

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

BENALI BENZAGHOU

Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969),
exp. n° 1, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A1_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE QUOTIENT DE HADAMARD DE DEUX FRACTIONS RATIONNELLES

par Benali BENZAGHOU

1. Définitions et rappels.

1.1. Rappels sur l'algèbre de Hadamard. - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. $\mathcal{R}(K)$ est l'algèbre des séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ à coefficients dans K représentant des fractions rationnelles (voir [1]) ; le produit (de Hadamard) est défini par

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n .$$

Plus précisément :

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \iff \exists q_1, \dots, q_h \in K, \quad a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n, \\ \text{pour tout } n \geq 0,$$

$$\iff A = \frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X), \quad Q(0) \neq 0, \quad \deg P < \deg Q .$$

Si E est une partie de K ,

$$\mathcal{R}(E, K) = \{A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K), \quad a_n \in E \text{ pour tout } n\} .$$

1.2. Problème du quotient. - Soient $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$. Nous supposons que $a_n = 0$ lorsque $b_n = 0$, et nous posons $a_n = b_n c_n$ en convenant que $c_n = 1$ lorsque $b_n = 0$ (nous pouvons toujours nous ramener à ce cas grâce à un théorème de Mahler [5]).

Il s'agit d'étudier des conditions suffisantes pour que $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$.

G. PÓLYA a étudié le cas $b_n = n$ et $c_n \in \mathbb{Z}$ ([7]), généralisé par D. G. CANTOR [3] :

Soient $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$, $b_n = P(n)$ où $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Si c_n est un entier algébrique pour tout n , alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Ce résultat est encore vrai pour une extension commutative quelconque de \mathbb{Q} :

Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro ; soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $b_n = P(n)$ où $P(X) \in K[X]$. Si $c_n = \frac{a_n}{P(n)}$ est un entier algébrique pour tout n , alors $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$.

En effet, il existe un corps L ayant un degré de transcendance fini sur \mathbb{Q} et contenant tous les a_n , tous les coefficients de $P(X)$ et tous les coefficients de la récurrence entre les a_n . L est isomorphe à un sous-corps L' de \mathbb{C} , et nous sommes ramenés au théorème de Cantor.

C. PISOT a étudié le cas où B a un pôle simple dominant ([6]).

Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$, $B = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$, $b_n = \sum_{i=1}^s Q_i(n) \beta_i^n$. Si $|\beta_i| < |\beta_1|$ pour $i = 2, \dots, s$ et $\deg Q_1 = 0$, et si $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n , alors $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Signalons ce résultat de J. F. RITT [8] :

Soit $\sum_{j=1}^s \lambda_j e^{\alpha_j z} = c(z) \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j e^{\beta_j z}$, $\lambda_j, \alpha_j, \mu_j, \beta_j \in \mathbb{C}$. Si $c(z)$ est une fonction analytique entière, alors elle est de la forme $c(z) = \sum_{j=1}^r \nu_j e^{\gamma_j z}$, $\nu_j, \gamma_j \in \mathbb{C}$.

Dans [1], nous avons caractérisé tous les éléments $A = \sum a_n X^n$ de $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ tels que $\sum_n X^n / a_n \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$. Plus généralement, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 0. - Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro ; soit \mathcal{S} le groupe des unités de $\mathcal{R}(K)$. Alors :

$A = \sum a_n X^n \in \mathcal{S} \iff$ il existe un entier $m > 1$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in K^*$, tel que, pour $\mu = 0, 1, \dots, m-1$, $a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t$, $\forall t$, $a_\mu \neq 0$.

Soit $A \in \mathcal{S}$,

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n, \quad q_i \in K,$$

$$a_n = \sum_{i=1}^s P_i(n) \alpha_i^n, \quad \forall n.$$

Il existe un corps L ayant un degré de transcendance fini sur le sous-corps premier de K , que nous identifions à \mathbb{Q} , et contenant tous les a_n et les q_i . L est isomorphe à un sous-corps de \mathbb{C} , et nous sommes ramenés à [1].

1.3. Fonctions de Pólya. - La série formelle $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, à coefficients dans K , est une fonction de Pólya, s'il existe un entier $m > 1$ et des éléments $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ de K tels que, pour $\mu = 0, 1, \dots, m-1$, $a_{\mu+rm} = a_{\mu} \alpha_{\mu}^r$ pour tout r .

Les fonctions de Pólya forment une partie multiplicativement stable de $\mathcal{R}(K)$; le théorème 0 dit que les fonctions de Pólya à coefficients non nuls forment le groupe des unités de $\mathcal{R}(K)$.

1.4. Suites de Pólya. - Soient k un corps de nombres algébriques, \mathcal{A} son anneau d'entiers. Un idéal premier \mathfrak{P} de \mathcal{A} est un diviseur premier de la suite (c_n) de k , s'il existe un terme non nul de la suite de valuation \mathfrak{P} -adique non nulle.

$\mathcal{P}((c_n))$ désignera l'ensemble des diviseurs premiers de la suite (c_n) .

PÓLYA a caractérisé les suites (c_n) de \mathbb{Z} telles que $\mathcal{P}((c_n))$ soit fini et $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ représente une fraction rationnelle. Il a montré que C est alors une fonction de Pólya [7].

Une suite (c_n) de k telle que $\mathcal{P}((c_n))$ soit fini sera dite une suite de Pólya de k .

Remarque. - Soit J le groupe des idéales de k ; pour $a \in k^*$, soit (a) l'idéale principale associée; $(a) \in J_S(a)$, c'est-à-dire a_v est une unité pour tout $v \notin S(a)$. Soit (a_n) une suite de k^* :

$$\begin{aligned} (a_n) \text{ est une suite de Pólya de } k^* &\iff \exists S \text{ fini, } S(a_n) \subset S, \forall n, \\ &\iff \exists S \text{ fini, } (a_n) \in J_S, \forall n, \end{aligned}$$

(les a_n sont des S -unités).

2. Énoncé du théorème principal.

THÉORÈME 1. - Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro.

Soient $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $a_n = b_n c_n$ (en supposant que $a_n = 0$ si $b_n = 0$, et en convenant que $c_n = 1$ dans ce cas).

Si (c_n) est une suite de Pólya de \mathbb{Q} , alors $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, et C est une fonction de Pólya.

2.1. - Pour $b_n = 1$ et $a_n \in \underline{\mathbb{Z}}$ pour tout n , nous retrouvons le résultat de Pólya ([7]) :

PROPOSITION 1. - Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}})$ tel que (a_n) soit une suite de Pólya de $\underline{\mathbb{Q}}$. Alors A est une fonction de Pólya, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que

$$A(X) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{a_{\mu} X^{\mu}}{1 - \alpha_{\mu} X^m} .$$

Remarques.

(a) Si $A \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}})$, il existe $q \in \underline{\mathbb{Z}}$ tel que $q^{n+1} a_n = u_n \in \underline{\mathbb{Z}}$ pour tout n . Si (a_n) est une suite de Pólya de $\underline{\mathbb{Q}}$, il en est de même de (u_n) ; ce qui prolonge immédiatement la proposition 1 à $\mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}})$.

(b) La proposition 1 redonne une autre démonstration (algébrique) du théorème 0 dans le cas $K = \underline{\mathbb{Q}}$. En effet, soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}})$, $a_n \neq 0$ pour tout n , tel que $\sum_{n=0}^{\infty} X^n / a_n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}})$. Il existe q_1 et q_2 de $\underline{\mathbb{Z}}$ tels que

$$u_n = q_1^{n+1} a_n \in \underline{\mathbb{Z}}, \quad \forall n ,$$

$$v_n = q_2^{n+1} \frac{1}{a_n} \in \underline{\mathbb{Z}}, \quad \forall n ,$$

d'où

$$u_n v_n = (q_1 q_2)^n ,$$

ce qui montre que (u_n) , et par suite (a_n) , sont des suites de Pólya de $\underline{\mathbb{Q}}$.

THÉORÈME 2 (de localisation). - Soit (a_n) une suite de Pólya de $\underline{\mathbb{Q}}$. Alors :

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}}) \iff \begin{cases} \text{pour tout nombre premier } p, & A_p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}}), \\ A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}}) . \end{cases}$$

Remarques.

(a) Soit (a_n) une suite de $\underline{\mathbb{Q}}^*$.

(a_n) est une suite de Pólya \iff pour presque tout p , $A_p = \delta$,

et nous avons une "formule du produit" dans $\mathbb{R}(\underline{\mathbb{Q}})$:

$$AA_0 \prod_p A_p = \delta .$$

Notons que $AA_0 = \sum_n |a_n| X^n$ pour la valeur absolue archimédienne.

(b) Énonçons deux corollaires du théorème 2 :

Soit $A_p = \sum |a_n|_p X^n \in \mathbb{R}(\underline{\mathbb{Q}})$, où (a_n) est une suite de \mathbb{Q}_p . Alors A_p est nécessairement une fonction de Pólya, et la suite $(v_p(a_n))$ est formée d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}(\underline{\mathbb{R}})$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| X^n \in \mathbb{R}(\underline{\mathbb{R}}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} \text{sgn}(a_n) X^n \in \mathbb{R}(\underline{\mathbb{R}}) .$$

Pour démontrer le théorème 1, nous allons établir une série de lemmes.

3. Lemmes.

LEMME 3.1. - Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathbb{R}(\underline{\mathbb{C}})$, $B = \sum b_n X^n \in \mathbb{R}(\underline{\mathbb{C}})$.

(a) Il existe un entier $m \geq 1$ tel que, pour chaque $\mu = 0, 1, \dots, m-1$,

$$A_{m,\mu} = \sum_{r=0}^{\infty} a_{\mu+rm} X^r, \quad B_{m,\mu} = \sum_{r=0}^{\infty} b_{\mu+rm} X^r$$

satisfont à la propriété (r) :

(r) Soient $\{\alpha_i\}$ les pôles de $A_{m,\mu}$, $\{\beta_i\}$ ceux de $B_{m,\mu}$. Aucun des quotients $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}, \frac{\beta_i}{\beta_j}, \frac{\alpha_i}{\beta_j}, \frac{\alpha_i \beta_j}{\alpha_j \beta_i}$ n'est une racine de l'unité autre que 1.

(b) Si A et B satisfont à (r), et s'il existe une relation

$$a_{\mu+rm} = c_{\mu} \gamma_{\mu}^r b_{\mu+rm} \quad \text{pour } r \geq r_0 ,$$

alors $a_n = c \gamma^n b_n$ pour tout n .

Si α est pôle de $A_{m,\mu}$, alors il existe α' pôle de A tel que $\alpha = \alpha'^m$. On considère tous les quotients $\frac{\alpha'_i}{\alpha'_j}, \frac{\beta'_i}{\beta'_j}, \frac{\alpha'_i}{\beta'_j}, \frac{\alpha'_i \beta'_j}{\alpha'_j \beta'_i}$ relatifs à A et B , et on choisit m tel qu'aucune puissance m -ième de ces quotients ne soit racine de l'unité autre que 1.

Montrons (b). Soient $a_n = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(n) \alpha_i^n$, $b_n = \sum_{i=1}^{\ell'} Q_i(n) \beta_i^n$. Par hypothèse,

$$a_{\mu+rm} = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(\mu+rm) \alpha_i^{\mu} \alpha_i^{rm} = c_{\mu} \gamma_{\mu}^r \sum_{i=1}^{\ell'} Q_i(\mu+rm) \beta_i^{\mu} \beta_i^{rm}, \quad r \gg r_0.$$

Les α_i^m sont distincts, de même les β_i^m (par l'hypothèse (r)); d'où

$$\ell' = \ell,$$

$$\alpha_i^m = \gamma_{\mu} \beta_i^m \implies \alpha_i = \gamma \beta_i \quad (\text{par } r),$$

$$\text{d'où } P_i(\mu+rm) \gamma^{\mu} = c_{\mu} Q_i(\mu+rm) \implies P_i(X) = c Q_i(X),$$

$$\text{et } a_n = c \gamma^n b_n.$$

Remarque. - Il suffit de supposer $a_{\mu+rm} = c_{\mu} \gamma_{\mu}^r b_{\mu+rm}$ pour une infinité de r .

LEMME 3.2. - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $B = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, et $a_n = b_n c_n$ (avec les conventions déjà utilisées).

Si la suite (c_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est périodique (et $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$).

Rappelons le résultat de HALLER [5]:

Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et $I(A) = \{n \mid a_n = 0\}$. Si $I(A)$ est infini, alors $\sum_{n \in I(A)} X^n \in \mathcal{R}(K)$.

Soit c l'une d'une valeur prise une infinité de fois par la suite (c_n) ; $I_c = \{n \mid c_n = c\} = I(A - cB)$. Comme $A - cB \in \mathcal{R}(K)$, $\sum_{n \in I_c} X^n \in \mathcal{R}(K)$. Ce qui implique de plus que chaque valeur c est prise une infinité de fois.

LEMME 3.3. - Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, et soit p un nombre premier. Alors il existe un entier $m \geq 1$ et un entier $\mu \leq m-1$ tels que, pour $r \geq r_0$, $r \mapsto v_p(a_{\mu+rm})$ soit une fonction affine.

Démonstration.

(a)

$$A \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \implies \exists q \in \mathbb{Z}^*, \quad q^{n+1} a_n = a'_n \in \mathbb{Z}, \quad \forall n,$$

$$v_p(a_{\mu+rm}) = v_p(a'_{\mu+em}) - (\mu + rm + 1) v_p(q),$$

et il suffit d'établir le lemme pour $A \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q})$.

(b) Soient E un anneau commutatif unitaire fini, et (a_n) une suite de E vérifiant une relation $a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n$, pour tout $n \geq 0$, $q_i \in E$. Alors la suite (a_n) est périodique à partir d'un certain rang n_0 . Si q_h est inversible dans E , alors $n_0 = 0$ (suite strictement périodique).

Considérons :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 \\ q_1 & q_{h-1} & \dots & & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+h-1} \end{pmatrix},$$

$$U_{n+1} = M U_n,$$

$$\exists T > 0, n_0 \text{ tels que } U_{n_0+T} = U_{n_0} \quad (\text{card } E \text{ fini}),$$

d'où

$$U_{n_0+T+n} = U_{n_0+n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Si $\det M = (-1)^{h-1} q_h$ est inversible, $U_{n+T} = U_n, \forall n \geq 0$.

(c) Soit K un corps valué, de valuation discrète, à corps résiduel fini ; soient \mathcal{O} son anneau de valuation, \mathcal{U} son groupe d'unités. Soit (a_n) une suite de \mathcal{O} vérifiant $a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n, \forall n \geq 0, q_i \in \mathcal{O}, q_h \in \mathcal{U}$. Alors il existe une sous-suite $(a_{\mu+rn})$ de valuation constante.

En effet, soit a_{μ} tel que $|a_{\mu}| = \inf\{|a_0|, \dots, |a_{h-1}|\}$. Posons

$$a_{\mu} = \pi^{\nu} a'_{\mu}, \quad a'_{\mu} \in \mathcal{U}, \quad \text{et} \quad a_n = \pi^n a'_n \quad \text{pour tout } n;$$

π étant une uniformisante de K . Les a'_n sont dans \mathcal{O} , et vérifient la même récurrence que les a_n . Modulo l'idéal maximal de \mathcal{O} , la suite (\bar{a}'_n) est strictement périodique ; il existe donc une sous-suite $(a'_{\mu+rn})$ d'unités.

(d) Soit K un corps valué, à valuation discrète et à corps résiduel fini. Soit (a_n) une suite de \mathcal{O} définie par

$$a_n = \sum_{i=1}^s P_i(n) \alpha_i^n, \quad P_i(X) \in K[X], \quad \alpha_i \in \mathcal{O};$$

alors il existe une sous-suite $(a_{\mu+\varepsilon n})$ telle que $r \mapsto v(a_{\mu+\varepsilon n})$ soit affine pour $r \geq r_0$.

Quitte à multiplier les a_n par une constante, on peut supposer les $P_i(X) \in \mathcal{A}[X]$. Considérons $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathcal{U}$, $\alpha_{\ell+1}, \dots, \alpha_s \notin \mathcal{U}$, $0 \leq \ell \leq s$. Si $\ell = s$, c'est le cas (c). Si $\ell = 0$, posons $\alpha_j = \pi^{\nu_j} \alpha_j''$, $\alpha_j'' \in \mathcal{U}$, et soit $\nu = \inf(\nu_j)$. Posons $\alpha_j = \pi^\nu \alpha_j'$ pour chaque j , et $a_n' = \sum_{j=1}^s P_j(n) \alpha_j'^n$. Alors $a_n = \pi^{\nu n} a_n'$, et nous raisonnons sur la suite a_n' .

Supposons donc $0 < \ell < s$. Posons

$$u_n = \sum_{j=1}^{\ell} P_j(n) \alpha_j^n, \quad v_n = \sum_{j=\ell+1}^s P_j(n) \alpha_j^n.$$

Soit $|\pi|^\lambda = \inf(|\alpha_{\ell+1}|, \dots, |\alpha_s|)$, $\lambda > 0$, alors

$$|v_n| \leq |\pi|^{\lambda n}.$$

Les u_n vérifient une relation $u_{n+h} = q_1 u_{n+h-1} + \dots + q_h u_n$, $\forall n$, où

$$1 - q_1 X - \dots - q_h X^h = \prod_{j=1}^{\ell} (1 - \alpha_j)^{m_j+1}, \quad m_j = \deg P_j,$$

donc $q_j \in \mathcal{A}$ et $q_h \in \mathcal{U}$.

Par (c), il existe une sous-suite $(u_{\mu+rm})$ de valuation constante. D'où

$$v(a_{\mu+rm}) = v(\mu + rm) + v(u_{\mu+rm}), \quad r \geq r_0,$$

$r \mapsto v(a_{\mu+rm})$ est affine.

Pour établir le lemme 3.3, soit $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q})$,

$$a_n = \sum_{i=1}^s P_i(n) \alpha_i^n.$$

Soient k l'extension de \mathbb{Q} engendrée par les α_i et les coefficients des P_i , \mathcal{A} son anneau d'entiers, \mathfrak{P} un idéal premier de \mathcal{A} au-dessus de p . Soit K le complété de k pour la valuation \mathfrak{P} -adique. On applique (d) dans K dont la valuation prolonge celle de \mathbb{Q}_p , en notant que les $\alpha_i \in \mathcal{A}$ (lemme de Fatou ([4])).

Remarque. - Le lemme peut s'énoncer pour un corps de nombres :

Soit (a_n) une suite d'un corps de nombres algébriques k telle que

$$\sum a_n X^n \in \mathcal{R}(k).$$

Pour toute valuation non archimédienne v de k , il existe une sous-suite $(a_{\mu+rm})$ telle que $r \mapsto v(a_{\mu+rm})$ soit affine pour $r \geq r_0$.

4. Démonstration du théorème 1.

Dans toute la suite, lorsque nous écrirons $a_n = b_n c_n$, nous supposerons que $a_n = 0$ lorsque $b_n = 0$, et dans ce cas nous prendrons $c_n = 1$.

Comme $I(C) = \{n \mid c_n = 0\} = I(A)$, par le théorème de Mahler nous pouvons supposer dans toute la suite $I(A) = \emptyset$. La démonstration se fera en quatre étapes, en prenant successivement $K = \mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ (clôture algébrique de \mathbb{Q}), \mathbb{C} , K quelconque.

4.1. $K = \mathbb{Q}$. - La démonstration se fait par récurrence sur $\ell = \text{card } \mathcal{P}((c_n))$.

$\ell = 0$, alors $c_n \in \{-1, +1\}$, et le lemme 3.3.

Nous pouvons toujours supposer que A et B vérifient la propriété (r) du lemme 3.1, sinon nous raisonnons sur chaque couple $A_{m,\mu}$, $B_{m,\mu}$.

Posons

$$c_n = \varepsilon_n p_1^{\varphi_1(n)} \cdots p_\ell^{\varphi_\ell(n)}, \quad \varepsilon_n \in \{-1, +1\}, \quad \varphi_j(n) \in \mathbb{Z}.$$

Il existe une sous-suite $(a_{\mu+rm_1})$ telle que

$$v_{p_1}(a_{\mu+rm_1}) = \lambda_1 r + s_1, \quad \text{pour } r \geq r_1 \quad (\text{lemme 3.2}).$$

De la suite $(b_{\mu+rm_1})$, nous pouvons extraire une sous-suite $(b_{\nu+rm_2})$ telle que

$$v_{p_1}(b_{\nu+rm_2}) = \lambda_2 r + s_2, \quad \text{pour } r \geq r_2.$$

D'où il existe une sous-suite $(c_{\mu+rm})$ telle que

$$v_{p_1}(c_{\mu+rm}) = \lambda r + s, \quad \text{pour } r \geq r_0.$$

Posons

$$a_{\mu+rm} = p_1^{s+\lambda r} a'_{\mu+rm}, \quad r \geq r_0,$$

alors

$$a'_{\mu+rm} = c'_{\mu+rm} b_{\mu+rm}, \quad r \geq r_0,$$

avec

$$c'_{\mu+rm} = \varepsilon_{\mu+rm} p_2^{\varphi_2(\mu+rm)} \cdots p_\ell^{\varphi_\ell(\mu+rm)}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\sum_r c'_{\mu+rm} X^r$ est une fonction de Pólya. Il existe m' tel que

$$c'_{\nu+tm'} = c'_{\nu} \gamma'_{\nu}{}^t, \quad t \in \mathbb{N}, \quad \nu = 0, 1, \dots, m' - 1,$$

d'où

$$a_{\nu+tm'} = c_{\nu} \gamma_{\nu}{}^t b_{\nu+tm'}, \quad \text{pour } t \geq t_0,$$

et de nouveau, par le lemme 3.2,

$$a_n = c \gamma^n b_n, \quad \text{pour tout } n.$$

4.2. $K = \overline{\mathbb{Q}}$. - Il existe une extension galoisienne k de degré fini sur \mathbb{Q} , contenant tous les a_n et tous les b_n ; soit G son groupe de Galois. Pour tout $\sigma \in G$,

$$\sigma A = \sum_n \sigma(a_n) X^n \in \mathcal{R}(k)$$

et

$$N(A) = \sum_n N_{k/\mathbb{Q}}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}).$$

Soit $s = [k:\mathbb{Q}]$:

$$N_{k/\mathbb{Q}}(a_n) = c_n^s N_{k/\mathbb{Q}}(b_n),$$

et par 4.1, $\sum_n c_n^s X^n$ est une fonction de Pólya. $D = C^s$ est donc inversible dans $\mathcal{R}(k)$, et par suite C est inversible.

4.3. $K = \mathbb{C}$. - Il existe une \mathbb{Q} -algèbre L de type fini, contenant tous les a_n et tous les b_n ; il existe un \mathbb{Q} -homomorphisme φ de L dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors

$$\varphi(A) = \sum_n \varphi(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}),$$

et

$$\varphi(a_n) = \varphi(b_n) c_n.$$

4.4. K corps commutatif de caractéristique zéro. - Il existe un corps K_1 ayant un degré de transcendance fini sur \mathbb{Q} , et contenant tous les a_n et tous les b_n . Il existe un isomorphisme de K_1 sur un sous-corps de \mathbb{C} .

5. Théorème de Pólya pour un corps de nombres.

THÉORÈME 3. - Soient k un corps de nombres algébriques, et (a_n) une suite de Pólya de k . Alors :

$$A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(k) \iff A \text{ est une fonction de Pólya.}$$

Soient k' l'extension galoisienne engendrée par k , G son groupe de Galois, $N = N_{k'/\mathbb{Q}}$.

Si A est une fonction de Pólya, il est immédiat que (a_n) est une suite de Pólya de k .

Soit (a_n) une suite de Pólya de k^* , alors $(N(a_n))$ est une suite de Pólya de \mathbb{Q}^* . Si $A \in \mathcal{R}(k)$, alors $B = N(A) \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, et B est donc inversible. Comme $B = A \prod_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma \neq e}} \sigma A$, A est lui-même inversible dans $\mathcal{R}(k)$, et A est une fonction de Pólya, par 1.3.

Remarque. - J'ignore si le théorème 1 est encore valable si je prends pour (c_n) une suite de Pólya d'un corps de nombres.

6. Applications.

6.1. THÉORÈME 4. - Soient $A \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}})$, $B \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}})$, $a_n = b_n c_n$. Supposons que :

- (1) $c_n \in \underline{\mathbb{Z}}$ pour tout n ;
- (2) $\mathcal{P}((c_n)) \cap \mathcal{P}((b_n))$ fini ;
- (3) $\sup_n \tau(c_n) < \infty$, où $\tau(d)$ est le nombre de diviseurs positifs de $d \in \underline{\mathbb{Z}}^*$, $\tau(0) = 0$.

Alors (c_n) est une suite de Pólya (et elle est périodique).

Pour $b_n = 1$ pour tout n , on retrouve un résultat de J. BERSTEL [2].

Nous pouvons toujours supposer que A et B satisfont à la propriété (r) du lemme 3.1.

Soit

$$a_n = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(n) \alpha_i^n,$$

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n, \quad q_j \in \underline{\mathbb{Z}}, \quad q_h \neq 0.$$

Supposons que $\mathcal{P}((c_n))$ ne soit pas fini.

Soit $p_1 \in \mathcal{P}((c_n))$, $p_1 \notin \mathcal{P}((b_n))$, et p_1 ne divisant pas q_h . Modulo p_1 , la suite (\bar{c}_n) est strictement périodique, d'où il existe une sous-suite $(c_{\mu_1 + r m_1})$

dont tous les termes sont divisibles par p_1 . Si $\mathcal{P}((c_{\mu_1+rm_1}))$ est fini, alors par le théorème 1, $\sum_r c_{\mu_1+rm_1} X^r$ est une fonction de Pólya, et il existe donc m' tel que

$$a_{\nu+rm'} = c_\nu \gamma_\nu^r b_{\nu+rm'} ,$$

d'où

$$a_n = c \gamma^n b_n ,$$

par le lemme 3.1 (b), et $\mathcal{P}((c_n))$ serait fini.

Il existe donc $p_2 \in \mathcal{P}((c_{\mu_1+rm_1}))$, $p_2 \notin \mathcal{P}((b_n))$, et p_2 ne divisant pas q_h , $p_2 \neq p_1$. Comme

$$a_{\mu_1+rm_1} = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(\mu_1 + rm_1) \alpha_i^{\mu_1} (\alpha_i^{m_1})^r ,$$

le produit des $\alpha_i^{m_1}$ (avec leur multiplicité) est, au signe près, $q_h^{m_1}$; d'où la suite $(\bar{a}_{\mu_1+rm_1})$ modulo p_2 est strictement périodique. Il existe une sous-suite $(c_{\mu_2+rm_2})$ de $(c_{\mu_1+rm_1})$ dont tous les termes sont divisibles par p_2 . On construit ainsi une suite infinie de nombres premiers divisant les termes de sous-suites de (c_n) , contrairement à l'hypothèse $\sup_n \tau(c_n) < \infty$.

6.2. - Soient $a \in \mathbb{Q}^*$, $a \neq \pm 1$, $(\omega(n))$ une suite de \mathbb{Z} . Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\omega(n)} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} a^{-\omega(n)} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$$

$$\iff \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour } \mu = 0, 1, \dots, m-1 ,$$

$$r \rightarrow \omega(\mu + rm) \text{ soit affine .}$$

En effet, la suite $(a^{\omega(n)})$ est de Pólya dans \mathbb{Q} .

En particulier, soit (a_n) une suite de \mathbb{Q}_p , alors

$$\sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \iff \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour } \mu = 0, 1, \dots, m-1 ,$$

$$r \mapsto v_p(a_{\mu+rm}) \text{ soit affine .}$$

Soit $A \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}_p)$, $a_n \neq 0$ pour tout n . Alors $a_n = p^{-v_p(a_n)} b_n$,

$$\sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \iff \sum_n b_n X^n .$$

En effet, $A_p = \sum |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ implique que A est une fonction de Pólya, et par suite est inversible dans $\mathcal{R}(\mathbb{Q})$.

Posons $a_n = p^{-v_p(a_n)} b_n$. Si $\sum b_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}_p)$, comme $(|a_n|_p)$ est une suite de Pólya de \mathbb{Q} , $\sum \frac{a_n}{b_n} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, par le théorème 1.

6.3. - Soit $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{Q}(X)$. Si f n'est pas constante, il n'existe pas d'ensemble fini de nombres premiers $\{p_1, \dots, p_\ell\}$ tel que

$$f(n) = \pm p_1^{\omega_1(n)} \dots p_\ell^{\omega_\ell(n)}, \quad \omega_j(n) \in \mathbb{Z},$$

pour tout n (ou pour les n d'une progression arithmétique).

En effet, si un tel ensemble de nombres premiers existait, $(f(n))$ serait une suite de Pólya de \mathbb{Q} , et comme $\sum P(n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ et $\sum Q(n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, $\sum f(n) X^n$ serait une fonction de Pólya.

Il existerait m tel que $\frac{P(\mu + rm)}{Q(\mu + em)} = \frac{P(\mu)}{Q(\mu)} \alpha_\mu^r$, $\forall r \implies f = \text{Cte}$.

Remarque. - Par le théorème de Cantor (1.4), il n'existe pas de fraction rationnelle $f(X) \in \mathbb{Q}(X)$ non polynôme telle que $f(n)$ soit entier algébrique pour tout n (ou pour tous les n d'une progression arithmétique).

6.4. - Soit $A = \sum \frac{\alpha_n}{\beta_n} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, avec $\alpha_n \in \mathbb{Z}^*$, $\beta_n \in \mathbb{Z}^*$, $\beta_n > 0$, $(\alpha_n, \beta_n) = 1$. Supposons que $\mathcal{P}((\alpha_n))$ soit fini, et que $\mathcal{P}((\alpha_n)) \cap \mathcal{P}((\beta_n)) = \emptyset$. Alors $\sum \alpha_n X^n$ et $\sum \beta_n X^n$ sont des fonctions de Pólya.

Il existe $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $q^{n+1} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = u_n \in \mathbb{Z}$,

$$q^{n+1} \alpha_n = \beta_n u_n.$$

Puisque $\mathcal{P}((\alpha_n))$ est supposé fini, $\mathcal{P}((\beta_n))$ est fini, de même $\mathcal{P}((u_n))$. D'où $\sum \frac{\beta_n}{\alpha_n} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, et A est une fonction de Pólya; il existe m tel que

$$\frac{\alpha_{\mu+rm}}{\beta_{\mu+em}} = \frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu} \sqrt[\mu]{\mu}^r = \frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu} \left(\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}\right)^r.$$

Cas particulier : Soit (a_n) une suite de \mathbb{Z}^* . Si $\sum \frac{X^n}{a_n} \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, alors

$$\sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}).$$

Plus généralement, si (a_n) est une suite d'entiers algébriques non nuls telle que $\sum \frac{X^n}{a_n} \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}})$, alors $\sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}})$.

Notons, comme conséquence, que si $A \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{C}})$ et $B \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{C}})$, $c_n \in \underline{\mathbb{Z}}^*$ et $\sum \frac{b_n}{a_n} X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{C}})$ (en particulier si A est inversible), alors $\sum \frac{a_n}{b_n} X^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Q}})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZAGHOU (Benali). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.
- [2] BERSTEL (Jean). - Une application d'un théorème de Mahler aux propriétés arithmétiques des coefficients des séries rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 1968, Série A, p. 693-695.
- [3] CANTOR (David G.). - On arithmetic properties of coefficients of rational functions, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 55-58.
- [4] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris, 1907).
- [5] MAHLER (K.). - On the Taylor coefficients of rational functions, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 39-48.
- [6] PISOT (Charles). - Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1946, p. 988-990.
- [7] PÓLYA (G.). - Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 151, 1921, p. 1-31.
- [8] RITT (J. F.). - On the zeros of exponential polynomials, Trans. Amer. math. Soc., t. 31, 1929, p. 680-686.

(Manuscrit reçu le 2.12.1968)

Benali BENZAGHOU
 M. Ass. Fac. Sc. Alger
 Maison des Etudiants arméniens
 57 boulevard Jourdan
 75 - PARIS 14e
