Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

NORBERT A'CAMPO

Théorème de préparation différentiable ultramétrique, II

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969), exp. n° 11, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 11, 4 p.

3 mars 1969

THÉORÈME DE PRÉPARATION DIFFÉRENTIABLE ULTRAMÉTRIQUE, II

par Norbert A'CAMPO

Dans notre exposé précédent ([1]), il a été démontré un théorème de préparation pour les algèbres $\mathcal{E}_K^n$ lorsque K est un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. A présent, nous montrerons comment obtenir le même résultat en faisant une hypothèse beaucoup plus faible sur le corps K.

1. *Corps s-clos et faiblement s-clos.*

Soit K un corps, et soit s un entier $\geqslant 1$. Soit $\sigma : K^s \to K^s$ l'application dont la i-ième composante σ_i est la i-ième fonction symétrique en s variables. L'application σ est surjective si, et seulement si, tout polynôme $p(X) \in K[X]$, de degré $\leqslant s$, a toutes ses racines dans K.

Définition

1° Un corps K est dit s-clos $(s \geqslant 1)$, si l'application $\sigma : K^s \to K^s$ est surjective.

2° Un corps valué K est dit faiblement s-clos, s'il existe une extension valuée L, s-close de K, et s'il existe un projecteur K-linéaire et continu de L sur K.

Exemples.

Tout corps algébriquement clos est s-clos.

Tout corps K ultramétrique, localement compact, est s-clos pour tout $s \geqslant 1$. En effet, il existe une extension finie s-close L. Soit n l'ordre du groupe $\mathrm{Gal}(L, K)$, alors $\frac{1}{n} \mathrm{Tr}_{L/K} : L \to K$ est un projecteur K-linéaire et continu de L sur K. Donc, les corps Q_p et leurs extensions finies sont faiblement s-clos pour tout $s \geqslant 1$. Par la trace, nous avons défini un projecteur explicitement.

Tout corps ultramétrique maximalement complet est faiblement s-clos. En effet, soit L la clôture algébrique complétée de K. C'est un espace de Banach sur K. Le théorème d'Ingleton ([2]) montre qu'il existe, à L, une extension, de norme 1, de l'identité 1_K. Cette extension est donc un projecteur K-linéaire et continu de L sur K.

Question : Tout corps valué complet est-il faiblement s-clos $(s \geqslant 1)$?

2. Théorème de division.

Notons

$$(x , c , t) = (x_1 , \dots , x_n ; c_1 , \dots , c_s ; t) \in K^n \times K^s \times K \quad ,$$

et

$$(x , c , t) \longmapsto \mathscr{P}(c , t) = t^s + c_1 t^{s-1} + \dots + c_s \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K) \quad .$$

Comme l'a fait J. MATHER [3], un théorème de préparation pour les algèbres $\mathcal{E}^n_K$ (K étant supposé ultramétrique, complet, et faiblement s-clos pour tout $s \geqslant 1$) se déduit du théorème suivant.

THÉORÈME de division. - Soit K un corps ultramétrique complet et faiblement s-clos. Alors, pour tout $f \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K)$, il existe

$$q \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K) \quad \text{et} \quad h_i \in \mathcal{E}(K^n \times K) \ , \qquad 1 \leqslant i \leqslant s \quad ,$$

tels que

$$f(x , c , t) = \mathscr{P}(c , t).q(x , c , t) + t^{s-1}.h_1(x , c) + \dots + h_s(x , c) \quad .$$

Si K est s-clos, les fonctions q , h_i , $1 \leqslant i \leqslant s$, sont déterminées de façon unique par f .

Lorsque K est s-clos, ce théorème a été démontré dans notre exposé précédent ([1]). Le cas général résulte du lemme suivant.

LEMME. - Soit $p : L \to K$ un projecteur continu d'une extension ultramétrique complète L de K sur K . Alors, l'application K-linéaire

$$A : \mathcal{E}(L^n) \to \mathcal{E}(K^n) \quad ,$$

définie par $F \in \mathcal{E}(L^n) \longmapsto p \circ F \circ i \in \mathcal{E}(K^n)$, est surjective.

Avant de donner des indications sur la démonstration de ce lemme, nous terminons celle du théorème de division :

Soit $f \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K)$, et soit K-faiblement s-clos. Soit L une extension s-close de K , munie d'un projecteur K-linéaire et continu $p : L \to K$. Soit $F \in \mathcal{E}(L^n \times L^s \times L)$ tel que $A(F) = f$. Notons encore par P l'extension de la fonction polynôme $\mathscr{P} : K^s \times K \to K$ à $P : L^s \times K \to K$. Nous savons, puisque L est s-clos, qu'il existe $Q \in \mathcal{E}(L^n \times L^s \times L)$ et $H_i \in \mathcal{E}(L^n \times L^s)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, tels que, pour $(x , c , t) \in L^n \times L^s \times L$, on a

$$F(x , c , t) = \wp(c , t)\, Q(x , c , t) + t^{s-1} H_1(x , c) + \dots + H_s(x , c) ,$$

et donc, si l'on pose $q = A(Q)$ et $h_i = A(H_i)$, il vient,

pour $(x , c , t) \in K^n \times K^s \times K$,

$$f(x , c , t) = \wp(c , t).q(x , c , t) + t^{s-1} h_1(x , c) + \dots + h_s(x , c) .$$

3. Indications sur la démonstration du lemme.

Pour $z \in L^n$, on pose $z' = p(z)$ et $z'' = z - z'$. Soit $f \in \mathcal{E}(K^n)$. On peut construire une fonction $F : L^n \to L$, prolongeant f , de la manière suivante : on pose, pour $z \in L^n$,

$$(1) \qquad F(z) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{i!} D^i f(z') [z'']^i \varepsilon_i(z) ,$$

où ε_i est une fonction $L^n \to L$, définie par

$$\varepsilon_i(z) = \begin{cases} 0 , & \text{si } |z''| \geqslant C(f , i) , \\ 1 , & \text{si } |z''| < C(f , i) , \end{cases}$$

les $C(f , i)$ étant des constantes choisies de sorte que (1) converge convenablement. La fonction F est K-différentiable, mais elle n'est pas L-différentiable en général. Pour cela, nous devons modifier la fonction $z \mapsto z'$.

Pour $k \in \underset{\sim}{N}$ et $\ell \in \underset{\sim}{N}$, on pose

$$A_{k,\ell} = \{z \in L^n \mid \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant |z''| < \frac{1}{2^k} \text{ et } \frac{\ell}{2^{k+1}} \leqslant |z'| < \frac{\ell + 1}{2^{k+1}}\} .$$

On pose

$$A_{-1} = \{z \in L^n \mid |z''| \geqslant 1\} .$$

Les parties $A_{k,\ell}$ et A_{-1} forment une partition ouverte de $L^n - K^n$. Désignons par $a_{k,\ell}$ un point fixé dans $A_{k,\ell}$.

Pour $z \in L^n$, on pose

$$\bar{z} = \begin{cases} a'_{k,\ell} , & \text{si } z \in A_{k,\ell} , \\ z' , & \text{si } z \in K^n , \\ 0 , & \text{si } z \in A_{-1} . \end{cases}$$

Pour définir un prolongement de f , on pose

$$F(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i f(\bar{z}) [z - \bar{z}]^i \varepsilon_i(z) ,$$

où les ε_i sont des fonctions $L^n \to L$, qui valent 1 "proche" à K^n , et 0 "loin" de K^n .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A'CAMPO (Norbert). - Théorème de préparation différentiable ultramétrique, I, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 17, 7 p.

[2] CARPENTIER (Jean-Pierre). - Semi-normes et ensembles convexes dans un espace vectoriel sur un corps valué ultramétrique, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 4e année, 1964/65, n° 7, 68 p. - Paris, Secrétariat mathématique, 1965 (Mathematica Seminosa, 1).

[3] MATHER (John). - Stability of C^∞ mappings, I : The division theorem, Annals of Math., Series 2, t. 87, 1968, p. 89-104.

(Texte reçu le 27 octobre 1969)

Norbert A'CAMPO
Faculté des Sciences de Poitiers
Service de Mathématiques
Route de Chauvigny
86 - POITIERS