K intersecte le disque D_m , f se prolonge a fortiori sur le quasi-connexe $A \cup (K \cap D_m)$. La série $\sum_{k \neq m} \alpha_k f_k(x)$ convergeant uniformément sur $\complement \bigcup_{k \neq m} D_k$, définit une fonction analytique sur $A \cup (K \cap D_m)$. De même, la série $\sum_k \beta_k/(x - b_k)$ converge uniformément sur E_{r_m} qui contient D_m , donc cette série définit aussi une fonction analytique sur $A \cup (K \cap D_m)$, donc si f se prolonge sur $A \cup (K \cap D_m)$, la fonction

$$\alpha_m f_m(x) = f(x) - \sum_{k \neq m} \alpha_k f_k(x) - \sum_k \beta_k/(x - b_k)$$

se prolonge aussi sur $A \cup (K \cap D_m)$, ce qui contredit la définition de f_m .

Supposons alors que K ne rencontre aucun des D_k , il contient alors un disque D contenant au moins un b_n et tel que $A \cap D \neq \emptyset$. Alors $A \cup D$ est un quasi-connexe, et si f se prolonge sur K , elle se prolonge a fortiori sur $A \cup D$. D n'intersecte aucun des D_k . Soient $(b_i)_{i \in I}$ les points de la suite b_k qui appartiennent à D . On voit facilement que les séries $\sum_k \alpha_k f_k(x)$ et $\sum_{k \notin I} \beta_k/(x - b_k)$ définissent des fonctions analytiques sur $D \cup A$. Donc si f se prolonge sur $D \cup A$, la fonction

$$g(x) = \sum_{i \in I} \beta_i/(x - b_i) = f(x) - \sum_k \alpha_k f_k(x) - \sum_{k \notin I} \beta_k/(x - b_k)$$

se prolonge sur $D \cup A$. Or, comme cette série converge uniformément sur $E_\varepsilon \cup \complement D$, qui est quasi-connexe, et que, pour ε assez petit, E_ε intersecte A , g définit même une fonction analytique sur tout $\hat{\Omega}_p$, y compris le point à l'infini, donc $g(x)$ doit être constante et même nulle puisqu'on voit que $|g(x)| \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

Mais si on effectue le développement en série de Laurent de g pour $|x|$ grand, on trouve que le coefficient du terme $\frac{1}{x}$ est $\sum_{i \in I} \beta_i \neq 0$. On obtient donc une contradiction, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

(Texte reçu le 15 juin 1969)

Elhanan MOTZKIN
Département de Mathématiques
Université de Jérusalem
JERUSALEM (Israël)

Philippe ROBBA
216 rue Saint-Jacques
75 - PARIS 05