

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

YVES MEYER

Nombres de Pisot, nombres de Salem et répartition modulo 1

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969),
exp. n° 2, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A2_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES DE PISOT, NOMBRES DE SALEM
ET RÉPARTITION MODULO 1

par Yves MEYER

1. Caractère faible, caractère fort sur une partie de \mathbb{R} . Cas particulier de l'ensemble des puissances θ^k , $k \geq 0$, d'un nombre θ de Pisot ou de Salem.

Soit \mathbb{T} le groupe des nombres complexes de module 1 ; $X(\mathbb{R})$ l'ensemble de tous les homomorphismes de \mathbb{R} dans \mathbb{T} (sans condition de continuité). Soit Λ une partie de \mathbb{R} ; $X(\Lambda)$ est l'ensemble des restrictions à Λ des éléments de $X(\mathbb{R})$.

DÉFINITION 1. - Tout élément χ de $X(\Lambda)$ est appelé caractère faible sur Λ .

De même, on appelle $x(\Lambda)$ l'ensemble des restrictions à Λ des caractères continus sur \mathbb{R} . Tout élément χ de $x(\Lambda)$ est appelé caractère fort sur Λ .

L'ensemble $X(\Lambda)$ peut aussi être défini comme l'ensemble des applications χ de Λ dans \mathbb{T} telles que, pour tout entier naturel n , toute suite $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ d'éléments de Λ , et toute suite p_1, \dots, p_n d'entiers relatifs, la relation $\sum_{j=1}^n p_j \lambda_j = 0$ entraîne $\prod_{j=1}^n [\chi(\lambda_j)]^{p_j} = 1$.

THÉORÈME 1. - Soit θ un entier algébrique. Soient $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ . Soit Λ l'ensemble des puissances θ^k , $k \geq 0$. A tout nombre réel positif non nul ε et à tout élément χ de $X(\Lambda)$, on peut associer n nombres complexes x_1, x_2, \dots, x_n tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

(a) x_1 est réel, et les x_j , $j \geq 2$, associés à deux θ_j conjugués sont conjugués ;

(b) $|x_j| \leq \varepsilon$ ($2 \leq j \leq n$) ;

(c) $\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i x_1 \theta^k) \exp 2\pi i \left(\sum_{j=2}^n x_j \theta_j^k \right)$.

Avant de prouver le théorème 1, donnons-en une application.

COROLLAIRE. - Soit θ un entier algébrique dont les conjugués $\theta_2, \dots, \theta_n$ ont un module inférieur ou égal à 1 (un nombre de Pisot ou de Salem). Soit Λ l'ensemble des puissances θ^k , $k \geq 0$, de θ . Tout caractère faible χ sur Λ est limite uniforme sur Λ d'une suite de caractères forts.

On peut montrer la réciproque : Soient θ un nombre réel, Λ l'ensemble des puissances θ^k , $k \geq 0$, de θ . Si tout caractère faible sur Λ est limite

uniforme sur Λ de caractères forts, θ est un nombre de Pisot ou de Salem.

Pour montrer le théorème 1, remarquons que les trois suites $\chi(\theta^k)$, $\exp(2\pi i x \theta^k)$ et $\exp 2\pi i (\sum_{j=1}^n x_j \theta_j^k)$, satisfont à la même relation de récurrence multiplicative $z_{n+k} z_{n+k-1}^{a_1} \dots z_k^{a_k} = 1$, et pour démontrer (c) pour toute valeur de k , il suffit de prouver le lemme suivant :

LEMME. - Soient $\varepsilon > 0$, et (z_0, \dots, z_{n-1}) un point de \mathbb{T}^n . On peut trouver n nombres complexes x_1, x_2, \dots, x_n tels que les conditions (a) et (b) du théorème 1 soient satisfaites et que

$$z_k = \exp(2\pi i x \theta^k) \exp 2\pi i (\sum_{j=1}^n x_j \theta_j^k), \quad \text{si } 0 \leq k \leq n-1.$$

Soit, en effet, Γ le sous-groupe dense à un paramètre de \mathbb{T}^n qui est l'ensemble des points $(\exp(2\pi i x \theta^k))_{0 \leq k \leq n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, de \mathbb{T}^n . Soit G le sous-groupe de \mathbb{T}^n à $n-1$ paramètres qui est l'ensemble des points z_0, \dots, z_{n-1} de la forme $z_k = \exp 2\pi i (\sum_{j=1}^n x_j \theta_j^k)$, où les $x_j \in \mathbb{C}$ associés à deux θ_j conjugués le sont aussi. On a $\Gamma G = \mathbb{T}^n$, et comme Γ est dense dans \mathbb{T}^n , il suffit, en partant d'un point quelconque de \mathbb{T}^n , de se déplacer très peu le long d'une classe de G pour rencontrer Γ .

2. Répartitions modulo 1 presque-périodiques à l'infini.

Soit $(z_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes de module 1. Nous dirons que $(z_k)_{k \geq 1}$ est asymptotiquement presque-périodique, si l'on peut écrire $z_k = Z_k \varepsilon_k$, où $|Z_k| = 1$, $|\varepsilon_k| = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 1$, et où Z_k est une fonction presque-périodique de k .

Si θ est un nombre de Pisot ou de Salem, nous allons montrer que $\exp(2\pi i x \theta^k)$, $k \geq 0$, est asymptotiquement presque-périodique si, et seulement si, x appartient au corps de θ (théorème 2).

(a) Caractères faibles périodiques. - Soient \mathcal{S} un sous-groupe fini de \mathbb{T} , θ un entier algébrique, et χ un caractère faible sur l'ensemble des puissances θ^k , $k \geq 0$, à valeurs dans \mathcal{S} . Alors la suite $\chi(\theta^k)$, $k \geq 0$, est, à partir d'un certain moment, une suite périodique.

Appelons en effet $X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ l'élément irréductible de $\mathbb{Z}[X]$ dont θ est solution, et H l'homomorphisme de \mathbb{T}^n défini par

$$H(z_1, \dots, z_n) = (z_2, \dots, z_{n+1}),$$

où $z_{n+1}(z_n)^{a_1} \dots (z_1)^{a_n} = 1$. La suite des homomorphismes H^k , $k \geq 0$, de $\mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{S}$ est, à partir d'un certain moment, périodique, et il en est donc de même pour la suite des z_k , $k \geq 0$, dès que z_1, \dots, z_n appartiennent à \mathfrak{S} .

Réciproquement, soit χ un caractère faible, périodique à partir d'un certain moment, sur l'ensemble des puissances θ^k , $k \geq 0$, d'un entier algébrique θ . Alors χ prend ses valeurs dans un sous-groupe fini \mathfrak{S} de $\underline{\mathbb{T}}$.

Soit, en effet, h l'homomorphisme de $\underline{\mathbb{R}}^n$ défini par

$$h(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

où $x_{n+1} + a_1 x_n + \dots + a_n x_1 = 0$.

En posant $\chi(1) = \exp(2\pi i \alpha_0)$, \dots , $\chi(\theta^{n-1}) = \exp(2\pi i \alpha_{n-1})$, on aura

$$\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i \alpha_k), \quad \text{où } (\alpha_k, \dots, \alpha_{k+n-1}) = h^k(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}).$$

L'hypothèse entraîne l'existence de deux entiers k et ℓ tels que $\ell - k > n$ et que $h^k(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \equiv h^\ell(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \pmod{\underline{\mathbb{Z}}^n}$ ou

$$(h^k - h^\ell)(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \underline{\mathbb{Z}}^n.$$

Mais $\det(h^k - h^\ell) \neq 0$, car les valeurs propres de $h^k - h^\ell$ sont $\theta_j^k - \theta_j^\ell$, et aucun des conjugués de θ n'est une racine de l'unité. Alors

$$(h^k - h^\ell)(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \underline{\mathbb{Z}}^n$$

entraîne que chaque α_j , $0 \leq j \leq n-1$, est un nombre rationnel. Donc χ prend ses valeurs dans un sous-groupe fini de $\underline{\mathbb{T}}$.

(b) Caractérisation des répartitions modulo 1 asymptotiquement presque-périodiques.

THÉOREME 2. - Soit θ un nombre de Pisot ou de Salem. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $x \in \underline{\mathbb{R}}$, et $\exp(2\pi i x \theta^k)$, $k \geq 0$, est asymptotiquement presque-périodique ;
 (b) Il existe un sous-groupe \mathfrak{S} de $\underline{\mathbb{T}}$, et un caractère faible χ défini sur l'ensemble des puissances θ^k , $k \geq 0$, de θ , à valeurs dans \mathfrak{S} , se décomposant canoniquement en

$$\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i x \theta^k) \exp\left(2\pi i \sum_{j=2}^n x_j \theta_j^k\right);$$

(c) x appartient au corps de θ .

D'après ce que nous avons dit sur les caractères faibles prenant leurs valeurs dans un sous-groupe fini \mathcal{G} de $\underline{\mathbb{T}}$, (b) entraîne (a).

Montrons que (a) entraîne (c). Par hypothèse, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre L et un entier K tel que tout intervalle de longueur L contienne un entier τ tel que, pour $k \geq K$,

$$|\exp(2\pi i x \theta^{k+\tau}) - \exp(2\pi i x \theta^k)| \leq \varepsilon .$$

Appelons ξ le caractère défini par $\xi(\theta^k) = \exp(2\pi i x (\theta^\tau - 1) \theta^k)$. On a

$$|\xi(\theta^k) - 1| \leq \varepsilon \quad \text{dès que } k \geq K .$$

On peut donc poser $\xi(\theta^k) = \exp(2\pi i \alpha_k)$, avec $|\alpha_k| \leq \varepsilon$ si $k \geq K$. On a, pour ces valeurs de k ,

$$\alpha_{k+n} + a_1 \alpha_{k+n-1} + \dots + a_n \alpha_k \equiv 0 \pmod{1} ,$$

si $\theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \dots + a_n = 0$, $a_j \in \underline{\mathbb{Z}}$. Mais si $\varepsilon(1 + |a_1| + \dots + |a_n|) < 1$, ces congruences entraînent les égalités correspondantes. On a donc

$$\alpha_k = \sum_2^n x_j \theta_j^k , \quad \text{si } k \geq K ;$$

et donc $\xi(\theta^k) = \exp(2\pi i \alpha_k)$ entraîne que

$$x(\theta^\tau - 1) \theta^k - \sum_2^n x_j \theta_j^k = \alpha_k \in \underline{\mathbb{Z}} \quad (k \geq K) .$$

La série formelle $\sum_{k \geq K} d_k X^k$ vaut

$$\frac{x\theta^K X^K (\theta^\tau - 1)}{1 - \theta X} - \sum_2^n \frac{x_j \theta_j^K X^K}{1 - \theta_j X} = \frac{P(X)}{Q(X)} ,$$

où $Q(X) = \prod_1^n (1 - \theta_j X)$ ($\theta_1 = \theta$), et où $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux. Grâce à un théorème de Fatou ([1], lemme 2, p. 64), la série formelle $\sum_{k \geq K} d_k X^k$ s'écrit $\frac{A(X)}{B(X)}$, où A et B sont deux éléments de $\underline{\mathbb{Z}}[X]$, premiers entre eux, et où $B(0) = 1$. On a donc

$$x(\theta^\tau - 1) = -\theta \frac{A(\theta)}{B'(\theta)} ,$$

ce qui entraîne que x appartient au corps de θ .

Remarquons que ce même raisonnement prouve que, si θ est un nombre algébrique qui n'est pas un nombre de Pisot ou de Salem, pour aucun $x \neq 0$, $\exp(2\pi i x \theta^k)$, $k \geq 0$, n'est asymptotiquement presque-périodique.

Montrons enfin que (c) entraîne (b). Si x appartient au corps de θ , on peut écrire $x = y/q$, où y est un entier algébrique du corps de θ , et où q est un entier naturel. Soient y_2, \dots, y_n les conjugués de y , x_2, \dots, x_n ceux de x , et

$$\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i x \theta^k) \exp(2\pi i x_2 \theta_2^k) \dots \exp(2\pi i x_n \theta_n^k) .$$

Puisque $y\theta^k + y_2 \theta_2^k + \dots + y_n \theta_n^k$ est un entier, $x\theta^k + x_2 \theta_2^k + \dots + x_n \theta_n^k$ est de la forme m/q où $m \in \mathbb{Z}$, et χ prend ses valeurs dans un sous-groupe fini de \mathbb{T} ; (b) est prouvé.

3. Liaison entre suites asymptotiquement presque périodiques, et développement en base θ , périodique à partir d'un certain rang.

Il reste enfin à montrer comment ces notions sont reliées au développement du nombre x en base θ . On a le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Soit θ un nombre de Pisot supérieur à 2. Si la suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ de 0 et de 1 est telle que $x = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}$ soit un nombre algébrique du corps de θ , alors la suite des ε_k , $k \geq 0$, est, à partir d'un certain moment, périodique.

Pour la preuve du théorème 3, nous utiliserons les notations suivantes : $K = \mathbb{Q}[\theta]$, A l'anneau des entiers de K . Enfin $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les n \mathbb{Q} -isomorphismes distincts de K dans \mathbb{C} ; σ_1 est l'application identique de K dans \mathbb{C} .

LEMME. - Soient η un nombre réel positif, et Λ la partie de A formée des éléments $\lambda \in A$ tels que $|\sigma_2(\lambda)| \leq \eta, \dots, |\sigma_n(\lambda)| \leq \eta$. Alors, si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda$, et $\lambda \neq \lambda'$, on a $|\lambda - \lambda'| \geq (2\eta)^{-n+1}$. En particulier, Λ est un ensemble discret.

Posons, en effet, $\mu = \lambda - \lambda'$; μ est un élément de A tel que $|\sigma_j(\mu)| \leq 2\eta$ pour $2 \leq j \leq n$. Mais le produit $\mu \sigma_2(\mu) \dots \sigma_n(\mu)$ est un entier rationnel. D'où $|\mu \sigma_2(\mu) \dots \sigma_n(\mu)| \geq 1$, et le lemme est prouvé.

Pour prouver le théorème, soit

$$x = \frac{a_0 + a_1 \theta + \dots + a_{n-1} \theta^{n-1}}{s}$$

un élément de $\mathbb{Q}[\theta]$ où $a_j \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$. Supposons que

$$x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta^{-1} + \dots + \varepsilon_k \theta^{-k} + \dots .$$

On en déduit, pour tout entier p , l'inégalité

$$0 \leq \lambda_p \leq \frac{s}{\theta - 1} ,$$

où l'on a posé

$$\lambda_p = \theta^p (a_0 + \dots + a_{n-1} \theta^{n-1}) - s(\varepsilon_0 \theta^p + \varepsilon_1 \theta^{p-1} + \dots + \varepsilon_p) .$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a, pour $2 \leq j \leq n$,

$$\sigma_j(\lambda_p) \leq |a_0| + \dots + |a_{n-1}| + \frac{s}{1 - |\sigma_j(\theta)|} .$$

Le lemme nous indique que λ_p appartient à un ensemble discret Λ de nombres réels, et la condition $0 \leq \lambda_p \leq \frac{s}{\theta - 1}$ implique que λ_p appartient à un ensemble fini F de nombres réels qui ne dépend que de θ , a_0, \dots, a_{n-1} , et de s .

Mais $\lambda_{p+1} = \theta \lambda_p - s \varepsilon_{p+1}$ et $0 \leq \lambda_{p+1} \leq \frac{s}{\theta - 1}$. Comme θ dépasse 2, ε_{p+1} ne peut prendre indifféremment les valeurs 0 et 1. La valeur de ε_{p+1} , et donc celle de λ_{p+1} , ne dépendent que de la valeur de λ_p . Puisque λ_p appartient à un ensemble fini F , la suite des λ_p , et donc aussi celle des ε_p , sont, à partir d'un certain moment, deux suites périodiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KAHANE (Jean-Pierre) et SALEM (Raphaël). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

(Manuscrit reçu le 2 décembre 1968)

Yves MEYER
M. Conf. Fac. Sc. Orsay
Résidence Saint-Eloi
8 rue Courbet
91 - CHILLY-MAZARIN